Philippe Robba

Structure de Frobenius faible pour les équations différentielles du premier ordre

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 20, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A17_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 20, 11 p.
26 mai 1975

STRUCTURE DE FROBENIUS FAIBLE POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

par Philippe ROBBA

(D'après un travail en commun avec B. DWORK)

1. Introduction.

1.1. Soit K un corps valué ultramétrique complet, de caractéristique 0, et dont le corps résiduel $\overline{K}$ est de caractéristique p. Soit Ω une extension algébriquement close et complète de K (on introduit Ω pour pouvoir considérer les éléments analytiques).

Soit $\Delta = D(0, 1^-)$ la boule unité de Ω. On notera $H = H(\Delta)$ l'espace des éléments analytiques sur Δ à coefficients dans K.

Soit σ un automorphisme de Ω, préservant la valuation, induisant un automorphisme sur K, qui relève le Frobenius sur $\overline{\Omega}$, corps résiduel de Ω (c'est-à-dire que l'on a, pour tout a de l'anneau de valuation de Ω, $\overline{\sigma(a)} = \bar{a}^p$). En particulier sur $\mathbb{Q}_p$, qui s'identifie à un sous-corps de K, σ coïncide avec l'application identique.

Pour $u \in \Omega((X))$, $u = \sum_n a_n X^n$, on pose $\sigma(u) = \sum_n \sigma(a_n) X^n$.

Soit W_0^1 l'espace des fonctions analytiques bornées dans Δ. Il est clair que σ définit un automorphisme (isométrique) de W_0^1, resp. $K(X)$, resp. H, sur lui-même. Nous expliquerons, au paragraphe 2.1, l'intérêt de l'introduction de σ.

1.2. Dans [2], DWORK définit une notion de Frobenius faible et fort pour les systèmes différentiels du 1er ordre. Nous allons rappeler cette définition dans le cas d'une seule équation, cas que nous allons étudier.

Si l'opérateur $D - \eta$, avec $\eta \in H$, a une solution dans W_0^1, nous choisirons toujours une solution u normalisée par la condition $u(0) = 1$, ainsi u aura ses coefficients dans K.

Définition 1. - Soit $L = D - \eta$, $\eta \in H$, possédant une solution u dans W_0^1. Nous dirons que L a une structure de Frobenius faible s'il existe $L_1 = D - \eta_1$, $\eta_1 \in H$, possédant une solution v dans W_0^1, telle que $u(X)/\sigma v(X^p)$ appartienne à H.

(A vrai dire, dans sa définition originelle, DWORK ne considère que des opérateurs à coefficients dans $K(X)$, et ajoute une condition supplémentaire sur la multiplicité des singularités de L_1, condition qui perd toute signification dans le cas où les coefficients sont des éléments analytiques.)

Cette définition est suivie de la conjecture ci-dessous.

Conjecture. - Un tel opérateur L a toujours une structure de Frobenius faible (et DWORK ajoute : It seems reasonable to believe that it will be possible to check this conjecture for the case $n = 1$).

Le résultat essentiel de cet exposé est la démonstration de cette conjecture (§4.2).

L'opérateur L_1 ainsi défini sera appelé un successeur de L. Si la conjecture est réalisée, il existe une suite d'opérateurs différentiels $(L_n)_{n\geq 0}$, où $L_0 = L$ et L_{n+1} est un successeur de L_n. Une telle suite sera appelée une suite de Frobenius. Il n'y a pas une seule suite de Frobenius attachée à un opérateur L, mais nous verrons, au paragraphe 3, que toutes les suites attachées à L sont équivalentes (en un sens précisé au §3).

Définition 2. - On dit que L a une structure de Frobenius forte si une des suites de Frobenius, attachée à L, est périodique.

(On aura une formulation plus agréable de cette définition lorsqu'on aura défini la notion d'équivalence mentionnée précédemment.)

