Groupe de travail
d'analyse ultramétrique

Thong Nguyen-Quang-Do

Résidu en s = 1 de certaines fonctions d'Iwasawa

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 19, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A11_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 19, 9 p.

26 mars 1984

RÉSIDU EN $s = 1$ DE CERTAINES FONCTIONS D'IWASAWA

par NGUYEN-QUANG-DO Thong (*)

0. Introduction.

Soient k une extension finie de $\mathbb{Q}$, p un nombre premier (si $p = 2$, on suppose que k contient les racines 4e de 1), et S un ensemble fini de places de k contenant les places archimédiennes et les places divisant p. Au couple (k, S) on associe le pro-p-groupe $X_k^S = X_k$, qui est par définition le groupe de Galois de la pro-p-extension abélienne S-ramifiée (i. e. non ramifiée hors de S) maximale de k. Un certain nombre de propriétés arithmétiques importantes de k se reflètent dans la structure de X_k : ainsi, la valeur du $\mathbb{Z}_p$-rang de X_k est donnée par la conjecture de Leopoldt pour k et S (à savoir, $\text{rang}_{\mathbb{Z}_p} X_k = 1 + r_2$, r_2 = nombre de places complexes de k), tandis que l'ordre de T_k, le sous-groupe de torsion de X_k, est relié au résidu en $s = 1$ de la fonction zêta p-adique de k (quand k est réel) [2]. Comme l'a fait remarquer G. GRAS [4], la notion de S-ramification n'est pas une généralisation de la non-ramification, mais plutôt une notion "duale". Le théorème principal que nous montrons ci-dessous (théorème 1) précise cette notion de dualité, en même temps qu'il nous permet de relier les points de vue précédents (conjecture de Leopoldt, fonction ζ_p) à la théorie d'Iwasawa, suivant COATES ([2], p. 269-353).

Nous adopterons les notations suivantes :

- S = ensemble fini de places de k contenant les places archimédiennes et les places de k divisant p ;
- Σ = ensemble des places non archimédiennes de S ;
- k_S = extension S-ramifiée maximale de k ;
- $k_S(p)$ = pro-p-extension S-ramifiée maximale de k ;
- $\mathcal{G}_k^S = \mathcal{G}_k = \text{Gal}(k_S/k)$ et $G_k^S = G_k = \text{Gal}(k_S(p)/k)$ (donc G_k est le plus grand quotient de $\mathcal{G}_k$ qui soit un pro-p-groupe) ;
- $X_k^S = X_k = G_k^{ab}$ (l'abélianisé de G_k) ;
- T_k = le sous-groupe de $\mathbb{Z}_p$-torsion de X_k.

On sait que X_k est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, donc T_k est un p-groupe fini.

De façon générale, pour tout $\mathbb{Z}_p$-module X, on pose

(*) NGUYEN-QUANG-DO Thong, Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

$$\rho(X) = \mathbb{Z}_p\text{-rang de } X = \dim_{\mathbb{Q}_p} X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p .$$

On sait que $1 + r_2 \leqslant \rho(X) \leqslant \{k : \mathbb{Q}\}$, où r_2 est le nombre de places complexes de k, et la conjecture de Leopoldt (sous entendu pour k et S) dit que $\rho(X_k) = 1 + r_2$, ce qui équivaut à $H^2(G_k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$ (voir par exemple [10]). On s'interesse maintenant à la structure de T_k.

1. T_k et modules d'Iwasawa.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit μ_{p^n} le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité. On pose

$$\mu_{p^\infty} = \bigcup_{n\geqslant 1} \mu_{p^n} \quad \text{et} \quad \mu(k) = \mu_{p^\infty} \cap k^\times .$$

On associe à k les extensions $K = k(\mu_p)$ et $k_\infty = k(\mu_{p^\infty})$. On note

$$G_\infty = \mathrm{Gal}(K_\infty/k) \quad \text{et} \quad \Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K) .$$

On introduit les modules d'Iwasawa suivants : soit L_∞ la pro-p-extension abélienne non ramifiée, décomposant les places de S, maximale, de K_∞. On pose $X_\infty = \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ et $A_\infty = \mathrm{Hom}(X_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (le dual de Pontrjagin de X_∞).

Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, on note $A_\infty(i)$ le "i-twist" de Tate de A_∞.

