

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

YVETTE AMICE

Prolongement analytique des sommes de Gauss, III

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 10, n° 1 (1982-1983), exp. n° 6, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1982-1983__10_1_A4_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SOMMES DE GAUSS, III

par Yvette AMICE (*)

1. Introduction.

On utilise les notations de [3]. On y a montré que si $f \in C_u^1(\mathbb{Z}_p(m))$, la fonction $G(f, T) = (f\theta_T * 1)'(-1)$ est analytique sur $D_m = \{T \in \mathbb{C}_p; |T^m - 1| < 1\}$, où θ_T désigne le caractère p-adique continu du groupe additif de $\mathbb{Z}_p(m)$ défini par $\theta_T(n) = T^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Si $f = \chi$ est un caractère de Dirichlet de conducteur $d = mp^e$, on a, pour $\zeta \in \mu_d$,

$$G(\chi, \zeta) = \frac{1}{d} \sum_{a=0}^{d-1} \chi(a) \zeta^a :$$

c'est donc une somme de Gauss classique.

Comme $f \rightarrow G(f, \cdot)$ est une application injective de $C_u^1(\mathbb{Z}_p(m))$ dans l'espace des fonctions analytiques sur D_m , il est naturel de chercher à inverser cette application, c'est-à-dire à reconstituer f à partir de $G(f, \cdot)$: c'est l'objet du § 2.

Au § 3, on donne une interprétation des transformations $f \rightarrow G(f, \cdot)$ et $G(f, \cdot) \rightarrow f$ en termes d'analyse fonctionnelle, et de distributions dont la restriction aux fonctions localement constantes est invariante par translation.

D'autre part, si $F_f(T) = \sum_{n \geq 0} f(n) T^n$ admet un prolongement analytique au point 1, on a $G(f, 1) = -F_f'(1)$. En particulier, si χ est un caractère de Dirichlet de conducteur mp^e dont le facteur modulo m est non trivial, on sait que, pour $s \in \mathbb{C}_p$ et $|s| < p^{1-(1/(p-1))}$ on a

$$(1) \quad s L_p(1-s, \chi) = -G(\chi_0, 1) = s F_{(\chi\omega^{-1})}_{s-1}(1),$$

où $\varphi_s(x) = \varphi(x)\langle x \rangle^s$. On démontre au § 4 des relations exprimant $F_f(1)$ comme limite de combinaisons de valeurs de f sur \mathbb{N} : l'intérêt de telles formules réside, par exemple, dans (1).

2. Formule d'inversion.

Rappelons [3] que si $f \in C_u^1(\mathbb{Z}_p(m))$, on a

(*) Yvette AMICE, Mathématiques, Aile 45-55, Université Paris-7, 2 place Jussieu 75251 PARIS CEDEX 05.

$$(2) \quad -\log T F_f(T) = F_{f'}(T) + G(f, T),$$

où cette relation est, en général, formelle. Chacune des fonctions qui y figurent admet un unique développement en "série de Laurent"

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(T)(1 - T^m)^k,$$

où A_k est un polynôme de degré strictement inférieur à m . Pour F_f et $F_{f'}$, on a $A_k = 0$ pour $k \geq 0$, et la série converge pour $|T^m - 1| \geq 1$; pour \log et $G(f, \cdot)$, on a au contraire $A_k = 0$ pour $k < 0$, et la série converge pour $|T^m - 1| < 1$. On montre que les séries correspondant à \log et F_f sont formellement multipliables, et la relation (2) signifie que $F_{f'}$ (resp. $G(f, T)$) sont les parties à indices négatifs (resp. positifs ou nuls) de la série produit.

Il est clair que $f \xrightarrow{\mathfrak{g}} G(f, \cdot)$ est une application injective de $C_u^1(\mathbb{Z}_p(m))$ dans l'espace des fonctions analytiques sur D_m : le théorème ci-dessous fournit une forme explicite de l'application inverse (qui n'est définie que sur l'image $\mathfrak{g}(C_u^1(\mathbb{Z}_p(m)))$).

THÉORÈME 2.1. - Soit $f \in C_u^1(\mathbb{Z}_p(m))$, $a \in \mathbb{Z}_p(m)$ et $T \in D_m$, on a

$$(3) \quad f(a) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} (\lambda T)^{-a} G(f, \gamma T) \right),$$

où cette limite, indépendante de T , est uniforme en a .

