

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MICHEL J. CARPENTIER

Cohomologie des fonctions ${}_0F_n$

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, n° 1 (1984-1985), exp. n° 9, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_1_A6_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE DES FONCTIONS ${}_0^F_n$
par Michel J. CARPENTIER (*)

Nous nous proposons d'exposer la construction, par les méthodes de Dwork, d'espaces de cohomologie associés de façon naturelle aux fonctions hypergéométriques généralisées ${}_0^F_n(c_1, \dots, c_n; x)$. Cette construction généralise celles de [1], [3], [4], [5], et, tout comme dans [4], on peut prendre comme point de départ (au moins à titre heuristique) la formule intégrale classique d'Erdelyi

$${}_0^F_n(c_1, \dots, c_n; x) = \frac{\Gamma(c_1) \dots \Gamma(c_n)}{(2\pi i)^n} \times \int_{-\infty}^{(0+)} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp(t_1 + \dots + t_n + \frac{x}{t_1 \dots t_n}) \frac{dt_1}{t_1^{c_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n^{c_n}} .$$

Les fonctions ${}_0^F_n$ apparaissent alors comme solutions de l'équation de déformation des espaces de cohomologie liés à l'étude des sommes exponentielles du type

$$S_m(x, \theta) = \sum_{\theta \in \mathbb{F}_q^m / \mathbb{F}_q} \theta \cdot T_{\mathbb{F}_q^m / \mathbb{F}_q} \left(t_1^{d_1} + \dots + t_n^{d_n} + \frac{x}{t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n}} \right) ,$$

où θ est un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_q$ (car $(\mathbb{F}_q) = p$), $d_1, \dots, d_n, a_1, \dots, a_n$ sont des entiers positifs premiers à p , et la somme porte sur tous les $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{F}_q^x)^n$.

Sauf dans le deuxième paragraphe, nous nous contenterons d'indiquer les résultats. Les démonstrations figurent dans [2] et seront publiées par ailleurs.

1. Définitions. Construction de la cohomologie.

Soit $p \neq 2$ un nombre premier, et soient $a_1, \dots, a_n, d_1, \dots, d_n$ des entiers positifs premiers à p , $M = \text{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$, $D = \text{ppcm}(d_1, \dots, d_n)$. Soit $J : \mathbb{Z}^n \rightarrow 1/D \mathbb{Z}$ l'application définie par $J(\alpha) = J(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{d_i}$; on pose $a = (a_1, \dots, a_n)$, $N = J(a) + 1$ et, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{cases} s(\alpha) = \max\{0, \frac{-\alpha_1}{a_1}, \dots, \frac{-\alpha_n}{a_n}\} \\ w(\alpha) = J(\alpha) + N s(\alpha) . \end{cases}$$

(*) Michel J. CARPENTIER, La Servantière, HERIC, 44390 NORT-SUR-ERDRE.

On notera par U_i l'élément de $\underline{\mathbb{Z}}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i -ième qui est égale à 1, et on dira que deux éléments $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ sont équivalents ($\alpha \sim \alpha'$) si $\alpha_i \equiv \alpha'_i$ modulo d_i pour tout i . On identifiera les classes d'équivalence pour cette relation aux éléments du groupe $G = \prod_{i=1}^n \underline{\mathbb{Z}}/d_i \underline{\mathbb{Z}}$.

Pour chaque classe d'équivalence $\bar{\alpha}$ et pour chaque $K \in \frac{1}{D} \underline{\mathbb{Z}}_{\leq 0}$ tel que

$$\bar{\alpha} \cap J^{-1}(K) \neq \emptyset,$$

il existe un élément unique $\alpha = \sigma(\bar{\alpha}, K)$ satisfaisant les conditions suivantes

- (i) $\alpha \in \bar{\alpha}$
- (ii) $s(\alpha) = \min\{s(\beta) ; \beta \in \bar{\alpha} \text{ et } J(\beta) = K\}$
- (iii) $(-\alpha_i + d_i)/a_i \geq s(\alpha), \quad \forall i$
- (iv) α est le plus petit élément (pour l'ordre lexicographique) satisfaisant (i), (ii) et (iii).

