Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Francesco Baldassarri

Cohomologie p-adique pour la fonction ${}_3F_2\left(\begin{smallmatrix} a,b_1,b_2 \\ c_1,c_2 \end{smallmatrix};\lambda\right)$

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 10, nº 2 (1982-1983), exp. nº 16, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1982-1983__10_2_A2_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE G. CHRISTOL, P. ROBBA)
10e année, 1982/83, n° 16, 15 p.

25 avril 1983

COHOMOLOGIE p-ADIQUE POUR LA FONCTION ${}_3F_2(\begin{smallmatrix} a, b_1, b_2 \\ c_1, c_2 \end{smallmatrix};\lambda)$

par Francesco BALDASSARRI (*)

Cet exposé contient les résultats principaux sur la structure cohomologique (algébrique et p-adique) de la fonction hypergéométrique généralisée ${}_3F_2(\begin{smallmatrix} a, b_1, b_2 \\ c_1, c_2 \end{smallmatrix};\lambda)$; les démonstrations paraîtront ailleurs. La construction cohomologique, présentée ici, avait été esquissée par DWORK dans une lettre à SPERBER du 16 février 1982.

L'auteur espère que ce papier pourra aider à rendre plus claires certaines des idées contenues dans le livre de DWORK [1], tout en fournissant un nouvel exemple d'application de leur philosophie.

1. - Nous commençons par rappeler au lecteur la définition de la série hypergéométrique généralisée :

$$(1.0) \qquad {}_3F_2(\begin{smallmatrix} a, b_1, b_2 \\ c_1, c_2 \end{smallmatrix};\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b_1)_i (b_2)_i}{(c_1)_i (c_2)_i \, i!} \lambda^i$$

où a, b_1, b_2, c_1, c_2 sont dans un corps de caractéristique 0 et $(a)_i = a(a+1) \dots (a+i-1)$.

La construction cohomologique, que l'on présente ici, découle de la formule intégrale classique

$$(1.1) \quad {}_3F_2(\begin{smallmatrix} a, b_1, b_2 \\ c_1, c_2 \end{smallmatrix};\lambda) = \mathrm{Cte} \int x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1} \, {}_2F_1(\begin{smallmatrix} a, b_2 \\ c_2 \end{smallmatrix};x\lambda)\, dx ,$$

ou, encore mieux, du fait que, si $F(t)$ est une solution de l'opérateur hypergéométrique de Gauss $(E_t = t\frac{d}{dt})$

$$L_{a,b_2,c_2} = E_t(E_t + c_2 - 1) - t(E_t + a)(E_t + b_2) ,$$

la formule intégrale

$$\int x^{b_1-1} (1-x)^{c_1-b_1-1} F(x\lambda)\, dx$$

définit une solution de l'opérateur

$$L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = E_\lambda(E_\lambda + c_1 - 1)(E_\lambda + c_2 - 1) - \lambda(E_\lambda + a)(E_\lambda + b_1)(E_\lambda + b_2)$$

qui est justement celui qui tue ${}_3F_2(\begin{smallmatrix} a, b_1, b_2 \\ c_1, c_2 \end{smallmatrix};\lambda)$.

(*) Francesco BALDASSARRI, Seminario Matematico, Università di Padova, 7 Via Belzoni, I-35100 PADOVA (Italie).

L'analogue algébrique de (1.1) s'obtient de la façon suivante. Soient a , b_1 , b_2 , c_1 , $c_2 \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p \cap (0\ 1]$, où $\{a , b_1 , b_2\} \cap \{c_1 , c_2\} \neq \emptyset$, $1 \notin \{a , b_1 , b_2\}$, et soient $\mathcal{Q}_t = \mathbb{Q}[t , \frac{1}{t(1-t)}]$, $\mathcal{L} = \mathbb{Q}[\lambda, x, \frac{1}{\lambda(1-\lambda)x(1-x)(1-x\lambda)}]$ et $\rho : \mathcal{Q}_t \longrightarrow \mathcal{L}$, $\rho(t) = x\lambda$, homomorphisme d'anneaux.

Si M_t est un $\mathcal{Q}_t/\mathbb{Q}$-module différentiel, on notera $M_{x,\lambda}$ le $\mathcal{L}/\mathcal{Q}$-module différentiel

$$\mathcal{L} \underset{\rho}{\longleftarrow} \otimes_{\mathcal{Q}_t} \qquad M_t$$

et, si $m(t) \in M_t$, on posera

$$m(x\lambda) = 1 \otimes m(t) \in M_{x\lambda} .$$

Rappelons en particulier que le $\mathcal{Q}_t/\mathbb{Q}$-module différentiel $W_{a,b,c;t}$ associé à ${}_2F_1(\begin{smallmatrix}a,b\\c\end{smallmatrix};t)$ possède une $\mathcal{Q}_t$-base

$$\underset{\sim}{\omega}(t) = \begin{pmatrix}\omega_{a,b,c+1}(t)\\ \omega_{a,b,c}(t)\end{pmatrix}$$

telle que (en sous entendant le symbole $\nabla_{a,b,c}$ de dérivée covariante) $E_t\ \underset{\sim}{\omega}(t) = {}^tG_{a,b,c}(t)\ \underset{\sim}{\omega}(t)$, où

$$(1.2) \qquad G_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} -c & (c-a)(\frac{1}{1-t} - 1) \\ c-b & (a+b-c)(\frac{1}{1-t} - 1)\end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $L_{a,b,c}\ \omega_{a,b,c} = 0$.

Soit encore $W_{b,c;x}$ le $\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda$-module différentiel de $\mathcal{L}$-base $\zeta(x) = \zeta_{b,c}(x)$, telle que

$$E_x\ \zeta(x) = (c + \frac{b-c}{1-x})\ \zeta(x) .$$

Soit $\Omega_a = \Omega_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = W_{b_1,c_1;x} \otimes_{\mathcal{L}} W_{a,b_2,c_2;x\lambda}$ (produit tensoriel de $\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda$-modules différentiels) ; Ω_a est un $\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda$-module différentiel de base :

$$\eta = \begin{pmatrix}\zeta_{b_1,c_1}(x) \otimes \omega_{a,b_2,c_2+1}(x\lambda)\\ \zeta_{b_1,c_1}(x) \otimes \omega_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\end{pmatrix}$$

satisfaisant

$$E_x\ \eta = (c_1 + \frac{b_1 - c_1}{1-x} + {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda))\ \eta .$$

On a donc une $\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda$-connexion

$$\nabla_{a,x} : \Omega_a \longrightarrow \Omega_a \otimes_{\mathcal{L}} \Omega^1_{\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda}$$

$$\eta \longmapsto \left(c_1 + \frac{b_1 - c_1}{1 - x} + {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\right) \eta \otimes \frac{dx}{x} .$$

Posons $W_a = W_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = \Omega_a \otimes \Omega^1_{\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda} / \nabla_{a,x} \Omega_a$.