Remarquons que lorsque $f = \chi$ est un caractère de Dirichlet de conducteur mp^e , on a $G(\chi, \gamma) = 0$ si $\gamma \in \mu_{mp^h}$, mais n'est pas une racine primitive mp^e -ième de 1. En choisissant $T = 1$ dans (3), on retrouve la formule classique

$$\chi(a) = \sum_{\gamma \in \mu_{mp^e}} \gamma^{-a} G(\chi, \gamma)$$

qui est une formule d'inversion de la transformée de Fourier $\chi \rightarrow G(\chi, \gamma)$ sur $\mathbb{Z}/mp^e \mathbb{Z}$.

LEMME 2.2. - Cas où $a = 0$. Pour $f \in C_u^1(\mathbb{Z}_p(m))$ et $T \in D_m$

$$(4) \quad f(0) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} G(f, \gamma T) \right).$$

En même temps que ce lemme nous démontrons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.3. - Sous les mêmes hypothèses pour f

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{mp^h} \left(\sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} G(f, \gamma T) - f(0) \right) = -\frac{1}{2} (f(0) \cdot \log T + f'(0)).$$

On utilise la relation (2) :

$$\sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} G(f, \gamma T) = - \sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} F_{f'}(\gamma T) - \text{Log } T \cdot \sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} F_f(\gamma T) .$$

Or on a

$$\sum F_{f'}(\gamma T) = mp^h \cdot \sum_{k \geq 0} f'(kmp^h) T^{kmp^h}$$

et

$$\sum F_f(\gamma T) = mp^h \cdot \sum_{k \geq 0} f(kmp^h) T^{kmp^h}$$

où les sommes non précisées portent sur les γ parcourant μ_{mp^h} .

Supposons d'abord que f soit localement affine, c'est-à-dire que pour h assez grand et $k \in \mathbb{Z}$,

$$f(kmp^h) = f(0) + kmp^h f'(0) \quad \text{et} \quad f'(kmp^h) = f'(0) .$$

On a dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{1}{mp^h} (\sum G(f, \gamma T) - f(0)) &= \frac{-f(0)}{mp^h} \left[1 + \frac{mp^h \text{Log } T}{1 - T^{mp^h}} \right] \\ &\quad - \frac{f'(0)}{1 - T^{mp^h}} \left[1 + \frac{mp^h T^{mp^h} \text{Log } T}{1 - T^{mp^h}} \right] . \end{aligned}$$

On déduit du développement usuel du logarithme que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(- \frac{1}{mp^h} \left(1 + \frac{mp^h \text{Log } T}{1 - T^{mp^h}} \right) \right) = - \frac{1}{2} \text{Log } T ,$$

et

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(- \frac{1}{1 - T^{mp^h}} \left(1 + \text{Log } T \frac{T^{mp^h} mp^h}{1 - T^{mp^h}} \right) \right) = - \frac{1}{2}$$

ce qui prouve le lemme et le corollaire dans le cas particulier où f est localement affine.

Dans le cas général, posons

$$\eta_h(k) = \frac{1}{mp^h} (f(kmp^h) - f(0) - kmp^h f'(0)) ,$$

alors $\eta_h \in C_u^1(\mathbb{Z}_p(m))$, $\eta_h'(k) = f'(kmp^h) - f'(0)$ et

$$\frac{\eta_h(k) - \eta_h(k')}{k - k'} = \frac{f(kmp^h) - f(k' mp^h)}{(k - k') mp^h} - f'(0) ,$$

et l'on vérifie que $\eta_h \rightarrow 0$ dans C_u^1 quand $h \rightarrow \infty$.

On peut se ramener au cas où $f(0) = f'(0) = 0$, compte tenu de la première partie

de la démonstration. On a dans ce cas

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{mp}^h} (\sum G(f, \gamma T) - f(0)) \\ &= - \sum_{k \geq 0} \eta'_h(k) T^{k \text{mp}^h} - \text{mp}^h (\sum_{k \geq 0} \eta'_h(k) T^{k \text{mp}^h}) \text{Log } T = G(\eta'_h, T^{\text{mp}^h}). \end{aligned}$$

Or on sait que $f \mapsto G(f, T)$ est une application continue de \mathbb{C}_u^1 dans $A(D_m)$, donc quand $h \rightarrow \infty$, $G(\eta'_h, \cdot) \rightarrow 0$ dans $A(D_m)$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 2.4. - Soit $f \in \mathbb{C}_u^1(\mathbb{Z}_p(m))$, $a \in \mathbb{Z}_p(m)$, et f_a définie par $f_a(t) = f(t+a)$, alors

$$(5) \quad G(f_a, T) = T^{-a} \{ (f' \theta_T * 1)(a-1) + \text{Log } T (f \theta_T * 1)(a-1) + G(f, T) \}.$$