THÉORÈME 1. - *Supposons que k vérifie la conjecture de Leopoldt. On a une suite exacte*

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mu(k) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} \mu(k_v) \longrightarrow T_k \longrightarrow A_\infty(1)^{G_\infty} \longrightarrow 0$$

(k_v désigne le complété v-adique).

Remarques.

(i) X_∞ est la limite projective des p-groupes de S-classes d'ideaux $\mathrm{Cl}_S(L)$ des sous-extensions finies L de K_∞/K, donc $\mathrm{Cl}_S(k)$ est relié à $(X_\infty)_{G_\infty}$ (le plus grand quotient de X_∞ sur lequel G_∞ opère trivialement) par la théorie classique d'Iwasawa. Par suite, $A_\infty(1)^{G_\infty}$ est relié à un "twist" du dual de $\mathrm{Cl}_S(k)$, ce qui "explique" la notion de dualité évoquée plus haut.

(ii) Si k contient μ_{p^n}, le théorème 1 permet de décrire le sous-groupe de p^n-torsion $T_k(p^n)$ par une suite exacte

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma-\{v_0\}} \mu_{p^n} \longrightarrow T_k(p^n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}_S(k), \mu_{p^n}) \longrightarrow 0 .$$

Le résultat est bien connu des K-théoriciens (voir par exemple [7], 2.1) ; voir aussi le § 3).

Preuve du théorème.

(a) Considérons la suite exacte de G_k-modules (avec action triviale)

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{Z}_p n/\underset{\sim}{Z} \longrightarrow \underset{\sim}{Q}_p/\underset{\sim}{Z}_p \xrightarrow{p^n} \underset{\sim}{Q}_p/\underset{\sim}{Z}_p \longrightarrow 0 \quad .$$

Puisque $H^2(G_k , \underset{\sim}{Q}_p/\underset{\sim}{Z}) = 0$ (k vérifie la conjecture de Leopoldt), la suite exacte de cohomologie s'écrit

$$H^1(G_k , \underset{\sim}{Q}_p/\underset{\sim}{Z}_p) \xrightarrow{p^n} H^1(G_k , \underset{\sim}{Q}_p/\underset{\sim}{Z}_p) \longrightarrow H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_p n/\underset{\sim}{Z}) \longrightarrow 0$$

d'où par dualité

$$H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_p n/\underset{\sim}{Z})^* \simeq \mathrm{Ker}(X_k \xrightarrow{p^n} X_k) \quad (* \text{ désigne le dual de Pontrjagin}).$$

En prenant n suffisamment grand, on obtient donc

$$H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_p n/\underset{\sim}{Z})^* \simeq T_k \ .$$

Le problème consiste maintenant à décrire le groupe $H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_p n/\underset{\sim}{Z})^*$.

(b) On sait ([5], 6.22) que $H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}) = H^2(\mathcal{O}_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})$, et ce dernier groupe prend place dans la suite exacte de Poitou-Tate ([5], 1.3)

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_k, \mu_{p^n}) \to \prod_{v\in\Sigma} H^0(\mathcal{O}_v, \mu_{p^n}) \prod_{v\in S-\Sigma} H^0(\mathcal{O}_v, \mu_{p^n}) \to H^2(\mathcal{O}_k, \underset{\sim}{Z}_p n/\underset{\sim}{Z})^* \to H^1(\mathcal{O}_k, \mu_{p^n}) \longrightarrow$$

$$\prod_{v\in S} H^1(\mathcal{O}_v, \mu_{p^n}) \longrightarrow$$

$$0 \leftarrow H^0(\mathcal{O}_k, \underset{\sim}{Z}_p n/\underset{\sim}{Z})^* \leftarrow \coprod_{v\in S} H^2(\mathcal{O}_v, \mu_{p^n}) \leftarrow H^2(\mathcal{O}_k, \mu_{p^n}) \leftarrow H^1(\mathcal{O}_k, \underset{\sim}{Z}_p n/\underset{\sim}{Z})^* \longleftarrow$$

(on remarquera que les lignes parallèles sont duales).

La première ligne nous donne, pour $n \gg 0$, la suite exacte,

$$0 \longrightarrow \mu(k) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} \mu(k_v) \longrightarrow T_k \longrightarrow \mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n}) \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n})$ désigne le noyau de $H^1(\mathcal{O}_k , \mu_{p^n}) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} H^1(\mathcal{O}_v , \mu_{p^n})$.