On voit bien que, en écrivant en colonne les éléments de $\mathcal{L}^2$, on a des isomorphismes :

$$\mathcal{L}^2 \xrightarrow{\sim} \Omega_a$$

$$\xi \longmapsto {}^t\xi\eta$$

$$\mathcal{L}^2 \longrightarrow \Omega_a \otimes \Omega^1_{\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda}$$

$$\xi \longmapsto {}^t\xi\eta \otimes \frac{dx}{x}$$

et que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^2 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "D_a"'] & \Omega_a \arrow[d, "\nabla_{a,x}"] \\
\mathcal{L}^2 \arrow[r, "\sim"] & \Omega_a \otimes \Omega^1_{\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda}
\end{tikzcd}$$

est commutatif si l'on définit

$$D_a = D_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = x \frac{\partial}{\partial x} + c_1 + \frac{b_1 - c_1}{1 - x} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda) .$$

On en déduit que $W_a \simeq \mathcal{L}^2/D_a \mathcal{L}^2$. Or, W_a admet une structure naturelle de $\mathcal{Q}_\lambda/\mathcal{Q}$-module différentiel ; en termes de $\mathcal{L}^2$, il suffit de remarquer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^2 \arrow[r, "\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda)"] \arrow[d, "D_a"'] & \mathcal{L}^2 \arrow[d, "D_a"] \\
\mathcal{L}^2 \arrow[r, "\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda)"] & \mathcal{L}^2
\end{tikzcd}$$

est commutatif, de sorte que l'on peut définir, pour $[\xi]$ = classe de $\xi \in \mathcal{L}^2$ modulo $D_a \mathcal{L}^2$ $(\nabla_a = \nabla_{a,b_1,b_2,c_1,c_2})$,

$$E_\lambda[\xi] = \nabla_a(E_\lambda)[\xi] = \left[\lambda \frac{\partial\xi}{\partial\lambda} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\ \xi\right] .$$

La formule intégrale (1.1) signifie simplement que

$$L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}\left[\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}\right]=0 .$$

On peut démontrer que

$$\left([\binom{1}{0}],\ [\binom{0}{1}],\ \left[\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x\lambda}\end{pmatrix}\right]\right)$$

est une $\mathcal{Q}_\lambda$-base de W_a , notons-la

$$e_a = (e_a^{(1)}\ ,\ e_a^{(2)}\ ,\ e_a^{(3)}\ ,\ e_a^{(4)}) .$$

On voit directement que le sous-$\mathcal{Q}_\lambda$-module de W_a , engendré par $e_a^1 = (e_a^{(1)}\ ,\ e_a^{(2)}\ ,\ e_a^{(3)})$ (notons-le V_a), est stable pour l'action de $\nabla_a(E_\lambda)$. Ainsi V_a est le $\mathcal{Q}_\lambda/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel associé à $L_a = L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$, dans le sens que $L_a\, e_a^{(3)} = 0$ et que V_a est engendré par $e_a^{(3)}$ en tant que $\mathcal{Q}_\lambda/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel.

On a $\nabla_a(E_\lambda)\, e_a^1 = M_a\, e_a^1$, où

$$M_a = \begin{pmatrix} -c_2 & c_2-b_2 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_1-b_1 \\ \frac{(a-c_2)(b_1-c_2)}{b_1-c_1}\frac{\lambda}{1-\lambda} & \left[\frac{(a-c_2)(c_2-b_2)}{b_1-c_1}+c_1-c_2-a-b_2\right]\frac{\lambda}{1-\lambda} & (a+b_1+b_2-c_1-c_2)\frac{\lambda}{1-\lambda} \end{pmatrix} .$$

On verra ensuite une démonstration "raisonnée" du fait que V_a est sous-$\mathcal{Q}_\lambda/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel de W_a .

2. - Rappelons en bref l'appareil cohomologique crée car DWORK pour ${}_2F_1(\begin{smallmatrix}a,b\\ c\end{smallmatrix};\lambda)$, et abrégeons $(a\ ,\ b\ ,\ c)$ par a , $(1-a\ ,\ 1-b\ ,\ 1-c)$ par $1-a$, pour $a\ ,\ b\ ,\ c \in \underset{\sim}{Q} \cap \underset{\sim}{Z}_p \cap (0\ 1]$, $a\ ,\ b \neq 1$, $a \neq c \neq b$. Dorénavant, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\lambda$. Donc W_a a une $\mathcal{Q}$-base $\underset{\sim}{\omega}_a$ et $\nabla_a(E_\lambda)\,\omega_a = {}^tG_a(\lambda)\,\underset{\sim}{\omega}_a$.

Le $\mathcal{Q}/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel dual de W_a sera noté K_a ; pour la base duale ω_a^* de $\underset{\sim}{\omega}_a$, on aura

$$\nabla_a^*(E_\lambda)\,\underset{\sim}{\omega}_a^* = -\,G_a(\lambda)\,\underset{\sim}{\omega}_a^* .$$

Il existe un isomorphisme de $\mathcal{Q}/\underset{\sim}{Q}$-modules différentiels,

$$\hat{D}_a : K_a \longrightarrow W_{1-a}$$

$$\omega_a^* \longmapsto \Delta_a(\lambda)\,\underset{\sim}{\omega}_{1-a}$$

où

$$\Delta_a(\lambda) = \Delta_{a,b,c}(\lambda) = \begin{pmatrix} (a-c)\lambda & 0 \\ 0 & (b-c)(1-\lambda) \end{pmatrix} .$$