La démonstration se fait par un calcul direct :

$$\begin{aligned} (f_a \theta_T * 1)(\text{mp}^h - 1) &= \sum_{j=0}^{\text{mp}^h - 1} f(a+j) T^j \\ &= T^{-a} ((f \theta_T * 1)(a + \text{mp}^h - 1) - (f \theta_T * 1)(a - 1)). \end{aligned}$$

Donc

$$G(f_a, T) = (f_a \theta_T * 1)'(-1) = T^{-a} (f \theta_T * 1)'(a-1).$$

Mais, pour toute $g \in \mathbb{C}_u^1(\mathbb{Z}_p(n))$ et tout $x \in \mathbb{Z}_p(n)$,

$$(g * 1)'(x) = (g' * 1)(x) + (g * 1)'(-1).$$

Pour $g = f \theta_T$, donc $g' = f' \theta_T + \text{Log } T f \theta_T$, on trouve aussi

$$G(f_a, T) = T^{-a} ((f' \theta_T * 1)(a-1) + \text{Log } T (f \theta_T * 1)(a-1) + (f \theta_T * 1)'(-1))$$

ce qui est exactement la formule annoncée.

Démonstration du théorème. - Compte tenu du lemme 2.2 appliqué à f_a , on a

$$f(a) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\gamma \in \mu_{\text{mp}^h}} G(f_a, \gamma T).$$

Posons $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{Z}_p(n)} |f(t)|$; d'après le corollaire 2.3 on a, pour T fixé et $h \geq h(f)$ (indépendant de a),

$$\left| \sum_{\gamma \in \mu_{\text{mp}^h}} G(f_a, \gamma T) - f(a) \right| \leq |\text{mp}^h| \max(\|f\| |\text{Log } T|, \|f'\|).$$

le théorème sera donc démontré si l'on prouve que, uniformément par rapport à a ,

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{\gamma \in \mu_{\text{mp}^h}} (\gamma T)^{-a} (f' \theta_{\gamma T} * 1)(a-1) + \text{Log } T (f \theta_{\gamma T} * 1)(a-1) \right) = 0$$

ce qui va résulter du lemme suivant.

LEMME 2.5. - Soit g continue sur $\mathbb{Z}_p^{(n)}$ et $\|g\| = \sup_{t \in \mathbb{Z}_p^{(n)}} |g(t)|$, alors

$$\left\| \sum_{\gamma \in \mu_{np^h}} (\gamma T)^{-a} g \circ_{\gamma T} * 1 \right\| \leq |np^h| \|g\|.$$

En effet,

$$\sum_{\gamma \in \mu_{np^h}} (\gamma T)^{-a} \circ_{\gamma T} = np^h 1_{a+np^h \mathbb{Z}_p^{(n)}}$$

où 1_A désigne la fonction caractéristique de A , et comme $\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|$, le lemme en résulte.

On en déduit que le membre de gauche de (6) est majoré par

$$|np^h| \max(\|f'\|, |\log T| \|f\|),$$

d'où le théorème.

COROLLAIRE 2.6. - Sous les hypothèses de 2.1, on a

$$\left| \sum_{\gamma \in \mu_{np^h}} (\gamma T)^{-a} G(f, \gamma T) - f(a) \right| \leq |np^h| \max(\|f'\|, |\log T| \|f\|).$$

3. Interprétation du théorème d'inversion.

On peut donner de ce théorème une interprétation en termes d'analyse fonctionnelle. Rappelons [2] qu'une distribution sur $\mathbb{Z}_p^{(n)}$ est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p^{(n)}$. A une telle distribution μ est associée une fonction \tilde{G}_μ définie sur le dual (groupe des caractères continus) de $\mathbb{Z}_p^{(n)}$ par

$$\tilde{G}_\mu(\theta) = (\mu | \theta).$$

Le dual est identifié à $D_n = \{T \in \mathbb{C}_p^\times ; |T^n - 1| < 1\}$ par $\theta \mapsto \theta(1) \in D_n$, et $T \mapsto \theta_T$ est le paramétrage canonique du dual dans D_n . On associe donc à la distribution μ une fonction G_μ définie sur D_n par

$$G_\mu(T) = \tilde{G}_\mu(\theta_T) = (\mu | \theta_T).$$

On sait [2] qu'ainsi l'espace des distributions correspond à l'espace des fonctions analytiques sur D_n .