Pour tous entiers $m \geqslant n$, on a des homomorphismes naturels $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n}) \to \mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n})$. Comme T_k est fini, la suite exacte précédente montre que <u>les $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n})$ sont finis et se stabilisent à partir d'un certain rang</u>. Donc, en posant

$$\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^\infty}) = \varinjlim \mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n}) \ ,$$

on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu(k) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} \mu(k_v) \longrightarrow T_k \longrightarrow \mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^\infty}) \longrightarrow 0 \ .$$

(c) Il reste à identifier ce dernier groupe $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^\infty})$. D'abord quelques notations.

Pour tout entier $n \geq 1$, posons $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n}) = V_n(k)$. On voit facilement que

$$V_n(k) = \{x \in k \ ; \ x \in k_v^{x^{p^n}} \ , \ \forall\, v \in \Sigma \ , \ x \in U_v\, k_v^{x^{p^n}} \ , \ \forall\, v \notin \Sigma\}/k^{x^{p^n}}$$

(ici, U_v désigne les unités locales, avec la convention que $k_v^x = U_v$ si v est une place archimédienne), et $V_n(k) \simeq \mathrm{Hom}((\mathrm{Cl}_S(k) \ , \mu_{p^n})$ si $\mu_{p^n} \subset k^x$.

Soit alors $K_n = k(\mu_{p^n})$, $n \geq 1$, la tour habituelle des sous-extensions de K_∞/K. Posons $G_n = \mathrm{Gal}(K_n/k)$.

LEMME 1. - *Pour tout entier* $n \geq 1$, *on a* $V_n(k) \simeq V_n(K_n)^{G_n}$.

Preuve. - Cela résulte immédiatement des définitions et de la trivialité cohomologique, bien connue du G_n-module μ_{p^n} ([5], 7.1).

Par passage à la limite, on obtient $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^\infty}) \simeq \mathrm{Hom}(X^\infty \ , \mu_{p^\infty})^{\mathcal{G}_\infty}$, ce qui termine la démonstration du théorème.

Q. E. D.

Notons qu'en passant, on a également démontré la suite exacte (2) de la remarque (i). Le théorème 1 permet de retrouver facilement un certain nombre de résultats connus.

COROLLAIRE 1 (GILLARD [3], MIKI [8]). - *Supposons* $\mu_p \subset k^*$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $T_k \simeq \prod_{v \in \Sigma} \mu(k_v)/\mu(k)$,

(ii) $A_\infty = (0)$, *c'est-à-dire* $L_\infty = K_\infty$,

(iii) *pour tout entier* n , $\mathrm{Cl}_S(K_n) = (0)$,

(iv) *pour tous entiers* m *et* n , $V_m(K_n) = (0)$.

Preuve. - $A_\infty = 0 \iff A_\infty(1) = 0 \iff A_\infty(1)^\Gamma = 0$ (car A_∞ est une limite inductive de p-groupes, et Γ est un pro-p-groupe). Le reste de la démonstration est immédiat, compte tenu des suites exactes (1), (2) et du lemme 1.

Q. E. D.

COROLLAIRE 2 (comparer à [9], proposition 11, et rapprocher des critères de nullité du nombre de classes). - *Supposons* $\mu_p \subset k^x$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $T_k = (0)$,

(ii) $|\Sigma| = 1$ et $A_\infty = (0)$,

(iii) $|\Sigma| = 1$ et $\mathrm{Cl}_S(k) = 0$,

(iv) *le pro-p-groupe* G_k *est libre*,

(v) $T_L = (0)$ *pour toute extension finie* L/k *contenue dans* k_S .

Preuve. - C'est immédiat, compte tenu des suites exactes (1) et (2). L'implication (i) ==> (v) résulte du fait que tout sous-groupe fermé d'une pro-p-groupe libre est libre

Q. E. D.

PROPOSITION 1 :

Soit L/k *une extension galoisienne finie contenue dans* $k(p)$, *de groupe de Galois* G . *Supposons que* L (*donc aussi* k) *vérifie la conjecture de Leopoldt. Alors l'isomorphisme de transfert* $X_k \longrightarrow X_L$ *induit un isomorphisme* $T_k \xrightarrow{\sim} (T_L)^G$

Preuve. - On sait que $\mathrm{cd}\, G_k \leqslant 2$, donc aussi $\mathrm{cd}\, G_L \leqslant 2$. Soit D le module dualisant de G_k ; c'est aussi le module dualisant de G_L , puisque G_L est d'indice fini dans G_k ([11], I-29). Par définition du module dualisant, on a des isomorphismes fonctoriels

$$H^2(G_k\ ,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \simeq \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}\ ,\ D)^{G_k} \quad \text{et} \quad H^2(G_L\ ,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \simeq \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}\ ,\ D)^{G_L} .$$

Mais l'hypothèse de Leopoldt entraîne que

$$H^2(G_k\ ,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \simeq T_k \quad \text{et} \quad H^2(G_L\ ,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \simeq T_L \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

La proposition en résulte.