On a donc

$$G_a \Delta_a + \Delta_a {}^tG_{1-a} + E_\lambda(\Delta_a) = 0 . \tag{2.1}$$

Puisque $\Delta_{1-a} = -\Delta_a$, on a aussi :

$$G_{1-a} \Delta_a + \Delta_a {}^tG_a + E_\lambda(\Delta_a) = 0 . \tag{2.1'}$$

Soit maintenant Ω le domaine universel p-adique. Les $\mathcal{O}$-modules W_a et K_a déterminent deux fibrés vectoriels triviaux sur $\Omega \setminus \{0 , 1\}$ duaux entre eux, $\underset{\sim}{W}_a$ et $\underset{\sim}{K}_a$, munis des connexions duales. Notons encore $\underset{\sim}{\omega}_a$ et $\underset{\sim}{\omega}_a^*$ les bases globales de $\underset{\sim}{W}_a$ et $\underset{\sim}{K}_a$. Pour tout $\lambda \in \Omega \setminus \{0 , 1\}$, on a les fibres $W_{a,\lambda}$ et $K_{a,\lambda}$ avec les Ω-bases $\omega_{a,\lambda}$, $\omega^*_{a,\lambda}$. Le transport parallèle

$$T_{a;z,\lambda} : K_{a,z} \longrightarrow K_{a,\lambda}$$

$$\underset{\sim}{\omega}^*_{a,z} \longmapsto U_{a,z}(\lambda)\, \underset{\sim}{\omega}^*_{a,\lambda}$$

est défini pour $|\lambda - z| < |z| \min(1 , |z-1|)$, et il est analytique dans une telle région (c'est-à-dire que sa matrice $U_{a,z}(\lambda)$ est analytique pour $|\lambda - z| < |z| \min(1 , |z-1|)$).

Bien sûr, $U_{a,z}(\lambda)$ est alors la solution du système $E_\lambda Y = Y G_a(\lambda)$ près de $\lambda = z$, qui vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $\lambda = z$.

Si $\alpha \in \underset{\sim}{Q} \cap \underset{\sim}{Z}_p \cap (0 , 1]$, soit $\alpha' \in \underset{\sim}{Q} \cap \underset{\sim}{Z}_p \cap (0 , 1]$ tel que

$$p\alpha' - \alpha = \mu_\alpha \in \{0 , 1 , \dots , p-1\} .$$

Soit $\mathcal{U} = \{\lambda \in \Omega , \ \lambda \neq 0 , \ |\lambda - 1| > p^{-1/(p-1)}\}$ et $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$, $\Phi(\lambda) = \lambda^p$. On peut définir des morphismes horizontaux, duaux centre eux :

$$\underset{\sim}{\alpha}_a : \underset{\sim}{W}_a|\mathcal{U} \longrightarrow \Phi^* \underset{\sim}{W}_{a'}|\mathcal{U}$$

$$\underset{\sim}{\alpha}^*_a : \Phi^* \underset{\sim}{K}_{a'}|\mathcal{U} \longrightarrow \underset{\sim}{K}_a|\mathcal{U}$$

Pour tout $\lambda \in \mathcal{U}$, on a donc :

$$\alpha_{a,\lambda} : W_{a,\lambda} \longrightarrow W_{a',\lambda^p}$$

$$\alpha^*_{a,\lambda} : K_{a',\lambda^p} \longrightarrow K_{a,\lambda} ,$$

Ω-isomorphismes duaux tels que $\alpha^*_{a,\lambda}\,\omega^*_{a',\lambda^p} = A_a(\lambda)\,\omega^*_{a,\lambda}$, avec $A_a(\lambda)$ matrice analytique dans $\mathcal{U}$, et un pôle à l'infini et holomorphe à 0 .

En fait, $A_a(\lambda) \in M_{2,2}(\mathcal{Q}'_0)$, où $\mathcal{Q}'_0$ = complétion dans la norme de Gauss $|\ |_{Gauss}$, de $\mathcal{Q}_0 = \{\xi \in \mathcal{Q}\ ;\ |\xi|_{Gauss} \leqslant 1\}$, et $A_a(\lambda)$ est effectivement calculable modulo $p\,\mathcal{Q}'_0$, sous certaines hypothèses sur a , b , c . De plus, le diagramme (où $z \in \mathcal{Q}$, $|\lambda - z| < |z| \min(1\ ,\ |z-1|)$)

$$\begin{tikzcd}
K_{a,z} \arrow[r, dashed, "T_{a;z,\lambda}"] \arrow[d, dash, "\alpha^*_{a,z}"'] & K_{a,\lambda} \arrow[d, dash, "\alpha^*_{a,\lambda}"] \\
K_{a',z^p} \arrow[r, dashed, "T_{a';z^p,\lambda^p}"] & K_{a',\lambda^p}
\end{tikzcd}$$

est commutatif, d'où

$$U_{a',z^p}(\lambda^p)\,A_a(\lambda) = A_a(z)\,U_{a,z}(\lambda)\ . \tag{2.2}$$

En dérivant, on obtient :

$$E_\lambda(A_a(\lambda)) = A_a(\lambda)\,G_a(\lambda) - p\,G_{a'}(\lambda)^p\,A_a(\lambda)\ . \tag{2.2'}$$

On a encore le diagramme commutatif (pour $\lambda \in \mathcal{U}$)

$$\begin{tikzcd}
K_{a,\lambda} \arrow[r, dashed, "\hat{D}_{a,\lambda}"] \arrow[d, dash, "\alpha^*_{a',\lambda}"'] & W_{1-a,\lambda} \arrow[d, "\alpha_{1-a,\lambda}"] \\
K_{a',\lambda^p} \arrow[r, dashed, "p\hat{D}_{a',\lambda^p}"] & W_{1-a',\lambda^p}
\end{tikzcd}$$

qui donne

$$A_a(\lambda)\,\Delta_a(\lambda)\,{}^tA_{1-a}(\lambda) = p\,\Delta_{a'}(\lambda^p) \tag{2.3}$$

et

$$A_{1-a}(\lambda)\,\Delta_a(\lambda)\,{}^tA_a(\lambda) = p\,\Delta_{a'}(\lambda^p)\ ; \tag{2.3'}$$

finalement on a un dernier diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_{a,\lambda} \arrow[r, dashed, "\hat{D}_{a,\lambda}"] & W_{1-a,\lambda} \\
K_{a,z} \arrow[r, dashed, "\hat{D}_{a,z}"] \arrow[u, "T_{a;z,\lambda}"] & W_{1-a,z} \arrow[u, "T^*_{1-a;\lambda,z}"']
\end{tikzcd}$$