C'est en fait la structure de Frobenius forte qui est importante pour les applications. Si u est solution de L, et si L a une structure de Frobenius forte, alors pour un k entier > 0, $u(X)/\sigma^k\, u(X^{p^k}) \in H$. Nous montrerons (§6) comment réciproquement, si $u(X)/\sigma^k\, u(X^{p^k}) \in H$ pour un $k > 0$, alors $u'/u \in H$.

Nous discuterons un peu plus en détail la structure de Frobenius fort, au paragraphe 5. On y traitera un exemple qui se trouvait déjà dans [2], mais qui sera étudié dans l'esprit de cet exposé. On donnera également des conditions nécessaires qui généralisent celles de [2].

Nous montrerons également le caractère global de la structure de Frobenius (§6). Précisément : Soit $L = D - \eta$, $\eta \in H$, possèdant une solution u dans W_0^1, et supposons que η se prolonge dans une union de classes résiduelles A, alors il existe un successeur L_1, de L, ayant pour solution v dans W_0^1, tel que $u(X)/\sigma v(X^p)$ se prolonge dans A.

2. Notations et rappels.

2.1. Si $u \in \Omega((X))$, $u = \sum_n a_n X^n$, on pose $\varphi(u) = \sum_n a_n X^{np}$. Il est clair que φ est un endomorphisme (isométrique) de W_0^1, resp. $K(x)$, resp. H, dans lui-même.

Par contre, si A est une union de classes résiduelles qui n'est pas stable pour l'application $X \longmapsto X^p$, φ ne réalise pas un endomorphisme de $H(A)$. C'est pour cette raison que l'on introduit l'automorphisme σ. Si $R \in K(X)$, soit $R(X) = \pi(X - a_i)/\pi(X - b_j)$ $(a_i , b_j \in \Omega$, on a $\sigma\varphi R(X) = \pi(X^p - \sigma(a_i))/\pi(X^p - \sigma(b_j))$, et d'après la définition de σ, on voit que $X^p - \sigma(b_j)$ s'annule dans la classe résiduelle de b_j. Par conséquent les pôles de $\sigma\varphi(R)$ sont situés dans les mêmes classes résiduelles que les pôles de R et donc, si $R \in K(X) \cap H(A)$, $\sigma\varphi R \in K(X) \cap H(A)$. Par passage à la limite (car $K(X) \cap H(A)$ est dense dans $H(A)$), on voit que $\sigma\varphi$ réalise un endomorphisme de $H(A)$.

Si $f \in H$ se prolonge dans la couronne $r < |X - \alpha| < 1$, $|\alpha| = 1$, on vérifie également que $\sigma\varphi(f)$ se prolonge dans une couronne $r' < |X - \alpha| < 1$ avec $r \leq r' < 1$, et en général on ne peut pas prendre $r' = r$, il faut $r' > r$. (Enoncé similaire dans la couronne $1 < |X| < r$.)

Pour ne pas alourdir l'écriture, on posera $\tilde{\varphi} = \sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$.

2.2. Si $u \in \Omega((X))$, $u = \sum_n a_n X^n$, on pose $\psi(u) = \sum_n a_{np} X^n$. Il est clair que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. De plus, on voit que ψ est un endomorphisme continu de W_0^1. Ce qui est intéressant c'est que ψ réalise un endomorphisme de $K(X)$ et donc aussi (par passage à la limite) de $H(\Delta)$.

Pour $R \in K(X)$, on a la formule intéressante

$$\psi R(X) = \frac{1}{p} \sum_{Z^p = X} R(Z) .$$

Là encore, si A est une union de classes résiduelles, ψ n'est en général pas un endomorphisme de $H(A)$, mais $\sigma^{-1}\psi$ en est un. On posera

$$\tilde{\psi} = \sigma^{-1} \circ \psi = \psi \circ \sigma^{-1} .$$

Si $f \in H$ se prolonge dans la couronne $r < |X - \alpha| < 1$, $|\alpha| = 1$, $\tilde{\psi}f$ se prolonge dans une couronne $r' < |X - \alpha| < 1$ avec $r \leq r' < 1$.