Q. E. D.

Remarque. - L'hypothèse de S-ramification imposée à l'extension L/k *n'est pas une hypothèse restrictive.* Si elle n'est pas vérifiée, il n'y a qu'à considérer l'ensemble fini de places $\mathcal{S}$, formé de S et des places de k qui se ramifient dans L/k / La relation entre G_k^S et $G_k^{\mathcal{S}}$ est donnée par le théorème d'Olaf NEUMANN ([2], p. 625-647), qui est l'analogue pour les corps de nombres du théorème d'existence de Riemann.

"Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_{\mathcal{S}}(p)/k_S(p))$ est un pro-p-produit libre $*_{v \in \mathcal{S}-\Sigma} I(v)$ où $I(v)$ est le sous-groupe engendré par les groupes d'inertie I_w , $w|v$. Le groupe d'inertie I_w est isomorphe à $\underset{\sim}{Z}_p$ si $Nv \equiv 1 \pmod p$, et trivial sinon".

En utilisant ce théorème et la proposition 1, on retrouve sans difficulté un certain nombre de résultats de G. GRAS [4] reliant les groupes T_k et $(T_L)^G$. Nous n'entrons pas dans les détails.

Pour finir, énonçons un résultat sur les modules d'Iwasawa, qui s'obtient par passage à la limite sur la suite exacte (1).

PROPOSITION 2. - *Supposons que* k *contient* μ_p *et que la conjecture de Leopoldt soit vérifiée à tous les étages de la tour cyclotomique* K_∞/k . *Soit* Y_∞ *le groupe de Galois sur* K_∞ *de la pro-p-extension abélienne S-ramifiée de* K_∞ , *considéré*

comme module sur $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$.

On a une suite quasi exacte de Λ-modules.

$$0 \longrightarrow T(\mu_{p^\infty}) \longrightarrow \prod_{v \in \Sigma} T(\mu_{p^\infty}) \longrightarrow \mathrm{tor}_\Lambda Y_\infty \longrightarrow \alpha(X_\infty(-1)) \longrightarrow 0 ,$$

où $T(.)$ désigne le module de Tate et $\alpha(.)$ l'adjoint.

Notons qu'on trouve chez IWASAWA ([6], théorèmes 15 et 16) une suite exacte analogue, mais qui va en sens inverse (phénomène de dualité ?). On peut également obtenir des formules asymptotiques donnant l'ordre des T_{k_n} dans la tour cyclotomique. Nous n'entrons pas dans les détails.

2. T_k et fonctions p-adiques.

Dans toute cette section, on suppose que k est totalement réel. On suppose en outre que $p \neq 2$ et que Σ est l'ensemble des places de k divisant p . Alors $K = k(\mu_p)$ est un corps CM , et le groupe de Galois G_∞ de $K_\infty = k(\mu_{p^\infty})$ sur k se décompose : $G_\infty = \Gamma \times \Delta$, avec $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ et $\Delta = \mathrm{Gal}(K/k)$ (p d'ordre premier à p). On note e_i les idempotents orthogonaux habituels de l'algèbre $\mathbb{Z}_p[\Delta]$. On introduit alors une fonction p-adique qui joue un rôle important dans la théorie d'Iwasawa.

Soit Z_∞ le groupe de Galois de la pro-p-extension abélienne non ramifiée maximale de K_∞ , et soit $B_\infty = Z_\infty^*$ son dual de Pontrjagin. Soit $g_i(T)$ la série caractéristique du Λ-module $\mathrm{Hom}(e_i B_\infty , \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (i impair) et soit la nouvelle série $G_i(T) = g_i((1+T)^{-1} - 1)$ (i impair). Fixons un générateur topologique γ de Γ, et posons $u = \chi(\gamma)$, où χ est le caractère décrivant l'action de Γ sur μ_{p^∞} (remarquons que $u \in 1 + p\mathbb{Z}_p$). Nous appelons alors $Z_p(s)$ la fonction p-adique définie par : $s \in \mathbb{Z}_p \longmapsto G_1(u^s - 1)/(u^s - u)$.