Parmi les distributions, celles qui se prolongent en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_u^1(\mathbb{Z}_p^{(n)})$ sont appelés distributions tempérées. On démontre qu'une distribution est tempérée si, et seulement si, la fonction analytique sur D_n qu'elle définit est $\mathcal{O}(\log)$.

On sait depuis longtemps [6] qu'il n'existe pas de mesure (i. e. forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(n))$) qui soit invariante par translation.

LEMME 3.1. - Soit μ une distribution tempérée sur $\mathbb{Z}_p(n)$, la restriction de μ aux fonctions localement constantes est invariante par translation si, et seulement si, la fonction G_μ analytique sur D_n correspondant à μ est de la forme

$$(7) \quad G_\mu(T) = -C \frac{\text{Log } T}{1-T} + A(T) \text{Log } T$$

où A est une fonction analytique bornée sur D_n , et $C = (\mu|1)$.

Notons comme plus haut $f_a(t) = f(t+a)$ la translatée de f par a , et soit $M = \bigcup_h \mu_{mp^h}$ l'ensemble des racines de l'unité appartenant à D_n . Comme l'espace des fonctions localement constantes est engendré par les $(\theta_\gamma)_{\gamma \in M}$, la propriété "la restriction de μ aux fonctions localement constantes est invariante par translation" équivaut à

$$" \forall \gamma \in M, \forall a \in \mathbb{Z}_p(n), (\mu|(\theta_\gamma)_a) = (\mu|\theta_\gamma) "$$

Comme on a $(\theta_\gamma)_a = \gamma^a \theta_\gamma$, ceci équivaut donc à

$$" \text{pour } \gamma \in M, \gamma \neq 1, (\mu|\theta_\gamma) = G_\mu(\gamma) = 0 "$$

D'autre part, puisque G_μ est analytique, ceci équivaut à

$$" G_\mu(T) + C \frac{\text{Log } T}{1-T} \text{ est divisible par } \text{Log } T "$$

Comme de plus, $G_\mu(T) = \mathcal{O}(\text{Log})$, le lemme en résulte.

Nous noterons ν la distribution tempérée de masse totale $C = 1$ qui correspond à $A = 0$: c'est en un sens la plus simple des distributions satisfaisant aux hypothèses du lemme 3.1.

On sait que, pour toute distribution μ , on a

$$(\mu|f) = \text{Res}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{F}_f G_\mu),$$

sous réserve que $(\mu|f)$ ait un sens, c'est-à-dire que μ soit dans un sous-espace de l'espace des distributions qui sont le dual d'un sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p)$ auquel f appartient [2]).

Notons μ_A la mesure sur $\mathbb{Z}_p(n)$ associée à la fonction analytique bornée A , alors la formule (7) admet une autre lecture :

LEMME 3.2. - Soit μ une distribution tempérée telle que

$$G_\mu(T) = -\frac{\text{Log } T}{1-T} + A(T) \text{Log } T$$

où A est analytique bornée sur D_n , alors pour $f \in \mathcal{C}_u^1(\mathbb{Z}_p(n))$, on a

$$(8) \quad (\mu|f) = (f * 1)'(-1) - (\mu_A|f'),$$

où μ_A est la mesure associée à A .

En effet,

$$\begin{aligned} G_\mu F_f &= -\text{Log } T F_{f*1} + A(T) \text{Log } T F_f. \\ &= -\text{Log } T F_{f*1} - A(T) F_{f'} - A(T) G(f, T). \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\text{Res}_\omega(-\text{Log } T F_g) = g'(-1)$$

puisque

$$-\text{Log } T F_g = F_{g'} + G(g, T)$$

lorsque $g \in \mathcal{C}_u^1(\mathbb{Z}_p(n))$, on en déduit que

$$\text{Res}_\omega(G_\mu F_f) = (\mu|f) = (f * 1)'(-1) - \text{Res}_\omega(A F_{f'}) = (f * 1)'(-1) - (\mu_A|f').$$

Il est raisonnable d'appeler "dérivée de mesure" une distribution tempérée μ de la forme $(\mu|f) = (\mu_1|f')$, où μ_1 est une mesure. On peut donc reformuler le lemme 3.1 en disant que :

"toute distribution tempérée de masse totale 1, dont la restriction aux fonctions localement constantes est invariante par translation, est la somme de la distribution ν , définie par $(\nu|f) = (f * 1)'(-1)$, et d'une dérivée de mesure".