2.3. Soit π tel que $\pi^{p-1} = -p$. Il est classique que $|\pi|$ est le rayon de convergence de l'exponentielle.

2.4. Si A est une union de classes résiduelles, on pose

$$H_A = H(A) , \quad \mathcal{B}_A = \{f \in H_A ; \quad |f| < |\pi|\} ,$$

$$\mathcal{Y}_A = \{R'/R ; \quad R \in K(X) \text{ sans pôles ni zéros dans } A\} ,$$

$$U_A = \mathcal{Y}_A + (d\mathcal{B}_A/dx) ,$$

$$V_A = \text{adhérence de } \mathcal{Y}_A \text{ dans } H_A , \quad V_A^k = \mathcal{Y}_A + p^k \mathcal{B}_A \quad \text{avec } k \in \underset{\sim}{Z} .$$

Lorsque $A = \Delta = D(0, 1^-)$, on écrira simplement H, $\mathcal{B}$, $\mathcal{Y}$, etc.

Tous ces ensembles sont des sous-groupes additifs de H_A, et on a les inclusions

$$\mathcal{Y}_A \subset U_A \subset V_A \subset \ldots \subset V_A^{k+1} \subset V_A^k \subset \ldots \subset H_A .$$

La seule inclusion non évidente est $U_A \subset V_A$; elle résulte des théorèmes 2.5 et 2.6 ci-dessous. On a bien sûr

$$V_A = \bigcap_k V_A^k \quad \text{et} \quad H_A = \bigcup_k V_A^k .$$

2.5. THÉORÈME ([4], théorème 3.1). - <u>Soit</u> $\eta \in H$. <u>Il existe</u> $u \in W_0^1$ <u>tel que</u> $\eta = u'/u$ <u>si, et seulement si,</u> $\eta \in V$. <u>De plus, si</u> A <u>est une union de classes</u>

résiduelles contenant Δ , $V \cap H_A = V_A$.

2.6. THÉORÈME ([4], théorème 4.1). - Soit $\eta \in H$. Il existe $u \in H$ tel que $\eta = u'/u$ si, et seulement si, $\eta \in U$. De plus, si A est une union de classes résiduelles contenant Δ , $U \cap H_A = U_A$.

2.7. THÉORÈME ([3], proposition 1 et [4], théorème 4.5). - Soit A une union de classes résiduelles contenant Δ , et soient η et $u \in H$ avec $u'/u = \eta$. Si $\eta \in H_A$ (et s'annule à l'infini si $\infty \in A$), alors $u \in H_A$. Si η se prolonge dans la couronne $r < |X - \alpha| < 1$, $|\alpha| = 1$, u se prolonge dans une couronne $r' < |X - \alpha| < 1$, avec $r \leq r' < 1$.

3. Autre formulation de la structure de Frobenius.

Comme l'opérateur différentiel $L = D - \eta$ est entièrement caractérisé par la donnée de η , nous parlerons de la structure de Frobenius de η , d'un successeur de η , etc.

3.1. Observons d'abord que la notion de successeur, qui a été définie pour $\eta \in V$, peut être généralisée au cas de $\eta \in H$.

Définition. - Soit $\eta \in H$. On dit que $\xi \in H$ est un successeur de η si, pour u et v définis au voisinage de 0 , avec $u'/u = \eta$ et $v'/v = \xi$ (et $u(0) = v(0) = 1$), on a $u/\tilde{\varphi}v \in H$.

3.2. Nous allons maintenant discuter le problème de l'unicité du successeur. Pour cela, définissons la relation d'équivalence.

Définition. - Soient η et $\xi \in H$. On dit que $\eta \sim \xi$ si, et seulement si $\eta - \xi \in U$.

D'après le théorème 2.6, ceci signifie que si u et v sont définis au voisinage de 0 avec $\eta = u'/u$ et $\xi = v'/v$, alors $u/v \in H$.