THEOREME 2. - Supposons que le corps réel k vérifie la conjecture de Leopoldt. Alors $G_1(u-1) \sim \# T_k$ (le signe $\sim$ signifie l'égalité à une unité p-adique près).

Preuve. - Il suffit d'appliquer le théorème 1 et de calculer l'ordre de $(X_\infty^*(1))^{G_\infty}$

$$(X_\infty^*(1))^{G_\infty} = (X_\infty^*(1)^\Delta)^\Gamma = ((e_1 X_\infty)(-1)^*)^\Gamma = (e_1 X_\infty(-1)_\Gamma)^* .$$

Mais il est connu que $(e_i X_\infty)(-i)$ n'a pas de sous-module fini non nul pour i impair. Comme $(e_1 X_\infty)(-1)_\Gamma$ est fini (par l'hypothèse de Leopoldt), un lemme classique ([2], COATES, App. p. 338-351) montre que $e_1 X_\infty(-1)^\Gamma$ est nul et que l'ordre de $e_1 X_\infty(-1)_\Gamma$ est égal à $f_1(u^{-1} - 1)$ à une unité p-adique près ($f_1(T)$ est la série caractéristique de $e_1 X_\infty$). Or il est facile de relier $f_1(u^{-1} - 1)$ et $g_1(u^{-1} - 1)$. En utilisant par exemple [6], théorème 9, on a

$$g_1(u^{-1} - 1) \sim \prod_{v|p} \# \mu(k_v) . f_1(u^{-1} - 1)$$

Q. E. D.

COROLLAIRE ([2], théorème 1.3). - Le résidu de $Z_p(s)$ en $s = 1$ est égal à une unité p-adique près, à $\rho_p = (2^{d-1} \, h \, R_p / \sqrt{\Delta}) \prod_{v|p} (1 - (\mathbb{N}v)^{-1})$, où $d = [k : \mathbb{Q}]$, Δ est la valeur absolue du discriminant, h le nombre de classes, R_p le régulateur p-adique.

Preuve. - La valeur de $\# T_k$ a été calculée par COATES dans [2] (App. p. 338-351). On a $\# T_k = \# \mu(k(\mu_p)) . \rho_p$. Dans la formule finale donnant le résidu, la quantité $\# \mu(k(\mu_p))$ disparaît, car le développement limité de $u^s - u$ commence par $(s - 1) u \log u$.

Q. E. D.

Remarques.

(i) Si k est abélien réel, on sait que k vérifie la conjecture de Leopoldt et que $\operatorname{res}_{s=1} \zeta_p(s) = \rho_p$ [2]. C'est une indication en faveur de la "conjecture principale" de la théorie d'Iwasawa (voir [2]).

(ii) Si l'on considère le corps CMK, les mêmes calculs que précédemment permettent d'exprimer l'ordre de T_K^- (le sous-groupe des éléments de torsion renversés par la conjugaison complexe) comme étant la valeur en $s = 1$ d'une fonction d'Iwasawa. Les résultats de G. GRAS ([4], théorème 4.2) donnent alors une "formule analytique" pour le nombre de classes h_K^-. Nous n'entrons pas dans les détails.

3. Relations avec K_2.

Dans cette section, nous supposons que $\mu_p \subset k^x$ et nous prenons pour Σ l'ensemble des places de k divisant p. La relation entre la p-ramification et la K--théorie est exprimée par un certain nombre de propriétés de dualité, dont notamment la "mauvaise dualité" (CARROLL-CANDIOTTI-KRAMER, voir [7]) entre T_k et $R_2 \, k[p]$, la partie p-primaire du "noyau modéré" (pour une définition, voir [7]). Nous nous proposons d'éclaircir cette dualité.

PROPOSITION 3. - Supposons que $\mu_{p^n} \subset k^x$. Alors

$$H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})(2) \simeq R_2 \, k/p^n \, R_2 \, k .$$

Autrement dit, on a une dualité parfaite.

$$H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \times R_2 \, k/p^n \, R_2 \, k \, (-1) \longrightarrow \mu_{p^n} .$$

Preuve. - On a la suite exacte bien connue en K-théorie

$$0 \longrightarrow (Cl_S(k)/p^n)(1) \longrightarrow R_2 \, k/p^n \longrightarrow \prod_{v \in \Sigma} \mu(k_v)/p^n \longrightarrow \mu(k)/p^n \longrightarrow 0$$