On montre que $\sigma(\bar{\alpha}, K) - a = \sigma(\overline{\alpha - \mu a}, K - \mu(N+1))$ et que, pour tout $K \in \frac{1}{D} \underline{\mathbb{Z}}$, $K \leq -1$, il existe un unique indice $\lambda = \lambda(\bar{\alpha}, K)$ tel que

$$\sigma(\bar{\alpha}, K) = \sigma(\bar{\alpha}, K+1) - d_\lambda U_{\lambda, \lambda}.$$

Pour tout $K \in \frac{1}{D} \underline{\mathbb{Z}}$, on écrit $K = \tilde{K} + (K - \tilde{K})$, $-1 < \tilde{K} \leq 0$. D'après ce qui précède, si $K \leq -1$ et $\bar{\alpha} \cap J^{-1}(K) \neq \emptyset$, alors

$$\sigma(\bar{\alpha}, K) = \sigma(\bar{\alpha}, \tilde{K}) - \sum_{v=1}^{K-\tilde{K}} d_{\lambda(\bar{\alpha}, \tilde{K}+v)} U_{\lambda(\bar{\alpha}, \tilde{K}+v)}.$$

On prolonge les définitions de $\lambda(\bar{\alpha}, K)$ et de $\sigma(\bar{\alpha}, K)$ pour $K > 0$ en posant

$$\lambda(\bar{\alpha}, K) = \lambda(\overline{\alpha - \mu a}, K - \mu(N-1))$$

où μ est un entier quelconque tel que $K - \mu(N-1) \leq 0$, et

$$\sigma(\bar{\alpha}, K) = \sigma(\bar{\alpha}, \tilde{K}) + \sum_{v=0}^{K-\tilde{K}-1} d_{\lambda(\bar{\alpha}, \tilde{K}+v)} U_{\lambda(\bar{\alpha}, \tilde{K}+v)}.$$

Soient maintenant

$$\Delta = \{\sigma(\bar{\alpha}, K) ; \bar{\alpha} \in G, K \in \frac{1}{D} \underline{\mathbb{Z}}, \bar{\alpha} \cap J^{-1}(K) \neq \emptyset\}$$

$$\Delta = \{\alpha \in \Delta ; -a_i + 1 \leq \alpha_i \leq d_i, \quad \forall i\}.$$

Nous indiquons quelques propriétés des ensembles Δ et $\tilde{\Delta}$ qui nous seront utiles.

(P₁) Soient $\alpha \in \Delta$, $K = J(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\bar{\alpha}, K)$; si $s(\alpha) > 0$, alors $s(\alpha) = \frac{-\alpha_\lambda}{a_\lambda}$.

(P₂) Si $\alpha \in \tilde{\Delta}$, alors α satisfait l'une (et une seule) des deux propriétés suivantes:

- (i) $\alpha - a \in \tilde{\Delta}$,
- (ii) $\exists j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha + d_j U_j \in \tilde{\Delta}$.

(P₃) Si $\alpha \in \tilde{\Delta}$, alors α satisfait l'une (et une seule) des deux propriétés suivantes :

$$(i) \quad \alpha + a \in \tilde{\Delta},$$

$$(ii) \quad \exists j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \alpha - d_j U_j \in \tilde{\Delta}.$$

$$(P_4) \quad |\tilde{\Delta}| = N \prod_{i=1}^n d_i.$$

Soit Ω un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{Q}_p$, et complet pour le prolongement de la valuation p -adique de $\mathbb{Q}$; on notera cette valuation par "ord", de sorte que $\text{ord } p = 1$. Soient π une racine $(p-1)$ -ième de $-p$ fixée, $b = \frac{p-1}{p}$. Si $c \in \mathbb{R}$ et $y \in \Omega^x$, on définit