Remarquons plus généralement que si l'on appelle dérivée d'une distribution μ la distribution μ' définie par $(\mu'|f) = (\mu|f')$, les distributions qui sont des dérivées sont associées aux fonctions analytiques $G_\mu(T) = \text{Log } T G_\mu(T)$ divisibles par le logarithme.

La même démonstration que ci-dessus montre donc que "toute distribution μ de masse totale 1, dont la restriction aux fonctions localement constantes est invariante par translation, est de la forme

$$(\mu|f) = (f * 1)'(-1) + (\mu_1|f')$$

où μ_1 est une distribution".

A toute telle distribution μ , on peut associer une transformation de Fourier pour les fonctions localement analytiques définie par

$$(9) \quad \hat{f}_\mu(T) = (\mu|\theta_T f) = \int_{\mathbb{Z}_p(n)} \theta_T f \, d\mu$$

dont on montre aisément qu'elle est analytique sur D_n . On a alors

$$\hat{f}_\mu(T) = G(f, T) + (\mu_1! | \theta_T f),$$

et la fonction "somme de Gauss", $G(f, T)$, correspond au cas où $\mu_1 = 0$ et $(\mu|f) = (f * 1) \cdot (-1)$.

Si on se limite de nouveau aux distributions tempérées μ , la relation (9) définit une transformée de Fourier \hat{f}_μ pour $f \in \mathcal{C}_u^1(\mathbb{Z}_p(\mathbb{N}))$.

Réciproquement, soit E l'espace des fonctions analytiques sur D_m qui y sont $\mathcal{O}(\text{Log})$, muni de sa norme naturelle

$$\|G\| = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{M(G, r)}{M(\text{Log}, r)}, \text{ où } M(G, r) = \sup_{|T^m - 1| \leq r} |G(T)|.$$

Pour $h \geq 0$, la relation

$$(10) \quad m_h(G) = \sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} G(\gamma T)$$

définit une application linéaire m_h de E dans lui-même.

En utilisant la représentation [5]

$$(11) \quad G(T) = \sum_{n \geq 0} B_{n,h}(T) (1 - T^{mp^h})^n,$$

où

$$B_{n,h} \in \mathcal{C}_p[T], \quad \deg B_{n,h} < mp^h, \quad B_{n,h}(T) = \sum_{j=0}^{mp^h-1} b_{n,h,j} T^j,$$

on voit que

$$(12) \quad m_h(G) = mp^h \sum_{n \geq 0} b_{n,h,0} (1 - T^{mp^h})^n.$$

En utilisant les propriétés classiques de continuité de la division euclidienne, on montre que

$$M(B_{n,h}, r) \leq r^{-np^h} M(G, r) \text{ pour } r \geq p^{-1/p^{h-1}(p-1)}$$

et que, pour tout $r < 1$,

$$r^{np^h} M(B_{n,h}, r) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

En posant $\rho_h = p^{-1/p^{h-1}(p-1)}$, on en déduit que

$$M(m_h(G), \rho_h) \leq |mp^h| M(G, \rho_h)$$

or, pour $h \rightarrow \infty$, $|mp^h| M(G, \rho_h) \simeq \|G\| p^{-p/(p-1)}$.

Donc dans tout "disque" $|T^m - 1| \leq r < 1$, on a

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} M(m_h(G), r) \leq \|G\| p^{-p/(p-1)}.$$

Il en résulte que si la suite $m_h(G)$ converge (simplement) dans D_m vers une

fonction, celle-ci sera bornée. Mais comme $m_h(G)$ "ne dépend que de T^{mp^h} ", on en déduit facilement que la limite doit être constante sur D_n .

DÉFINITION 3.3. - On note F le sous-espace de $\mathcal{O}(\text{Log})$ constitué des fonctions analytiques G (sur D_n) pour lesquelles $\lim_{h \rightarrow \infty} m_h(G)$ existe, où m_h est définie par (10).

LEMME 3.4. - Pour $G \in F$, $m(G) = \lim_{h \rightarrow \infty} m_h(G)$ est constante sur D_n , $|m(G)| \leq \|G\| p^{-F/(p-1)}$. De plus, pour $\alpha \in D_n$ posons $G_\alpha(T) = G(\alpha T)$, alors $m(G_\alpha) = m(G)$.