3.3. LEMME. - Soient η et $\xi \in H$. Supposons que ξ soit un successeur de η . Alors si $\eta \sim \eta_1$, ξ est un successeur de η_1 ; si $\xi \sim \xi_1$, ξ_1 est un successeur de η .

Démonstration. - C'est évident si l'on remarque que, pour f , $g \in H$,

$$\tilde{\varphi}(f/g) = \tilde{\varphi}(f)/\tilde{\varphi}(g) .$$

3.4. LEMME. - Soit $\eta \in H$. Si ξ_1 et ξ_2 sont deux successeurs de η , on a $\xi_1 \sim \xi_2$.

Démonstration. - Il suffit de remarquer que si f est définie au voisinage de 0 et $\tilde{\varphi}(f) \in H$, alors $f \in H$. Mais ceci résulte du fait que $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} = \mathrm{id}$, et que $\tilde{\psi}$ est un endomorphisme de H .

3.5. LEMME. - Si $\eta \in V$, et si ξ est un successeur de η , alors $\xi \in V$.

Démonstration. - C'est évident en tenant compte du théorème 2.5.

3.6. D'après le lemme 3.3, on voit que la notion de successeur est définie sur la classe quotient $\dot{H} = H/U$ (mais tout élément de $\dot{H}$ n'a pas nécessairement un successeur). D'après le lemme 3.4, lorsque le successeur d'un élément de $\dot{H}$ existe, il est unique. Enfin, d'après le lemme 3.5, le successeur d'un élément de $\dot{V} = V/U$ appartient à $\dot{V}$.

Lorsque $\dot{\eta} \in \dot{H}$ a un successeur $\dot{\xi}$, on écrira $\dot{\xi} = \dot{\omega}(\dot{\eta})$.

3.7. Observons que tout élément ξ de H a un prédécesseur évident. Si $\xi = v'/v$ au voisinage de 0 et $u = \tilde{\varphi}v$, on a $\eta = u'/u = pX^{p-1}\,\tilde{\varphi}(\xi) \in H$. Donc ξ est un successeur de η (puisque $u/\tilde{\varphi}v = 1 \in H$!).

On posera, pour $f \in H$, $\theta(f) = pX^{p-1}\,\tilde{\varphi}(f) = (p/X)\tilde{\varphi}(Xf)$.

On voit facilement que deux prédécesseurs d'un même élément de H sont équivalents. Donc la notion de prédécesseur est bien définie dans $\dot{H}$, c'est l'application $\dot{\theta}$ de $\dot{H}$ dans lui-même, quotient de l'application θ .

Le domaine de définition de $\dot{\omega}$ est donc $\dot{\theta}(\dot{H})$, et l'on a $\dot{\omega} \circ \dot{\theta} = \mathrm{id}$.

La conjecture sur l'existence d'une structure faible de Frobenius équivaut à dire que $\dot{\theta}$ réalise un automorphisme de $\dot{V}$. D'après ce qu'on a vu, tout ce qui nous reste à démontrer est que $\dot{V} \subset \dot{\theta}(\dot{H})$.

Nous démontrerons la conjecture en construisant explicitement l'application $\dot{\omega}$ sur $\dot{V}_0 = V_0/U$, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

4. Structure de Frobenius faible.

4.1. LEMME. - Soit $f \in H$. Il existe $g \in H$ tel que $|g| \leq |f|$ et

$$f - \frac{1}{X}\varphi \circ \psi(Xf) = g' .$$

Démonstration. - Comme K n'est pas algébriquement clos, nous allons devoir travailler dans $\mathcal{K}$ = espace des éléments analytiques sur Δ à coefficients dans Ω . Remarquons que si le lemme est démontré pour f et g dans $\mathcal{K}$, il l'est pour f et g dans H , car φ et ψ sont des endomorphismes de H , et

$$(d\mathcal{K}/dX) \cap H = dH/dX .$$

Grâce au théorème de décomposition de Mittag-Leffler, on sait qu'une base normale de $\mathcal{K}$ est formée des fonctions X^n , $n \in \underset{\sim}{N}$, et $1/(X-\alpha)^n$, $n \in \underset{\sim}{N}$, où les α forment un système de représentants des classes résiduelles de Ω , $|\alpha| = 1$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour f de la forme X^n ou $1/(X-\alpha)^n$.