(ici $T^*_{1-a;\lambda,z}$ est l'application transposée de $T_{1-a;\lambda,z} : K_{1-a,\lambda} \longrightarrow K_{1-a,z}$) d'où :

$$U_{a,z}(\lambda)\ \Delta_a(\lambda)\ {}^tU_{1-a,z}(\lambda) = \Delta_a(z) \tag{2.4}$$

et

$$U_{1-a,z}(\lambda)\ \Delta_a(\lambda)\ {}^tU_{a,z}(\lambda) = \Delta_a(z)\ . \tag{2.4'}$$

On sait comment une formule du genre de (2.2) peut servir à déterminer la croissance p-adique de $U_{a,z}(\lambda)$ pour $|\lambda - z| \uparrow |z| \min(1\ ,\ |z-1|)$, dès qu'on a une connaissance suffisante, du point de vue de la similitude semi-linéaire (théorie de DIEUDONNÉ), de $A_a(\lambda)$. On veut donc construire une théorie similaire pour ${}_3F_2$ en utilisant la formule (1.1) et les propriétés qu'on vient d'énoncer de ${}_2F_1$. En fait, le procédé est tout à fait semblable à celui utilisé par DWORK pour construire la théorie relative à ${}_2F_1(\begin{smallmatrix}a,b\\c\end{smallmatrix};\lambda)$, en partant de celle, élémentaire, de ${}_1F_0(a\ ;\ \lambda) = (1-\lambda)^{-a}$, puisque

$${}_2F_1(\begin{smallmatrix}a\ ,\ b\\c\end{smallmatrix}\ ;\ \lambda) = \mathrm{Cte} \int x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}\ (1-x\lambda)^{-a}\ dx\ .$$

Il est possible de construire inductivement une théorie cohomologique pour ${}_{n+1}F_n$, en utilisant la formule :

$${}_{n+1}F_n(\begin{smallmatrix}a,b_1,\dots,b_n\\c_1,\dots,c_n\end{smallmatrix};\lambda) = \mathrm{Cte} \int x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1}\ {}_nF_{n-1}(\begin{smallmatrix}a,b_2,\dots,b_n\\c_2,\dots,c_n\end{smallmatrix};x\lambda)\ dx\ .$$

3. - Soit $S = \{0\ ,\ 1\ ,\ 1/\lambda\ ,\ \infty\}$, $T_0 = x$, $T_1 = 1-x$, $T_{1/\lambda} = 1 - x\lambda$, $T_\infty = 1/x$, et, pour $\nu \in S$, soit $R'_\nu = \mathcal{Q}((T_\nu))$ (séries formelles à queue négative finie) et $R_\nu = \mathcal{Q}[[T_\nu]]$, si $\nu \neq \infty$, $R_\infty = T_\infty\ \mathcal{Q}[[T_\infty]]$.

Considérons le plongement diagonal

$$\mathcal{E} \hookrightarrow R' = \oplus_{\nu\in S} R'_\nu$$

et soit $\gamma_+ : R' \longrightarrow \mathcal{E}$,

$$\gamma_+((\xi_\nu)_{\nu\in S}) = \textstyle\sum_{\nu\in S} P_\nu(\xi_\nu)\ ,$$

où P_ν note la partie principale à ν . On a donc aussi :

$$\gamma_- : R' \longrightarrow R = \oplus_{\nu\in S} R_\nu\ ,$$

$$\gamma_- = \mathrm{id}_{R'} - \gamma_+\ .$$

Or, il existe une forme $\mathcal{Q}$-bilinéaire : $\langle\ ,\ \rangle : R' \times R' \longrightarrow \mathcal{Q}$,

$$\langle (\xi_\nu)_{\nu\in S} , (\eta_\nu)_{\nu\in S}\rangle = \sum_{\nu\in S} \mathrm{Res}_\nu(\xi_\nu \eta_\nu) ,$$

qui introduit une forme $\mathcal{Q}$-bilinéaire $\langle \ , \ \rangle$ sur $R \times \mathcal{E}$ à noyaux à gauche et à droite nuls, telle que tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{E} , \mathcal{Q})$ soit de la forme $\eta \mapsto \langle \xi , \eta\rangle$, pour un ξ convenable dans R . On en déduit une forme $\mathcal{Q}$-bilinéaire :

$$\langle \ , \ \rangle : R^2 \times \mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\right) \longmapsto \langle \xi_1 , \eta_1\rangle + \langle \xi_2 , \eta_2\rangle .$$

On calcule facilement le transposé de $D_a : \mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathcal{E}^2$; c'est

$$D_a^* = - \gamma_-\left(x \frac{\partial}{\partial x} + 1 - {}^tG_a(x , \lambda) - c_1 - \frac{b_1 - c_1}{1 - x}\right) = - \gamma_- \Delta_a^{-1}(x\lambda) D_{1-a} \Delta_a(x\lambda) ,$$

grâce à (2.1)'. Soit

$$K_a = \mathrm{Ker}_{R^2} D_a^* = \{(\xi_\nu)_{\nu\in S} \in R^2 ; D_a^*((\xi_\nu)_{\nu\in S}) = 0\} .$$

On vérifie que $(\xi_\nu)_{\nu\in S} = \xi$, $\xi_\nu \in R_\nu^2$, est dans K_a si, et seulement si, pour tout $\nu \in S$, on a :

$$(3.0) \quad D_{1-a} \Delta_a \xi_\nu = [(c_1-c_2) \langle \xi , \binom{1}{0}\rangle + (c_2-b_2) \langle \xi , \binom{0}{1}\rangle] (a-c_2) \lambda \binom{1}{0}$$

$$+ (b_2-c_2) [(c_2-a) \langle \xi , \binom{1}{0}\rangle + (a+b_2-c_1-c_2) \langle \xi , \binom{0}{1}\rangle] \lambda \binom{0}{1}$$

$$+ (b_1-c_1)(a-c_2) \langle \xi , \begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\ 0\end{pmatrix}\rangle \lambda \begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\ 0\end{pmatrix} + (b_1-c_1)(b_2-c_2) \langle \xi , \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}\rangle (1-\lambda) \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix} .$$