On a déjà vu que $\lim_{h \rightarrow \infty} m_h(G)(T)$ est indépendant de T , or

$$m(G_\alpha)(T) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} G_\alpha(\gamma T) \right) = \lim_{h \rightarrow \infty} (m_h(G)(\alpha T)) = m(G),$$

d'où le lemme.

Remarquons que si A est une fonction analytique bornée, on a

$$\sup_{T \in D_n} |m_h(A)(T)| \leq |mp^h| \sup_{T \in D_n} |A(T)|,$$

donc $m_h(A) \rightarrow 0$.

Donc, si $B(T) = A(T) \text{Log } T$ où A est bornée, comme

$$m_h(B)(T) = \text{Log } T m_h(A)(T),$$

on a encore

$$\lim_{h \rightarrow \infty} m_h(B) = 0.$$

Ceci montre que le théorème d'inversion 2.1 est en fait valable pour toutes les transformées de Fourier \hat{f}_μ définies par (9) à partir des distributions μ tempérées et invariantes par translation décrites en 3.1. Nous résumons dans la proposition suivante les propriétés démontrées dans ce paragraphe.

PROPOSITION 3.5. - Soit μ une distribution tempérée sur $Z_p(m)$, dont la restriction aux fonctions localement constantes est invariante par translation. A toute $f \in \mathcal{C}_u^1(Z_p(m))$, on associe sa transformée de Fourier définie sur D_n par (9) :

$$\hat{f}_\mu(T) = (\mu | f \vartheta_T).$$

Alors \hat{f}_μ est analytique (et $\mathcal{O}(\text{Log})$) sur D_n et on a, pour tout $T \in D_n$ et uniformément en $a \in Z_p(m)$,

$$(13) \quad f(a) = m(T^{-a} \hat{f}_\mu(T)) \quad \text{où} \quad m(G) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} G(\gamma T) \right),$$

est une forme linéaire continue sur un sous-espace de $\mathcal{O}(\text{Log})$, invariante par les

translations $G \rightarrow G_\alpha$ où $G_\alpha(T) = G(\alpha T)$, $\alpha \in D_n$.

Une autre interprétation de ces relations peut être donnée en termes de "distributions à densité" (à rapprocher de [4]).

Notons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi_{a,h}(t) = 1_{a+mp^h} \hat{Z}_p(n)(t).$$

Comme on a

$$\varphi_{a,h} = \frac{1}{mp^h} \sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} \gamma^{-a} \theta_\gamma$$

on voit que

$$m_h(T^{-a} \hat{f}_\mu(T)) = mp^h (\mu | f \varphi_{a,h}).$$

Les hypothèses faites sur μ entraînent que $(\mu | \varphi_{a,h}) = 1/mp^h$, et (13) peut se lire :

$$(14) \quad f(a) = \lim_{h \rightarrow \infty} ((\mu | f \varphi_{a,h}) / (\mu | \varphi_{a,h})).$$

Plus généralement, si μ est une distribution tempérée quelconque, et G_μ la fonction analytique associée, on a

$$m_h(G_\mu(T)) = mp^h (\mu | \varphi_{0,h} \theta_T) = \frac{(\mu | \varphi_{a,h} \theta_T)}{(\nu | \varphi_{a,h} \theta_T)} \times \frac{(\nu | \varphi_{a,h} \theta_T)}{(\nu | \varphi_{a,h} \theta_1)}$$

où ν correspond à la distribution invariante, $G_\nu(T) = -(\text{Log } T)/(1-T)$. On a déjà montré que $m_h(G_\nu(T)) \rightarrow \theta_T(0) = 1$ (lemme 2.2). Donc, dire que " $m_h(G_\mu(T))$ a une limite quand $h \rightarrow \infty$ " équivaut à " $(\mu | \varphi_{a,h} \theta_T) / (\nu | \varphi_{a,h} \theta_T)$ à une limite". On montre de même la partie (ii) du corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.6. - Soit G une fonction analytique sur D_n , qui y est $\mathcal{O}(\text{Log})$, et μ l'unique distribution tempérée telle que $G = G_\mu$, i. e. $G(T) = (\mu | \theta_T)$. Pour $h \geq 0$, on pose

$$m_h(G)(T) = \sum_{\gamma \in \mu_{mp^h}} G(\gamma T)$$

(i) $\lim_{h \rightarrow \infty} m_h(G)(T)$ existe si, et seulement si, $\lim_{h \rightarrow \infty} (\mu | \varphi_{0,h} \theta_T) / (\nu | \varphi_{0,h} \theta_T)$ existe, ces deux limites sont égales, indépendantes de T .