(cette suite exacte est démontrée pour l'exposant p dans [7], § 2, mais la démonstration est la même pour l'exposant p^n). D'un autre côté, on a la suite exacte de localisation (voir démonstration du théorème (1)),

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}_S^2(\underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_k\,,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} H^2(\mathcal{O}_v\,,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_k\,,\ \mu_{p^n})^* \longrightarrow 0$$

Or $H^2(\mathcal{O}_v\,,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}) \simeq \mu_{p^n}(k_v)^*$ d'après la théorie locale, et $\mathrm{Ker}_S^2(\underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})$ est dual de $\mathrm{Ker}_S^1(\mu_{p^n}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}_S(k)\,,\ \mu_{p^n})$, d'après POITOU-TATE. Il en résulte immédiatement la dualité cherchée $H^2(G_k\,,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \times R_2\, k/p^n\, R_2\, k \longrightarrow \mu_{p^n}$.

COROLLAIRE 1 ([7], théorème (2.1)). - Si k vérifie la conjecture de Leopoldt, on a une dualité parfaite.

$$T_k(p^n) \times R_2\, k/p^n\, R_2\, k(-1) \longrightarrow \mu_{p^n}\ ,$$

où $T_k(p^n)$ est le sous-groupe des éléments de p^n-torsion.

Preuve. - Si k vérifie la conjecture de Leopoldt, $T_k(p^n) = H^2(G_k\,,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^*$ (voir la démonstration du théorème 1)

Q. E. D.

En passant à la limite dans la tour cyclotomoqie de k , on retrouve un résultat de dualité de COATES ([1], théorème 4).

COROLLAIRE 2 (on ne suppose pas que k vérifie la conjecture de Leopoldt). - On a une dualité parfaite de Γ-modules

$$\mathrm{tor}_\Lambda\, Y_\infty \times R_2\, K_\infty[p](-1) \longrightarrow \mu_{p^\infty}\ ,$$

(Rappelons que Y_∞ est le groupe de Galois sur K_∞ de la pro-p-extension S-ramifiée abélienne maximale de K_∞).

Preuve. - Soit (K_m) la tour habituelle des sous-extensions finies de K_∞/k . On sait que la $\underset{\sim}{Z}_p$-extension cyclotomique K_∞/k vérifie la conjecture faible de Leopoldt, c'est-à-dire que les défauts de la conjecture de Leopoldt pour les K_m sont bornés (voir [10]). On en déduit facilement que

$$\varinjlim_{m,\mathrm{res}}{}^{*}\ \varprojlim_n H^2(G_k\,,\ \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \simeq \varprojlim_m \varprojlim_n T_k(p^n) \simeq \mathrm{tor}_\Lambda\, Y_\infty\ .$$

Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COATES (John). - On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory, Annals of Math., Series 2, t. 95, 1972, p. 99-116.

[2] FRÖHLICH (A.) (editor). - Algebraic number fields (L-functions and Galois properties), Proceedings of a symposium organised by the London mathematical Society [1975. Durham]. - London, New York, San Francisco, Academic Press, 1977.

[3] GILLARD (Roland). - Formulations de la conjecture de Leopoldt et étude d'une condition suffisante, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, t. 48, 1979, p. 125-138.

[4] GRAS (Georges). - Groupe de Galois de la p-extension abélienne p-ramifiée maximale d'un corps de nombres, J. für reine und angew. Math., t. 333, 1982, p. 86-132.

[5] HABERLAND (Klaus). - Galois cohomology of algebraic number fields. - Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.

[6] IWASAWA (Kenkichi). - On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, Annals of Math., Series 2, t. 98, 1973, p. 246-326.

[7] KRAMER (Kenneth) and CANDIOTTI (Alan). - On K_2 and $\mathbb{Z}_p$-extensions of number fields, Amer. J. of Math., t. 100, 1978, p. 177-196.

[8] MIKI (Hiroo). - On the maximal abelian ℓ-extension of a finite algebraic number field with given ramification, Nagoya math. J., t. 70, 1978, p. 183-202.

[9] NGUYEN-QUANG-DO (Thong). - Sur la structure galoisienne des corps locaux et la théorie d'Iwasawa, Comp. Math., Gröningen (à paraître).

[10] NGUYEN-QUANG-DO (Thong). - Formations de classes et modules d'Iwasawa (à paraître).

[11] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie galoisienne, 2e édition. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1964 (Lecture Notes in Mathematics, 5).