(i) Si $f = X^n$, on trouve

$$X^n - \frac{1}{X}\varphi\psi(X^{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \mid n+1 \\ X^n = \frac{d}{dX}\left(X^{n+1}/(n+1)\right) & \text{si} \quad (p\ ,\ n+1) = 1 \end{cases}$$

et si $(p\ ,\ n+1) = 1$, $|n+1| = 1$, ce qui montre que $|g| \leq |f|$.

(ii) Si $f = 1/(X-\alpha)^{n+1}$, $n > 0$.

Posons $\delta = X\frac{d}{dX}$, et observons que $\varphi \circ \psi \circ \delta = \delta \circ \varphi \circ \psi$, et donc

$$\varphi\psi \frac{X}{(X-\alpha)^{n+1}} = -\frac{1}{n}\varphi\psi\delta \frac{1}{(X-\alpha)^n} = -\frac{1}{n}\delta\varphi\psi \frac{1}{(X-\alpha)^n}$$

et

$$\frac{1}{(X-\alpha)^{n+1}} - \frac{1}{X}\varphi\psi\frac{X}{(X-\alpha)^{n+1}} = -\frac{1}{n}\frac{d}{dX}\frac{1}{(X-\alpha)^n} + \frac{1}{n}\frac{d}{dX}\varphi\psi\frac{1}{(X-\alpha)^n} = g'$$

avec

$$g = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(X-\alpha)^n} - \varphi\psi\frac{1}{(X-\alpha)^n}\right)$$

et il nous reste à démontrer que $|g| \leq |1/(X-\alpha)^{n+1}| = 1$, ce qui est évident si $(n\ ,\ p) = 1$.

Soit alors $n = mp^k$, $(m\ ,\ p) = 1$, $k \geq 1$.

On a (R_1 , R_2 ... désignant des fractions rationnelles),

$$\frac{1}{(X-\alpha)^p} = \frac{1}{(X^p - \alpha^p)} + pR_1(X) \ , \qquad |R_1| \leq 1 \ ;$$

donc

$$\frac{1}{(X-\alpha)^{mp}} = \frac{1}{(X^p - \alpha^p)^m} + pR_2(X) \ , \qquad |R_2| \leq 1$$

et

$$\frac{1}{(X-\alpha)^n} = \frac{1}{(X^p - \alpha^p)^{mp^{k-1}}} + p^k R_3(X) \ , \qquad |R_3| \leq 1 \ .$$

Alors, comme $\varphi\psi R(X^p) = R(X^p)$ pour $R \in K(X)$, on aura

$$-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(X-\alpha)^n} - \varphi\psi\frac{1}{(X-\alpha)^n}\right) = +\frac{p^k}{n}\varphi\psi R_3(X) = \frac{1}{m}\varphi\psi R_3(X)$$

ce qui achève la démonstration.

(iii) Soit $f = \frac{1}{X-\alpha}$. On a

$$\psi\frac{X}{X-\alpha} = \psi\left(1 - \frac{1}{1-(X/\alpha)}\right) = \psi\sum_{j\geq 1}\frac{X^j}{\alpha^j} = \sum_{j\geq 1}\frac{X^j}{\alpha^{pj}} = \frac{X}{X-\alpha^p}$$

donc

$$\frac{1}{X}\varphi\psi\frac{X}{X-\alpha} = \frac{1}{X}\frac{X^p}{X^p-\alpha^p} = \frac{X^{p-1}}{X^p-\alpha^p}$$

et finalement

$$\frac{1}{X-\alpha} - \frac{1}{X}\varphi\psi\frac{X}{X-\alpha} = \frac{1}{X-\alpha} - \frac{X^{p-1}}{X^p-\alpha^p} = g' \ , \text{ avec } \ g = \frac{1}{p}\log\frac{(X-\alpha)^p}{X^p-\alpha^p} \ .$$