(ii) pour $a \in \mathbb{Z}_p(n)$, $\lim_{h \rightarrow \infty} m_h(T^{-a} G)(T)$ existe si, et seulement si, $\lim_{h \rightarrow \infty} (\mu | \varphi_{a,h} \theta_T) / (\nu | \varphi_{a,h} \theta_T)$ existe, ces deux limites sont égales, indépendantes de T , leur valeur commune est appelée la densité de μ par rapport à ν au point a .

Dans le vocabulaire de ce corollaire, la proposition 3.5 signifie donc que les "transformées de Fourier" \hat{f}_μ ont une densité par rapport à ν en tout point de

$\mathbb{Z}_p^{(n)}$ et que cette densité est égale à f .

4. Valeurs en $T = 1$.

On sait [1] que lorsque $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p^{(n)})$, $F_f(T) = \sum_{n \geq 0} f(n) T^n$ est un élément analytique nul à l'infini sur $\Delta_n = \{T \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) ; |T^n - 1| \geq 1\}$. La décomposition de Mittag Leffler de F_f , relative aux trous $B_\zeta = \{T ; |\zeta T - 1| \leq 1\}$, $\zeta \in \mu_n$, est de la forme

$$(15) \quad F_f(T) = \sum_{\zeta \in \mu_n} F_{f_\zeta}(\zeta T) \quad \text{où } f_\zeta \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p) \text{ et } F_{f_\zeta} \in H_0(\Delta_1).$$

On sait que les fonctions f_ζ peuvent être calculées par les relations

$$(16) \quad f_\zeta(n) = \frac{1}{n} \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-(n+ip^h)} f(n+ip^h) \right).$$

Dans le cas particulier où $f_1 = 0$, F_f est un élément analytique sur $\Delta_n \cup B_1$ et la relation (2) donne

$$G(f, 1) = F_{f_1}(1).$$

On sait [3] que si $f = \chi \langle \rangle^s$ où χ est un caractère de Dirichlet modulo np^e dont le facteur modulo n est non trivial, $f_1 = 0$, ce qui donne la relation (1).

Nous noterons $\mathcal{C}_0(\mathbb{Z}_p^{(n)})$ (resp. $\mathcal{C}_{u,0}^1(\mathbb{Z}_p^{(n)})$) le sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p^{(n)})$ (resp. $\mathcal{C}_{u,0}^1(\mathbb{Z}_p^{(n)})$) constitué des fonctions f pour lesquelles $f_1 = 0$. Remarquons qu'une comparaison entre les parties principales des deux membres de (2) relatives à un trou de Δ_n montre que $f_\zeta = 0 \implies (f')_\zeta = 0$, car $(f')_\zeta = f'_\zeta$. En particulier, si $f \in \mathcal{C}_{u,0}^1(\mathbb{Z}_p^{(n)})$, $f' \in \mathcal{C}_0(\mathbb{Z}_p^{(n)})$.

LEMME 4.1. - Pour $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{Z}_p^{(n)})$, $(f * 1)_1$ est constante sur \mathbb{Z}_p , et on a
 $(f * 1)_1 = F_f(1)$.

En effet, $F_{(f * 1)_1}(T)$ est la partie principale relative au trou B_1 de $(1/(1-T)) F_f(T)$. Comme $f_1 = 0$, F_f est analytique sur B_1 , et la partie principale en question est $F_f(1)/(1-T)$, d'où le lemme.

LEMME 4.2. - Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p^{(n)})$, $t \in \mathbb{Z}_p$ et $\zeta \in \mu_n$, on a

$$(17) \quad f_\zeta(t) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{p_1(x)=t \\ p_2(x)=t}} \zeta^{-p_1(x)} f(x)$$

où p_1 et p_2 désignent les projections naturelles de $\mathbb{Z}_p^{(n)}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et \mathbb{Z}_p respectivement.

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(n, p) = 1$, la famille $\{n + ip^h\}_{i=0, \dots, n-1}$ est, pour chaque h , un système de représentants modulo n . Soit σ_h la permutation de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ telle que

$$n + \sigma_h(i) p^h \equiv i \pmod{n}.$$

Pour n et i fixés, lorsque h tend vers l'infini, la suite d'entiers $n + \alpha_h(i) p^h$ tend, dans $\underline{\mathbb{Z}}_p(n)$, vers l'élément $\alpha_i(n)$ tel que $p_1(\alpha_i(n)) = i$ et $p_2(\alpha_i(n)) = n$. Comme f est continue, la formule (16) signifie donc que

$$f_{\xi}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-i} f(\alpha_i(n))$$

ce qui est exactement (17) dans le cas où $t = n$. La formule générale (17) en résulte par densité de $\underline{\mathbb{N}}$ et continuité des deux membres.