Un calcul explicite montre que K_a a alors la dimension 4 sur $\mathcal{Q}$ et donc que $\langle \ , \ \rangle$ induit une $\mathcal{Q}$-dualité entre $W_a = \mathcal{E}^2/D_a \mathcal{E}^2$ et $K_a = \mathrm{Ker}_{R^2} D_a^*$. De plus, si $\xi \in V_a^\perp$ = l'orthogonal de V_a dans K_a , on a

$$\langle \xi , \binom{1}{0}\rangle = \langle \xi , \binom{0}{1}\rangle = \langle \xi , \begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\ 0\end{pmatrix}\rangle = \langle \xi , \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}\rangle = 0$$

et le système (3.0) se réduit donc au système homogène :

$$(3.1) \qquad D_{1-a} \Delta_a \xi_\nu = 0 , \quad \nu \in S , \quad \xi_\nu \in R_\nu^2$$

qui admet la solution non nulle $\xi = \bar{\xi}_a = (0 , 0 , \bar{\xi}_{1/\lambda} , 0)$, où

$$(3.2)\quad \bar{\xi}_{1/\lambda} = \begin{pmatrix} (a + b_2 - c_2)\, x^{b_1-c_2-1}\,(1-x)^{c_1-b_1}\; {}_2F_1\left(\begin{matrix} a - c_2\,,\; b_2 - c_2 \\ a + b_2 - c_2 \end{matrix}\; ;\; 1 - x\lambda\right) \\ \\ (a - c_2)\,\lambda x^{b_1-c_2}\,(1-x)^{c_1-b_1}\; {}_2F_1\left(\begin{matrix} a + 1 - c_2\,,\; b_2 + 1 - c_2 \\ a + b_2 + 1 - c_2 \end{matrix}\; ;\; 1 - x\lambda\right) \end{pmatrix}.$$

Soit $H_a = V_a^{\perp}$ = sous-$\mathcal{D}$-module de K_a engendré par $\bar{\xi}_a$, et soit

$$(3.3)\quad \begin{aligned} \hat{D}_a : K_a &\longrightarrow W_{1-a} \\ \xi &\longmapsto [D_{1-a}\, \Delta_a(x\lambda)\, \xi] \end{aligned}$$

ou [ ] note la "classe modulo $D_{1-a}\, \mathcal{E}^2$ ". Remarquons que $\hat{D}_a K_a = V_{1-a}$ et que la suite de $\mathcal{D}$-modules

$$(3.4)\quad 0 \longrightarrow H_a \hookrightarrow K_a \xrightarrow{\hat{D}_a} V_{1-a} \longrightarrow 0$$

est exacte. Or K_a est le $\mathcal{D}/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel dual de W_a , en posant

$$\nabla_a^*(E_\lambda) = \gamma_-(E_\lambda - {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda)) .$$

Démontrons que $\hat{D}_a : K_a \longrightarrow W_{1-a}$ est un morphisme de $\mathcal{D}/\underset{\sim}{Q}$ -modules différentiels, ce qui prouve aussi que H_a est sous-$\mathcal{D}/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel de K_a et fournit la démonstration "raisonnée" du fait que V_{1-a} est stable dans W_{1-a} par l'action de $\nabla_{1-a}(E_\lambda)$. En fait, pour ξ dans K_a :

$$\hat{D}_a\, \nabla_a^*(E_\lambda)\, \xi = [D_{1-a}\, \Delta_a(x\lambda)\, \gamma_-(E_\lambda - {}^tG_a(x\lambda))\, \xi]$$

$$= [D_{1-a}\, \Delta_a(x\lambda)(E_\lambda - {}^tG_a(x\lambda))\, \xi] = [D_{1-a}(E_\lambda\, \Delta_a - E_\lambda(\Delta_a) - \Delta_a\, {}^tG_a)\, \xi]$$

$$= [D_{1-a}(E_\lambda + G_{1-a}(x\lambda)\, \Delta_a(x\lambda)\, \xi] = \nabla_{1-a}(E_\lambda)\, \hat{D}_a\, \xi , \quad (\text{par } (2.1)') ,$$

où a signifie (a , b_2 , c_2) dans G_a , Δ_a et $(a , b_1 , b_2 , c_1 , c_2)$ dans D_a , $\hat{D}_a$, ∇_a , et de même pour $1 - a$.

Considérons la table :

(3.5)

ν	0	1	$1/\lambda$	∞
t_ν	λ	$1/\lambda-1$	$1/1-\lambda$	$1/\lambda$

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 3.6. - Soit

$$\xi = (\xi_\nu)_{\nu\in S} \quad K_a \ , \quad \xi_\nu = \binom{\xi_{\nu 1}}{\xi_{\nu 2}} \ , \ \text{pour} \quad \nu \in S \ .$$

Pour tout $\nu \in S$, $i = 1 , 2$, il existe des $\alpha_{\nu,i} \in \mathbb{Q}$ tels que

$$\alpha_{\nu i} \ \xi_{\nu i} = \sum_{h=0}^{\infty} C_h(t_\nu) \ T_\nu^h \ ,$$

où $C_h(t_\nu) \in \mathbb{Q}[t_\nu]$ est un polynôme (dépendant de ν , i) de degré $\leq h$, à coefficients bornés par h^3 .