Or

$$|1 - \frac{(X-\alpha)^p}{X^p - \alpha^p}|_{\text{Gauss}} = |\frac{X^p - \alpha^p - (X-\alpha)^p}{X^p - \alpha^p}| \leqslant |p| ,$$

ce qui montre que

$$\log \frac{(X-\alpha)^p}{X^p - \alpha^p} \in H \quad \text{et} \quad |\log \frac{(X-\alpha)^p}{X^p - \alpha^p}| = |1 - \frac{(X-\alpha)^p}{X^p - \alpha^p}| \leqslant |p|$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

4.2. Démonstration de la conjecture. - En vertu du paragraphe 3.7, tout ce que nous avons à démontrer est que $\dot{V} \subset \dot{\theta}(\dot{H})$. Nous démontrerons un peu plus : nous allons montrer que $\dot{V}_0 \subset \dot{\theta}(\dot{H})$.

Soit $\dot{\eta} \in \dot{V}_0$, et soit η un représentant de $\dot{\eta}$ appartenant à $\mathfrak{B}$.

Posons $\xi = \frac{1}{pX} \tilde{\psi}(X\eta)$. On a alors

$$\theta(\xi) = \frac{p}{X} \tilde{\varphi}(X \frac{1}{pX} \tilde{\psi}(X\eta)) = \frac{1}{X} \varphi \circ \psi(X\eta) .$$

Il résulte alors du lemme 4.1 que

$$\eta - \theta(\xi) = \eta - \frac{1}{X} \varphi \circ \psi(X\eta) \in \frac{d\mathfrak{B}}{dx} ,$$

ce qui montre que $\eta - \theta(\xi) \in U$ et donc $\dot{\eta} = \dot{\theta}(\dot{\xi})$.

4.3. Remarques.

(i) Posons, pour $f \in H$, $\omega(f) = \frac{1}{pX} \tilde{\psi}(Xf)$.

Soient η_1 et $\eta_2 \in \mathfrak{B}$ avec $\eta_1 \sim \eta_2$. Soit $\xi_1 = \omega(\eta_1)$ et $\xi_2 = \omega(\eta_2)$. En vertu de ce qu'on vient de voir, $\dot{\theta}(\dot{\xi}_1) = \dot{\eta}_1 = \dot{\eta}_2 = \dot{\theta}(\dot{\xi}_2)$ et donc, en vertu du lemme 3.4, $\xi_1 \sim \xi_2$. Ceci montre que si $\eta \in \mathfrak{B} \cap U$, alors $\omega(\eta) \in U$. Donc, sur $\mathfrak{B}$, l'application ω est compatible avec la relation d'équivalence et on voit que son image dans la classe quotient $\dot{V}_0$ est l'inverse, dans $\dot{V}_0$, de l'application $\dot{\theta}$.

(ii) On a utilisé le lemme 3.5 pour montrer que si $\dot{\eta} \in \dot{V}$ alors $\dot{\omega}(\dot{\eta}) \in \dot{V}$.

On peut le voir directement de la façon suivante. Il est clair que l'application ω envoie $p^k \mathfrak{B}$ dans $p^{k-1} \mathfrak{B}$, $k \in \underline{Z}$. Donc, par passage au quotient, $\dot{\omega}$ envoie $\dot{V}_k$ dans $\dot{V}_{k-1}$, $k \geq 0$. Comme $\dot{V} = \bigcap_k \dot{V}_k$, on voit que $\dot{\omega}(\dot{V}) \subset \bigcap_k \dot{V}_k = \dot{V}$.

Autre démonstration : On a vu à la remarque (i) que $\omega(\mathfrak{B} \cap U) \subset U$. Comme U est dense dans V et que l'application ω est continue, on en déduit que $\omega(\mathfrak{B} \cap V) \subset V$ et donc, par passage au quotient, $\dot{\omega}(\dot{V}) \subset \dot{V}$.