$$L(y, b, c) = \left\{ \sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}} A_{\alpha} t^{\alpha}; \quad A_{\alpha} \in \Omega, \quad \text{ord } A_{\alpha} \geq c + b w(\alpha) + N s(\alpha) \text{ ord } y \right\}$$

$$L(y, b) = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} L(y, b, c).$$

Les éléments de $L(y, b)$ sont des séries de Laurent (infinies) convergentes dans le polydisque $\prod_{i=1}^n \{t_i \in \Omega; \text{ord } t_i > \frac{NM}{d_i N} \text{ ord } y\}$.

Soient

$$f(y, t) = t_1^{d_1} + \dots + t_n^{d_n} + \frac{y^M}{t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n}} \quad \text{et} \quad \hat{F}(y, t) = \exp \pi f(y, t).$$

Pour $i = 1, \dots, n$, on définit des opérateurs différentiels

$$D_{i,y} = t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \pi d_i t_i^{d_i} - \frac{\pi a_i y^M}{t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n}} = \frac{1}{\hat{F}(y, t)} \circ t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \circ \hat{F}(y, t).$$

THÉORÈME 1.

(i) Les opérateurs $D_{i,y}$ ($1 \leq i \leq n$) agissant sur $L(y, b)$ forment une famille complètement sécante.

(ii) Soit V_y l'espace vectoriel engendré sur Ω par $\{y^{Ns(\alpha)} t^{\alpha}; \alpha \in \tilde{\Delta}\}$, alors

$$L(y, b) = V_y \oplus \sum_{i=1}^n D_{i,y} L(y, b).$$

Il découle de ce théorème que le quotient

$$\mathbb{W}_y = L(y, b) / \sum_{i=1}^n D_{i,y} L(y, b)$$

est de dimension finie égale à $N \prod_{i=1}^n d_i$.

2. Déformation.

Soient $y, z \in \Omega$ satisfaisant $\text{ord } y > (-Nb)/M$ (resp. $\text{ord } z > (-Nb)/M$).

Si y et z sont suffisamment proches,

$$\exp \pi \left(\frac{z^M - y^M}{a_1 t_1 \dots a_n t_n} \right) = \frac{\hat{F}(z^M, t)}{\hat{F}(y^M, t)}$$

est bien définie en tant que série entière dans les variables $1/t_1, \dots, 1/t_n$ et définit (par multiplication) une application

$$T_{z,y} : L(z, b) \longrightarrow L(y, b) .$$

On vérifie immédiatement que, pour tout i , $T_{z,y} \circ D_{i,z} = D_{i,y} \circ T_{z,y}$, par conséquent $T_{z,y}$ induit une application inversible $\bar{T}_{z,y} : \mathbb{W}_z \longrightarrow \mathbb{W}_y$. On va considérer z comme fixé et y variable. Soit $\mathcal{O}_z$ l'anneau des germes de fonctions analytiques dans un voisinage de $z \in \Omega$ et soit

$$\epsilon_y = y \frac{\partial}{\partial y} + \pi M \frac{y^M}{a_1 t_1 \dots a_n t_n} = \frac{1}{\hat{F}(y, t)} \circ y \frac{\partial}{\partial y} \circ \hat{F}(y, t) .$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}_z \otimes_{\mathcal{O}_z} \mathcal{O}_z & \xrightarrow{\bar{T}_{z,y}} & \mathbb{W}_y \otimes_{\mathcal{O}_z} \mathcal{O}_z \\ \downarrow y \frac{\partial}{\partial y} & & \downarrow \epsilon_y \\ \mathbb{W}_z \otimes_{\mathcal{O}_z} \mathcal{O}_z & \xrightarrow{\bar{T}_{z,y}} & \mathbb{W}_y \otimes_{\mathcal{O}_z} \mathcal{O}_z . \end{array}$$