PROPOSITION 4.3. - Soit $f \in \mathcal{C}_0(\underline{\mathbb{Z}}_p(n))$, alors

$$(18) \quad (f * 1)_1 = F_f(1) = \frac{-1}{n} \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \sum_{j=0}^{p^h-1} f(j + ip^h) \right).$$

En effet, d'après 4.2, en choisissant $t = -1$,

$$(f * 1)_1 = \frac{1}{n} \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{ip^h-1} f(j + ip^h) \right) = \frac{1}{n} \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \sum_{j=0}^{p^h-1} f(j + ip^h) \right).$$

Mais comme

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p^h-1} f(j + ip^h) = \lim_{h \rightarrow \infty} (f * 1)(np^h - 1) = 0$$

la proposition s'en déduit.

En appliquant cette proposition au cas où $f = (\chi \omega^{-1})_{s-1}$ et en appliquant (1), on obtient :

$$L_p(1-s, \chi) = -\frac{1}{n} \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \sum_{j=0}^{p^h-1} \chi \omega^{-1}(j + ip^h) \langle j + ip^h \rangle^{1-s} \right).$$

Pour $h \geq 1$, $\omega^{-1}(j + ip^h) = \omega^{-1}(j)$ et $|\langle j + ip^h \rangle^{1-s} - \langle j \rangle^{1-s}| \leq K_s p^{-h}$, on a donc aussi

$$(19) \quad L_p(1-s, \chi) = -\frac{1}{n} \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{p^h-1} \omega^{-1}(j) \langle j \rangle^{1-s} \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \chi(j + ip^h) \right) \right).$$

Soit $\chi = \chi_0 \varphi$, où χ_0 est modulo n et φ modulo p^e , alors pour $h \geq e$,

$$\chi(j + ip^h) = \varphi(j) \chi_0(j + ip^h)$$

et si α est l'ordre de p dans $(\underline{\mathbb{Z}}/n\underline{\mathbb{Z}})^\times$, i. e. $p^\alpha = 1 \pmod{n}$, on a

$$\chi(j + ip^{n\alpha}) = \varphi(j) \chi_0(j + i).$$

Comme χ_0 est supposé non trivial,

$$a(j) = \sum_{i=0}^{n-1} i \chi_0(j + i) = \sum_{i=0}^{n-1} (j + i) \chi_0(j + i)$$

est de période n , et on montre aisément que pour $0 \leq j < n$,

$$a(j) = a(0) + n(\chi(0) + \chi(1) + \dots + \chi(j-1)).$$

COROLLAIRE 4.4.

$$(20) \quad L_p(1-s, \chi) = - \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{h-1} \varphi(j) \omega^{-1}(j) \langle j \rangle^{1-s} b(j) \right)$$

où $b(j)$ est la fonction de période n telle que

$$b(0) = 0 \quad \text{et} \quad b(j) = \chi(0) + \dots + \chi(j-1) \quad \text{pour} \quad 1 \leq j < n.$$

Pour $s = 1$, la formule (19) se trouve dans [7].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Fonctions analytiques dans le complémentaire d'une famille de disques, Séminaire de Théorie des nombres, Université de Bordeaux, 1968/69, n° 8.
- [2] AMICE (Y.). - Duals, "Proceedings of the conference on p-adic analysis" [1978. Nijmegen] p. 1-15. - Nijmegen, Mathematisch Instituut Universiteit, 1978.
- [3] AMICE (Y.). - Prolongement analytique des sommes de Gauss, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, n° 13, 9 p. et n° J1, 14 p.
- [4] BARSKY (D.). - Mesures p-adiques à densité, Koninkl. nederl. Acad. Wetensch. Proc., Series A, t. 79, 1976, p. 388-399.
- [5] BARSKY (D.). - Sur la norme de certaines séries d'Iwasawa (Une démonstration analytique p-adique du théorème de Ferrero-Washington), Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 10e année, 1982/83, n° 13, 44 p.
- [6] BRUHAT (F.). - Intégration p-adique, Séminaire Bourbaki, 14e année, 1961/62, n° 229, 16 p.
- [7] WASHINGTON (L. C.). - Introduction to cyclotomic fields. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982 (Graduate Texts in Mathematics, 83).