5. Structure de Frobenius forte.

5.1. Comme on l'a remarqué, il y a plusieurs suites de Frobenius attachées à $\eta \in V$. Mais en classes quotients, il n'y a plus qu'une seule suite de Frobenius. On voit alors que dire que η a une structure de Frobenius forte équivaut à dire qu'il existe k entier > 0, tel que $\dot{\omega}^k(\dot{\eta}) = \dot{\eta}$ (Et par conséquent, si deux suites de Frobenius attachées à η sont périodiques, leurs périodes coïncident). Mais ceci a lieu si, et seulement si, $\dot{\theta}^k(\dot{\eta}) = \dot{\eta}$, autrement dit si $\theta^k(\eta) \sim \eta$.

5.2. Exemples : Soit $\eta = \pi$ (Rappelons que $\pi^{p-1} = -p$). On a $\theta(\eta) = -p\pi X^{p-1}$. Montrons que $\pi(1 - pX^{p-1}) \in U$. Soit $R(X) = \frac{1}{1 - \pi X}$. On a

$$\pi - p\pi X^{p-1} - R'(X)/R(X) = \pi + \pi^p X^{p-1} - \frac{\pi}{1 - \pi X} = \sum_{j\geq 1, j\neq p-1} \pi^{j+1} X^j = g'$$

avec $g = \sum_{j>1, j\neq p} (\pi X)^j/j$. Il est clair que $|\pi^j/j| \longrightarrow 0$ quand $j \longrightarrow +\infty$ et que, pour $j \neq 0, 1, p$, $|\pi^j/j| < |\pi|$. Donc $g \in \mathcal{B}$, et la propriété est démontrée.

Il en résulte que $\exp(\pi X - \pi X^p) \in H$. En fait, comme $\exp(\pi X - \pi X^p) = R(X)\exp(g(X))$, on voit que la fonction $\exp(\pi X - \pi X^p)$ converge dans un disque $D(0, r^-)$ avec $r > 1$. Cette remarque sera systématisée au paragraphe 6.4.

Ce résultat n'est pas nouveau, et cet exemple était indiqué par DWORK dans [2]. Mais les démonstrations antérieures s'appuyaient sur les propriétés des séries de Artin-Hasse. De plus, on obtient une estimation du rayon de convergence r, à savoir $r \geq p^{(p-1)/p^2}$.

La démonstration que nous avons donnée ici permet également d'obtenir une estimation du rayon de convergence (il suffit d'avoir une estimation du rayon de convergence de $\exp g(x)$), mais on trouve une moins bonne estimation :

$$r \geq \inf(p^{1/2(p-1)}, p^{(p-1)/p^2}).$$

On peut améliorer cette estimation par un meilleur choix de la fraction R, par exemple en prenant $R(X) = (1 - (\pi^2 X^2/2))/1 - \pi X$, $p \neq 2$, ce qui donne

$$r \geq \inf(p^{2/3(p-1)}, p^{(p-1)/p^2}).$$

5.3. Nous allons établir une condition nécessaire pour que $\eta \in V$ possède une structure de Frobenius forte.

Soit $\bar{\alpha}$ une classe résiduelle, et soit α un représentant de $\bar{\alpha}$, $|\alpha| = 1$. Soit $f \in H$, et soit $f_{\bar{\alpha}} = c_\alpha/(X - \alpha) + \dots$ sa partie singulière relative au trou $\bar{\alpha}$. Il est bien connu que le coefficient c_α ne dépend pas du représentant α choisi. On dira que $c_\alpha = \text{Rés}(f, \bar{\alpha})$ est le résidu de f relatif à la classe $\bar{\alpha}$.

Si $\eta = R'/R \in \mathcal{V}$, il est bien connu que le résidu de η relatif à la classe $\bar{\alpha}$ est la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles de R dans $\bar{\alpha}$, c'est donc un entier relatif.

Comme V est l'adhérence de $\mathcal{V}$, on en déduit que si $\eta \in V$, son résidu relatif à $\bar{\alpha}$ appartient à $\underset{\sim}{Z}_p$.