LEMME. - Soit $\alpha \in \tilde{\Delta}$

(i) si $\alpha - a \in \tilde{\Delta}$, alors $s(\alpha) = 0$ et $\epsilon_y(t^\alpha) = \pi M y^M t^{\alpha-a}$;

(ii) si $\alpha + d_i U_i \in \tilde{\Delta}$, alors

$$\epsilon_y(y^{Ms(\alpha)} t^\alpha) \equiv \pi M \frac{d_i}{a_i} y^{Ms(\alpha)} t^{\alpha+d_i U_i} \text{ modulo } D_{i,y} L(y, b) .$$

Démonstration. - (i) est évident. Pour (ii), soit $K = J(\alpha)$; alors $i = \lambda(\bar{\alpha}, K)$ et $s(\alpha) = (-\alpha_i)/d_i$. Donc si on pose $s = s(\alpha)$,

$$\epsilon_y(y^{Ms} t^\alpha) = -M \frac{\alpha_i}{a_i} y^{Ms} t^\alpha + \pi M y^{M(1+s)} t^{\alpha-a} .$$

D'autre part,

$$\pi M y^{M(1+s)} t^{\alpha-a} = M \frac{\alpha_i}{a_i} y^{Ms} t^\alpha + \pi M \frac{d_i}{a_i} y^{Ms} t^{\alpha+d_i U_i} - D_{i,y} \left(\frac{M}{a_i} y^{Ms} t^\alpha \right) .$$

Q. E. D.

Soit $H \subset G$ le sous-groupe cyclique engendré par l'image de $a = (a_1, \dots, a_n)$, et soient $\{G_\ell\}_{\ell=1}^{(G:H)}$ les orbites de G sous addition par les éléments de H . Pour chaque ℓ , $1 \leq \ell \leq (G:H)$, on définit

$$L^{(\lambda)}(y, b) = \{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} A_\alpha t^\alpha \in L(y, b) ; A_\alpha = 0 \text{ si } \bar{\alpha} \notin G_\lambda \} .$$

Il est clair que $D_{i,y} L^{(\lambda)}(y, b) \subset L^{(\lambda)}(y, b)$ pour tout i , et on peut donc définir

$$\mathbb{W}_y^{(\lambda)} = L^{(\lambda)}(y, b) / \sum_{i=1}^n D_{i,y} L^{(\lambda)}(y, b) ,$$

$$\tilde{\mathbb{W}}_y^{(\lambda)} = \mathbb{W}_y^{(\lambda)} \otimes_{\Omega} \mathcal{O}_Z .$$

On munit $\mathbb{W}_y^{(\lambda)}$ de la base dont les éléments sont les classes de

$$\{ y^{Ms(\alpha)} t^\alpha ; \alpha \in \tilde{\Delta}^{(\lambda)} \} , \text{ où } \tilde{\Delta}^{(\lambda)} = \{ \alpha \in \tilde{\Delta} ; \bar{\alpha} \in G_\lambda \} .$$

En tant qu'espaces vectoriels sur Ω , $\mathbb{W}_y = \bigoplus_{\lambda=1}^{(G:H)} \mathbb{W}_y^{(\lambda)}$.

THÉOREME 2.

(i) En tant que modules sur $\mathcal{O}_Z$, munis de la connexion e_y ,

$$\mathbb{W}_y \otimes_{\Omega} \mathcal{O}_Z \cong \bigoplus_{\lambda=1}^{(G:H)} \tilde{\mathbb{W}}_y^{(\lambda)} ;$$

(ii) soit $g = (\prod_{i=1}^n d_i) / (G : H) = |G_\lambda|$, alors

$$\text{rang}_{\mathcal{O}_Z} (\tilde{\mathbb{W}}_y^{(\lambda)}) = gN ;$$

(iii) chacun des éléments $y^{Ms(\alpha)} t^\alpha$ ($\alpha \in \tilde{\Delta}^{(\lambda)}$) de $\tilde{\mathbb{W}}_y^{(\lambda)}$ est cyclique pour la connexion e_y .