4. - Le théorème 3.6 suggère de poser, pour $\lambda \in \Omega$, $\lambda \neq 0 , 1$,

(4.1)

ν	0	1	$1/\lambda$	∞
Γ_ν	$\min(1,\frac{1}{\lvert\lambda\rvert})$	$\min(1,\lvert\frac{\lambda-1}{\lambda}\rvert)$	$\min(1,\lvert\lambda-1\rvert)$	$\min(1,\lvert\lambda\rvert)$

,

et implique que si, dans $\xi \in K_a$, on spécialise λ à une valeur $\neq 0 , 1$ de Ω , les séries $\xi_{\nu,i}$ convergent pour $|T_\nu| < \Gamma_\nu$, avec $\nu \in S$, $i = 1 , 2$. Définissons alors, pour $\lambda \in \Omega$, $\lambda \neq 0 , 1$,

L_λ = {fonctions analytiques pour $|T_\nu| > \epsilon_\nu$, où, pour $\nu \in S$, $0 < \epsilon_\nu < \Gamma_\nu$, ϵ_ν indéterminé} ,

$R'_\nu(\lambda)$ = {séries dans $\Omega((T_\nu))$ qui convergent pour $\epsilon_\nu < |T_\nu| < \Gamma_\nu$, $0 < \epsilon_\nu < \Gamma_\nu$, ϵ_ν indéterminé} ,

$R_\nu(\lambda) = \{\xi \in R'_\nu(\lambda)$; ξ est holomorphe pour $T_\nu = 0\}$, si $\nu \neq \infty$,

$R_\infty(\lambda) = \{\xi \in R'_\infty(\lambda)$; ξ s'annule pour $T_\infty = 0\}$,

$R'(\lambda) = \oplus_{\nu\in S} R'_\nu(\lambda)$ et $R(\lambda) = \oplus_{\nu\in S} R_\nu(\lambda)$.

Comme dans le cas formel, on a une forme Ω-bilinéaire à noyaux à gauche et à droite nuls, et des applications γ_+ et γ_- . L'indice λ ($\in \Omega$, $\neq 0 , 1$) note dorénavant la spécialisation, pour λ , de variable à nombre p-adique de l'objet déjà défini pour λ générique. Un théorème de ADOLPHSON garantit que $W_{a,\lambda} = L^2_\lambda / D_{a,\lambda} \ L^2_{\lambda_*}$ est un Ω-espace vectoriel de base $e_{a,\lambda}$. De plus, $K_{a,\lambda} = \mathrm{Ker}_{R(\lambda)^2} \ D_{a,\lambda}$ admet la base $e^*_{a,\lambda}$, et est dual de $W_{a,\lambda}$. Remarquons que si $x_0 \in \Omega \setminus \{0 , 1\}$ et $f_{b,c,x_0}(x)$ note une branche de $x^b(1-x)^{c-b}$ pour x

près de x_0 , on a, en tant qu'opérateurs agissant sur un espace de fonctions de x analytiques près de x_0 ,

$$(4.2)\quad D_{a,\lambda} = f^{-1}_{b_1,c_1,x_0}(x)\, U^{-1}_{a,b_2,c_2,x_0\lambda}(x\lambda)\, E_x\, U_{a,b_2,c_2,x_0\lambda}(x\lambda)\, f_{b_1,c_1,x_0}(x) .$$

Soient maintenant λ , $z \in \Omega$, $z \neq 0$, 1 , $|\lambda - z| < |z| \min(1 , |z - 1|)$; dans ce cas, $|\lambda| = |z|$, $|\lambda - 1| = |z - 1|$, $L_\lambda = L_z$, $R(\lambda) = R(z)$.

Soit alors :

$$(4.3)\quad \begin{aligned} T_{a;z,\lambda} : R(z)^2 &\longrightarrow R(\lambda)^2 \\ \xi &\longmapsto \gamma_-\, {}^tU_{a,b_2,c_2,xz}(x\lambda) . \end{aligned}$$

On sait que ${}^tU_{a,b_2,c_2,xz}(x\lambda)$ converge pour $|x\lambda - xz| < |xz| \min(1 , |1 - xz|)$, et donc pour $|1 - xz| > |\lambda - z|/|z|$; mais $|\lambda - z|/|z| < \min(1 , |z - 1|) = \Gamma_{1/z}$ d'où ${}^tU_{a,b_2,c_2,xz}(x\lambda) \in M_{2,2}(L_z)$.

Vérifions que

$$(4.4)\quad D^*_{a,\lambda}\, T_{a;z,\lambda} = T_{a;z,\lambda}\, D^*_{a,z}$$

c'est-à-dire que :

$$\gamma_-\, \Delta^{-1}(x\lambda)\, D_{1-a,\lambda}\, \Delta_a(x\lambda)\, {}^tU_{a,xz}(x\lambda) = \gamma_-\, {}^tU_{a,xz}(x\lambda)\, \Delta^{-1}(xz)\, D_{1-a,z}\, \Delta_a(xz) .$$

Grâce à (2.4)', la formule précédente équivaut à

$$\gamma_-\, \Delta_a^{-1}(x\lambda)\, D_{1-a,\lambda}\, U_{1-a,x\lambda}(xz)\, \Delta_a(xz) = \gamma_-\, \Delta_a^{-1}(x\lambda)\, U_{1-a,x\lambda}(xz)\, D_{1-a,z}\, \Delta_a(xz) .$$

Si $x_0 \in \Omega \setminus \{0 , 1\}$, on a :

$$\begin{aligned} D_{1-a,\lambda}\, U_{1-a,x\lambda}(xz) &= D_{1-a,\lambda}\, U^{-1}_{1-a,x_0\lambda}(xz)\, U_{1-a,x_0\lambda}(xz) \\ &= f^{-1}_{1-b_1,1-c_1,x_0}(x)\, U^{-1}_{1-a,x_0\lambda}(x\lambda)\, E_x\, U_{1-a,x_0 z}(xz)\, f_{1-b_1,1-c_1,x_0}(x) \\ &= U^{-1}_{1-a,x_0\lambda}(x\lambda)\, U_{1-a,x_0}(xz)\, f^{-1}_{1-b_1,1-c_1,x_0}(x)\, U^{-1}_{1-a,x_0}(xz) \\ &\qquad E_x\, U_{1-a,x_0\lambda}(xz)\, f_{1-b_1,1-c_1,x_0}(x) \\ &= U_{1-a,x\lambda}(xz)\, D_{1-a,z} , \end{aligned}$$

d'où (4.4).

On obtient donc une application (Ω-isomorphisme, puisque elle est inversible par l'échange de λ et z) :

(4.5) $$T_{a;z,\lambda} : K_{a,z} \longrightarrow K_{a,\lambda} .$$

Le calcul explicite de

$$\langle T_{a;z,\lambda}\, e^{(i)*}_{a,z} , e^{(j)}_{a,\lambda}\rangle = \langle {}^tU_{a,xz}(x\lambda)\, e^{(i)*}_{a,z} , e^{(j)}_{a,\lambda}\rangle$$

montre que la matrice $C_{a,z}(\lambda)$ telle que $T_{a;z,\lambda}\, e^*_{a,z} = C_{a,z}(\lambda)\, e^*_{a,\lambda}$ est analytique dans $\mathcal{T}_z = \{\lambda \in \Omega \; ; \; |\lambda - z| < |z| \min(1 , |z - 1|)\}$.