Démonstration. - Soit $\rho : \tilde{\Delta}^{(\lambda)} \rightarrow \tilde{\Delta}^{(\lambda)}$ l'application définie par

$$\rho(\alpha) = \begin{cases} \alpha + d_i U_i & \text{si } \alpha + d_i U_i \in \tilde{\Delta} \\ \alpha - a & \text{si } \alpha - a \in \tilde{\Delta} . \end{cases}$$

ρ est bien définie, grâce à la propriété (P_2) .

Soient α et β deux éléments distincts de $\tilde{\Delta}^{(\lambda)}$: il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\rho^s(\alpha) \sim \beta$, et $\rho^s(\alpha) = \rho^{s-1}(\alpha) - a$.

Soit $\gamma = \rho^s(\alpha)$: la propriété (P_3) implique que $\gamma - d_i U_i \notin \tilde{\Delta}$, $\forall i$. Donc $J(\gamma) \leq J(\beta)$, et il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\beta = \gamma + \sum_{i=1}^n \mu_i d_i U_i .$$

Soit $s' = \sum_{i=1}^n \mu_i$, alors $\beta = \rho^{s'}(\gamma) = \rho^{s+s'}(\beta)$, et donc ρ agit transitivement sur $\tilde{\Delta}^{(\lambda)}$.

Soient $\wedge_1, \dots, \wedge_n$ les entiers positifs définis de façon unique par

$$ga = \sum_{i=1}^n \wedge_i d_i U_i .$$

Soit $\alpha \in \tilde{\Delta}^{(\ell)}$ un élément tel que $\alpha + a \in \tilde{\Delta}^{(\ell)}$, et soit h le plus petit entier tel que $\rho^h(\alpha) = \rho^{h-1}(\alpha) - a$ et $\rho^h(\alpha) \sim \alpha - ga$: il existe $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} \rho^{h-1}(\alpha) = \alpha - (g-1)a + \sum_{i=1}^n \lambda'_i d_i U_i \\ \rho^h(\alpha) = \alpha - ga + \sum_{i=1}^n \lambda'_i d_i U_i \\ h = g + \sum_{i=1}^n \lambda'_i . \end{cases}$$

Observons que $h \geq 2$ puisque $\rho(\alpha) = \alpha + d_i U_i$ pour un indice i . De plus, si $h' \in \mathbb{N}$ ($1 \leq h' \leq h-1$), alors $\rho^{h'}(\alpha) \neq \alpha$ puisque, soit $\rho^{h'}(\alpha) \not\sim \alpha$, soit $J(\rho^{h'}(\alpha)) > J(\alpha)$.

Maintenant $\rho^h(\alpha) \sim \alpha$ et, pour tout i , $\rho^h(\alpha) - d_i U_i \notin \tilde{\Delta}$. Par conséquent $\rho^h(\alpha) = \alpha$ et $ga = \sum_{i=1}^n \lambda'_i d_i U_i$. On en déduit que $\lambda_i = \lambda'_i$ pour tout i et que l'ordre de ρ est égal à $h = g + \sum_{i=1}^n \lambda_i = g + \sum_{i=1}^n g(a_i/d_i) = gN$. Ceci démontre (ii). Finalement, (iii) est une conséquence directe du lemme.

Q. E. D.

Pour un ℓ fixé ($1 \leq \ell \leq (G:H)$) on peut maintenant décrire de façon explicite l'action de la connexion sur $\tilde{\mathcal{W}}_y^{(\ell)}$; on choisit un élément $\alpha = \alpha^{(1)}$ de $\tilde{\Delta}^{(\ell)}$ satisfaisant $\alpha + a \in \tilde{\Delta}$, et pour tout $v \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$\begin{cases} \alpha^{(v+1)} = \rho^v(\alpha^{(1)}) \\ s_v = s(\alpha^{(v)}) \\ \omega_y^{(v)} = y^{Ms_v} t^{\alpha^{(v)}} . \end{cases}$$

D'après la démonstration du Théorème 2 on a $\alpha^{(gN+v)} = \alpha^{(v)}$ et donc $s_{gN+v} = s_v$ et $\omega_y^{(gN+v)} = \omega_y^{(v)}$ pour tout $v \in \mathbb{Z}$.

Soit

$$\sigma_v = \begin{cases} M(1 - s_v) & \text{si } \alpha^{(v)} = \alpha^{(v-1)} - a \\ M(s_{v-1} - s_v) & \text{sinon .} \end{cases}$$

Avec ces notations, et en utilisant le lemme, on voit que la connexion ϵ_y agissant sur $\tilde{\mathcal{W}}_y^{(\ell)}$ a pour matrice :

$$- \mathcal{K}^{(\lambda)} = \pi M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & y^{\sigma_1} \\ y^{\sigma_2} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & y^{\sigma_3} & 0 & & 0 \\ & & y^{\sigma_j} & & 0 \\ & & & y^{\sigma_{gN}} & 0 \end{bmatrix}$$

On remarquera que $\sigma_v \geq 0$ pour tout v et que $s_v = 0$ à chaque fois que $\alpha^{(v)} \neq \alpha^{(v+1)}$, de sorte que $\sum_{v=1}^{gN} \sigma_v = gM$. L'élément $Z = \sum_{v=1}^{gN} Z_v(y) \omega_y^{(v)}$ de $\tilde{\mathcal{W}}_y^{(\lambda)}$ représente l'image par $\tilde{T}_{Z,y}$ d'un élément de $\tilde{\mathcal{W}}_Z^{(\lambda)}$ indépendant de y si, et seulement si, $e_Y(Z) = 0$ ou, de façon équivalente, s'il satisfait l'équation différentielle

$$E^{(\lambda)} : y \frac{\partial}{\partial y} (Z_1 \dots Z_{gN})^t = \mathcal{K}^{(\lambda)} (Z_1 \dots Z_{gN})^t.$$

La solution classique de $E^{(\lambda)}$ au voisinage de $y = 0$ peut s'écrire sous la forme $Z(y) = P(y) y^H$, où $H = \mathcal{K}^{(\lambda)}(0)$ est une matrice de Jordan, et où $P(y)$ est analytique dans un voisinage de 0 , avec $P(0) = I_{gN}$, la matrice identité ([6], Théorème 5.5).

On peut calculer (par exemple) l'équation différentielle scalaire satisfaite par Z_{gN} . Pour cela on pose

$$\delta = y \frac{\partial}{\partial y}; \quad \lambda_v = \sum_{i=v+1}^{gN} \sigma_i \quad \text{si } v \leq gN - 1; \quad \lambda_{gN} = 0.$$

THÉORÈME 3. - Z_{gN} est solution de l'équation différentielle hypergéométrique

$$\prod_{v=1}^{gN} (\delta - \lambda_v) Z = (-\pi M)^{gN} y^{gM} Z.$$

Démonstration. - Si l'on convient que $Z_{v+gN} = Z_v$ pour tout $v \in \mathbb{Z}$, l'équation $E^{(\lambda)}$ entraîne

$$\delta Z_v = -\pi M y^{\sigma_v} Z_{v-1}.$$

Posons alors, pour $1 \leq v \leq gN - 1$,

$$\mu_v = (-\pi M)^{gN-v} y^{\sum_{i=v+1}^{gN} \sigma_i} Z_v.$$

On a

$$(\delta - \sum_{i=v+1}^{gN} \sigma_i) \mu_v = \mu_{v-1} \quad \text{si } 2 \leq v \leq gN - 1,$$

et par conséquent

$$\mu_1 = \sum_{v=2}^{gN-1} (\delta - \sum_{i=v+1}^{gN} \sigma_i) \mu_{gN-1}.$$

D'autre part,

$$(\delta - \sum_{i=2}^{gN} \sigma_i) \mu_1 = (-\pi)^{gN} y^1 Z_{gN}.$$

Il suffit alors d'observer que $\mu_{gN-1} = \delta Z_{gN}$ et de rappeler que $\sum_{v=1}^{gN} \sigma_v = gM$.