Le fibré vectoriel (banal) sur $\Omega \setminus \{0 , 1\}$ de base globale $\{e^*_{a,\lambda}\}_{\lambda\in\Omega\setminus\{0,1\}}$ s'identifie, par l'identification de $e^{(i)*}_a$ à la section globale $\lambda \longrightarrow e^{(i)*}_{a,\lambda}$, au fibré vectoriel (à connexion) $\underset{\sim}{K}_a$ canoniquement associé au $\mathcal{D}/\underset{\sim}{\Omega}$-module différentiel K_a . La dérivée covariante d'une section ξ de $\underset{\sim}{K}_a$ sur un ouvert U se calcule, dans l'identification précédente, par la formule

(4.6) $$\nabla^*_a(E_\lambda)\, \xi = \gamma_-(\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\, \xi ,$$

où ξ est considérée comme fonction analytique <u>de</u> x <u>et de</u> λ . Vérifions que $T_{a;z,\lambda}$ est le transport parallèle de $K_{a,z}$ à $K_{a,\lambda}$. En effet :

$$\nabla^*_a(E_\lambda)\, T_{a;z,\lambda}\, e^*_{a,z} = \gamma_-(\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\, \gamma_-\, U_{a,xz}(x\lambda)\, e^*_{a,z}$$

$$= \gamma_-(\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\, U_{a,xz}(x\lambda)\, e^*_{a,z} = \gamma_-\, U_{a,xz}(x\lambda)\, \lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\, e^*_{a,z} = 0.$$

Il s'en suit en particulier que les solutions de L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} convergent p-adiquement jusqu'à la plus proche singularité.

Rappelons qu'on a posé $\mathcal{U} = \{\lambda \in \Omega \setminus \{0\} \; ; \; |\lambda - 1| > p^{-1/(p-1)}\}$.

On posera

(4.7) $$\chi_{b_1,c_1}(x) = x^{-\mu_{b_1}}(1 - x)^{\mu_{b_1}-\mu_{c_1}} \left(\frac{(1 - x)^p}{1 - x^p}\right)^{c_1'-b_1'} \in L_\lambda .$$

Soient $z_1 , \dots , z_p$ les p racines p-ièmes de $x_0 \in \mathcal{U}$; on a alors :

(4.8) $$f_{b_1',c_1',x_0}(z^p)\, \chi_{b_1,c_1}(z) = \chi_{b_1,c_1}(z_i)\, f_{b_1,c_1,z_i}(z) , \quad i = 1 , \dots , p$$

et, de même :

(4.9) $$U_{a_1',b_2',c_2',x_0\lambda^p}(z^p\, \lambda^p)\, A_{a,b_2,c_2}(z\lambda)$$

$$= A_{a,b_2,c_2}(z_i\, \lambda)\, U_{a,b_2,c_2,z_i\lambda}(z\lambda) , \quad i = 1 , \dots , p .$$

En partant de ces considérations, on prouve facilement que, si l'on pose

$$\alpha_{a,\lambda} : L^2_\lambda \longrightarrow L^2_{\lambda^p}$$

(4.10)

$$\xi \longmapsto \psi(\chi_{b_1,c_1}(x)\, A_{a,b_1,c_2}(x\lambda)\, \xi) ,$$

ψ étant l'application de Dwork, on a

(4.11) $$\alpha_{a,\lambda}\, D_{a,\lambda} = p\, D_{a',\lambda^p}\, \alpha_{a,\lambda} .$$

On obtient donc une application

(4.12) $$\alpha_{a,\lambda} : W_{a,\lambda} \longrightarrow W_{a',\lambda^p}$$

qui est en effet un Ω-isomorphisme. Par dualité

$$\alpha^*_{a,\lambda} : R(\lambda^p)^2 \longrightarrow R(\lambda)^2$$

(4.13)

$$\xi \longmapsto \gamma_-(x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\, {}^tA_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\, \Phi\, \xi)$$

où $(\Phi\xi)(x) = \xi(x^p)$, satisfait

(4.14) $$D^*_{a,\lambda}\, \alpha^*_{a,\lambda} = p\, \alpha^*_{a,\lambda}\, D^*_{a',\lambda^p}$$

et donne un isomorphisme :

(4.15) $$\alpha_{a,\lambda} : K_{a',\lambda^p} \longrightarrow K_{a,\lambda}$$

Soit $B_a(\lambda)$ la matrice de $\alpha^*_{a,\lambda}$,

$$\alpha^*_{a,\lambda}\, e^*_{a',\lambda^p} = B_a(\lambda)\, e^*_{a,\lambda} .$$

On peut démontrer que, comme dans le cas de ${}_2F_1(\begin{smallmatrix}a,b\\c\end{smallmatrix};\lambda)$, $B_a(\lambda)$ est analytique dans $\mathcal{U}$, avec des singularités polaires à 0 et ∞ .

Nous allons montrer que le diagramme

(4.20)

$$\begin{tikzcd}
K_{a,z} \arrow[r, dashed, "T_{a;z,\lambda}"] & K_{a,\lambda} \\
K_{a',z^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,z}"] \arrow[r, dashed, "T_{a';z^p,\lambda^p}"] & K_{a',z^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet,

$$\alpha^*_{a,\lambda}\, T_{a';z^p,\lambda^p} = \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\, {}^tA_a(x\lambda)\, \varphi\, \gamma_-\, {}^tU_{a',xz}(x\lambda^p) =$$

$$= \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\, {}^tA_a(x\lambda)\, \varphi\, {}^tU_{a',xz^p}(x\lambda^p)$$

$$= \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\, {}^tA_a(x\lambda)\, {}^tU_{a',x^pz^p}(x^p\,\lambda^p)\, \varphi$$

$$= \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\, {}^tU_{a,xz}(x\lambda)\, {}^tA_a(xz)\, \varphi$$

$$= \gamma_-\, {}^tU_{a,xz}(x\lambda)\, \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\, {}^tA_a(xz)\, \varphi = T_{a;z,\lambda}\, \alpha^*_{a,z}\,.$$

On prouve encore facilement que le diagramme :

(4.21)
$$\begin{tikzcd}
K_{a,\lambda} \arrow[r, dashed, "\hat{D}_{a,\lambda}"] & W_{1-a,\lambda} \arrow[d, "\alpha_{1-a,\lambda}"] \\
K_{a',\lambda^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,\lambda}"] \arrow[r, dashed, "p^2\,\hat{D}_{a',\lambda^p}"] & W_{1-a',\lambda^p}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme $\hat{D}_{a,\lambda}\, K_{a,\lambda} = V_{1-a,\lambda}$, on conclut que $\alpha_{a,\lambda}\, V_{a,\lambda} = V_{a',\lambda^p}$.