Q. E. D.

Les indices de l'équation différentielle du Théorème 3 sont les racines du polynôme $I(T) = \prod_{v=1}^{gN} (T - \lambda_v)$. Soient $v_1, \dots, v_g$ ($1 < v_1 \leq \dots \leq v_g = gN$) les entiers tels que

$$\alpha_{j+1}^{(v_j+1)} = \alpha_j^{(v_j)} - a$$

et soit $v_0 = 0$. Alors $s_{v_j} = 0$ pour $j = 1, \dots, g$ et si $v \leq gN - 1$ satisfait $v_j + 1 \leq v \leq v_{j+1}$, on a

$$\lambda_v = \sum_{i=v+1}^{gN} \sigma_i = M(g - j - 1) + Ms_v.$$

De plus, comme $s_v < 1$ ($1 \leq v \leq gN$), on a $\lambda_v < gM$ pour tout v . En particulier $I(jgM) \neq 0$ pour tout entier $j > 0$. Si $Z(y)$ est la solution d'exposant nul normalisée de sorte que $Z(0) = 1$, alors

$$Z(y) = 1 + \sum_{j \geq 1} \frac{(-\pi)^{jgN}}{I(gM) \cdot I(2gM) \dots I(jgM)} y^{jgM}.$$

Posons $\tau_v = 1 - (\lambda_v)/M$ ($1 \leq v \leq gN - 1$); alors

$$I(gM) \dots I(jgM) = (gM)^{jgN} j! (\tau_1)_j \dots (\tau_{gN-1})_j,$$

et donc

$$Z(y) = {}_0F_{gN-1}(\tau_1, \dots, \tau_{gN-1}; \frac{(-\pi)^{gN}}{g} y^{gM}).$$

3. Structure de Frobenius.

Soit G_{λ} , l'orbite sous H de $p\bar{\alpha}$ pour un choix quelconque de $\bar{\alpha} \in G_{\lambda}$. On définit une application $\mathbb{Q}$ -linéaire $\psi: L^{(\lambda)}(y, (b/p)) \rightarrow L^{(\lambda)}(y^p, b)$ par son action sur les monômes :

$$\psi(t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}) = \begin{cases} t_1^{\alpha_1/p} \dots t_n^{\alpha_n/p} & \text{si } p \mid \alpha_i, \forall i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit d'autre part $F(y, t) = (\hat{F}(y, t))/(\hat{F}(y^p, t^p)) \in L(y, b/p)$. On peut former la composée

$$\mathfrak{F}_y : L^{(\lambda')}(y, b) \xrightarrow{i} L^{(\lambda')}(y, \frac{b}{p}) \xrightarrow{x F(y, t)} L^{(\lambda')}(y, \frac{b}{p}) \xrightarrow{\psi} L^{(\lambda)}(y^p, b),$$

et on vérifie facilement que $\mathfrak{F}_y \circ D_{i,y} = p D_{i,y^p} \circ \mathfrak{F}_y$. Par conséquent, $\mathfrak{F}_y$ induit une application (le Frobenius) au niveau de la cohomologie

$$\bar{\mathfrak{F}}_y : \mathbb{W}_y^{(\lambda')} \longrightarrow \mathbb{W}_y^{(\lambda)}.$$

La connexion ϵ_{y^p} opérant sur $\tilde{\mathbb{W}}_{y^p}^{(\lambda)}$ est définie par

$$\epsilon_{y^p} = \frac{1}{\hat{F}(y^p, t)} \circ \frac{1}{p} y \frac{\partial}{\partial y} \circ \hat{F}(y^p, t),$$

et sa matrice, par rapport à la base $\{y^{ps(\alpha)} t^\alpha; \alpha \in \tilde{\Delta}^{(\lambda)}\}$ est égale à $\mathbb{W}^{(\lambda)}(y^p)$. De plus, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{W}}_y^{(\lambda')} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}_y} & \tilde{\mathbb{W}}_{y^p}^{(\lambda)} \\ \epsilon_y \downarrow & & \downarrow p \epsilon_{y^p} \\ \tilde{\mathbb{W}}_y^{(\lambda')} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}_y} & \tilde{\mathbb{W}}_{y^p}^{(\lambda)}. \end{array}$$

En particulier, si $c^{(\lambda)}(y)$ est la matrice de $\mathfrak{F}_y : \mathbb{W}_y^{(\lambda')} \longrightarrow \mathbb{W}_{y^p}^{(\lambda)}$ et si $\tilde{z}^{(\lambda)}(y)$ (resp. $\tilde{z}^{(\lambda')}(y)$) est la matrice solution de $E^{(\lambda)}$ (resp. $E^{(\lambda')}$) satisfaisant $\tilde{z}^{(\lambda)}(z) = I_{gN}$ (resp. $\tilde{z}^{(\lambda')}(z) = I_{gN}$) alors

$$c^{(\lambda)}(y) \tilde{z}^{(\lambda')}(y) = \tilde{z}^{(\lambda)}(y^p) c^{(\lambda)}(z).$$

Remarques.

1° Dans ce qui précède, le choix d'une "bonne base" pour $\mathbb{W}_y$ permet d'éviter les problèmes techniques introduits par l'existence de pôles. En particulier, la matrice de Frobenius est analytique dans le disque $\text{ord } y > (-Nb)/M$, et peut donc être évaluée à $y = 0$.

2° Signalons que dans certains cas particuliers la matrice $c^{(\lambda)}(0)$ a pu être calculée de façon explicite. Cette matrice est en général triangulaire et ses coefficients diagonaux font intervenir des valeurs de la fonction gamma p-adique en des points rationnels. On peut alors calculer le déterminant du Frobenius et décrire (par déformation) la structure symplectique.

3° La décomposition de $\mathbb{W}_y$ en sous-cristaux donnée par le Théorème 2 a une interprétation géométrique. Dans chaque sous-cristal, le polynôme caractéristique du Frobenius fournit la fonction L d'Artin associée à un caractère du groupe dual de G/H , ce dernier opérant comme groupe d'automorphismes d'un recouvrement d'Artin-Schreier de la variété affine $(\mathbb{A}^1 - \{0\})^n$. (Voir [2], Introduction.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADOLPHSON (A.) and SPERBER (S.). - Twisted Kloosterman sums and p -adic Bessel functions, *Amer. J. of Math.*, t. 106, 1984, p. 549-591.
 - [2] CARPENTIER (M. J.). - p -Adic cohomology of generalized hyperkloosterman sums, Thèse, University of Minnesota, 1985.
 - [3] DWORK (B.). - Bessel functions as p -adic functions of the argument, *Duke math. J.*, t. 41, 1974, p. 711-738.
 - [4] SPERBER (S.). - p -Adic hypergeometric functions and their cohomology, *Duke math. J.*, t. 44, 1977, p. 535-589.
 - [5] SPERBER (S.). - Newton polygons for general hyperkloosterman sums, "Cohomologie p -adique", *Astérisque*, t. 119-120, 1984, p. 267-330.
 - [6] WASOW (W.). - Asymptotic expansions for ordinary differential equations. - New-York, London, Sydney, Interscience Publishers, 1965 (Pure and applied Mathematics, 14).
-