On a ainsi démontré que le fibré vectoriel à connexion $\underset{\sim}{V}_a$, associé au $\mathcal{D}/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel V_a , et donc à L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} et à ${}_3F_2\left(\begin{smallmatrix} a,b_1,b_2 \\ c_1,c_2 \end{smallmatrix};\lambda\right)$ est muni d'un morphisme horizontal

(4.22) $$\bar{\underset{\sim}{\alpha}}_a : \underset{\sim}{V}_a|\mathcal{U} \longrightarrow \varphi^*\, \underset{\sim}{V}_{a'}|\mathcal{U}\,.$$

Si $\underset{\sim}{H}_a$ note le fibré vectoriel à connexion associé à H_a , on a également un morphisme horizontal :

(4.23) $$\tilde{\underset{\sim}{\alpha}}^*_a : \varphi^*\, \underset{\sim}{H}_{a'}|\mathcal{U} \longrightarrow \underset{\sim}{H}_a|\mathcal{U}$$

induit par

$$\underset{\sim}{\alpha}^*_a : \varphi^*\, \underset{\sim}{K}_{a'}|\mathcal{U} \longrightarrow \underset{\sim}{K}_a|\mathcal{U}\,,$$

où $\underset{\sim}{K}_a$ est le fibré vectoriel associé à K_a . On a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$(4.24)\qquad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underset{\sim}{H}_{a|\mathcal{U}} \arrow[r, hook] & \underset{\sim}{K}_{a|\mathcal{U}} \arrow[r, dashed, "\hat{\underset{\sim}{D}}_{a|\mathcal{U}}"] & \underset{\sim}{V}_{1-a|\mathcal{U}} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varphi^* \underset{\sim}{H}_{a'|\mathcal{U}} \arrow[r, hook] \arrow[u, "\underset{\sim}{\alpha}_a^*"] & \varphi^* \underset{\sim}{K}_{a'|\mathcal{U}} \arrow[r, dashed, "\varphi^* \hat{\underset{\sim}{D}}_{a'|\mathcal{U}}"] \arrow[u, "\alpha_a^*"] & \varphi^* \underset{\sim}{V}_{1-a'|\mathcal{U}} \arrow[r] \arrow[u, "p^2\, \bar{\underset{\sim}{\alpha}}_{1-a}^{-1}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Remarquons encore que l'application

$$(4.25)\qquad \begin{aligned} [\ ,\ ] : V_{1-a} \times V_a &\longrightarrow \mathcal{Q} \\ (v\ ,\ w) &\longmapsto \langle \xi\ ,\ w\rangle\ , \end{aligned}$$

où $\hat{D}_a\, \xi = v$, $\xi \in K_a$, est bien définie puisque $H_a = V_a$, et que c'est une dualité de $\mathcal{Q}/\underset{\sim}{Q}$-modules différentiels. De plus, on a, pour la dualité spécialisée avec $\lambda \in \mathcal{Q}$,

$$[\ ,\ ]_\lambda : V_{1-a,\lambda} \times V_{a,\lambda} \longrightarrow \Omega\ ,$$

$$(4.26)\qquad [\alpha_{1-a,\lambda}\, v\ ,\ \alpha_{a,\lambda}\, w]_{\lambda^p} = p^2 [v\ ,\ w]_\lambda\ .$$

Soit en effet $\eta \in K_{a',\lambda^p}$ tel que $\hat{D}_{a',\lambda^p}\, \eta = \alpha_{1-a,\lambda}\, v$; soit $\alpha^*_{a,\lambda}\, \eta = p^2\, \xi \in K_{a,\lambda}$. On a alors

$$p^2\, \hat{D}_{a,\lambda}\, \xi = \hat{D}_{a,\lambda}\, \alpha^*_{a,\lambda}\, \eta = (\text{grâce à } (4.21))\quad p^2\, \alpha^{-1}_{1-a,\lambda}\, \hat{D}_{a',\lambda^p}\, \eta = p^2\, v\ ;$$

donc $\hat{D}_{a,\lambda}\, \xi = v$ et

$$[\alpha_{1-a,\lambda}\, v\ ,\ \alpha_{a,\lambda}\, w]_{\lambda^p} = \langle \eta\ ,\ \alpha_{a,\lambda}\, w\rangle_{\lambda^p} = \langle \alpha^*_{a,\lambda}\, \eta\ ,\ w\rangle_\lambda = p^2\, \langle \xi\ ,\ w\rangle_\lambda = p^2 [v\ ,\ w]_\lambda\ .$$

Si on emploie donc toujours la base $e^1_{a,\lambda}$ dans $V_{a,\lambda}$, puisque le déterminant de la matrice de $[\ ,\ ]_\lambda$ a, en général, l'ordre p-adique 0 , on obtient :

$$(4.27)\qquad \operatorname{ord} \det \alpha_{a,\lambda} + \operatorname{ord} \det \alpha_{1-a,\lambda} = 6\ .$$

Pour obtenir des renseignements sur la croissance des solutions de L_a au bord du disque de convergence il faudrait encore étudier la matrice de $\alpha_{a,\lambda}$ du point de vue de la théorie de DIEUDONNÉ. La formule (4.27) nous indique qu'il sera en particulier nécessaire de calculer la matrice $B_a(\lambda) \in M_{3,3}(\mathcal{Q}_0')$ modulo $\varphi^3\, \mathcal{Q}_0'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.). - Lectures on p-adic differential equations. - New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1982 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 253).