Si $\eta \in \frac{dH}{dx}$, il est tout à fait évident que son résidu relatif à n'importe quelle classe est nul. Par conséquent, si $\eta \in U = \mathcal{V} + \frac{d\mathcal{B}}{dX}$ son résidu relatif à $\bar{\alpha}$ appartient à $\underset{\sim}{Z}$. On voit donc qu'on peut définir le résidu d'un élément de $\dot{V}$ dans une classe $\overline{\alpha}$, ce résidu est un élément de $\underset{\sim}{Z}_p/\underset{\sim}{Z}$. Nous n'utiliserons pas cette notion de résidu d'une classe quotient, mais nous retiendrons que si $\eta_1 \sim \eta_2$, les résidus de η_1 et η_2 diffèrent par un entier.

Nous allons maintenant déterminer les résidus de $\theta(\eta)$ à partir de ceux de η.

Rappelons que $\theta(\eta) = pX^{p-1}\varphi(\eta) = pX^{p-1}\sigma\eta(X^p)$. Il apparait clairement sur cette formule que $\theta(\eta)_{\overline{\alpha}} = \theta(\eta_{\overline{\alpha}})$. On a alors

$$\text{Rés}(\theta(\eta)\ ,\ \overline{\alpha}) = \lim_{X\to\infty} X\theta(\eta)_{\overline{\alpha}} = \lim_{X\to\infty} pX^p\,\sigma\eta_{\overline{\alpha}}(X^p) = p\sigma(\text{Rés}(\eta\ ,\ \overline{\alpha}))\ .$$

Si $\eta \in V$, on a $\text{Rés}(\eta\ ,\ \overline{\alpha}) \in \underset{\sim}{Z}_p$, et donc $\sigma(\text{Rés}(\eta\ ,\ \overline{\alpha})) = \text{Rés}(\eta\ ,\ \overline{\alpha})$, et dans ce cas

$$\text{Rés}(\theta(\eta)\ ,\ \overline{\alpha}) = p\ \text{Rés}(\eta\ ,\ \overline{\alpha})\ .$$

Si $\eta \in V$ a une structure de Frobenius forte, il existe k entier > 0 tel que $\theta^k(\eta) \sim \eta$, et donc $p^k\ \text{Rés}(\eta\ ,\ \overline{\alpha}) - \text{Rés}(\eta\ ,\ \overline{\alpha}) \in \underset{\sim}{Z}$, ce qui signifie que le développement p-adique de $\text{Rés}(\eta\ ,\ \overline{\alpha})$ est de période k et donc que $\text{Rés}(\eta\ ,\ \overline{\alpha})$ est rationnel.

On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME. - <u>Pour que</u> $\eta \in V$ <u>ait une structure de Frobenius forte, il faut que tous ses résidus soient rationnels et que leurs développements</u> p-<u>adiques aient une période commune</u>.

Ces résultats généralisent les exemples considérés par DWORK dans [2], où il prenait $\eta = \dfrac{a}{1+X}$.

6. Globalités respectives d'une équation différentielle et de son Frobenius.

Par l'emploi du mot "<u>global</u>", nous signifions que nous ne nous intéressons plus seulement aux propriétés de η dans une seule classe résiduelle (à savoir $\Delta = D(0\ ,\ 1^-)$), mais que nous voulons savoir ce qui se passe dans les autres classes.

6.1. PROPOSITION. - <u>Soit</u> $\eta \in V$. <u>Il existe un successeur</u> $\xi \in V$ <u>de</u> η <u>tel que</u> ξ <u>se prolonge dans toute classe résiduelle où</u> η <u>se prolonge et tel que, si</u> η <u>se prolonge dans une couronne</u> $r < |X-\alpha| < 1$, $|\alpha| = 1$ (resp. $1 < |X| < r$), <u>alors</u> ξ <u>se prolonge dans une couronne</u> $r' < |X-\alpha| < 1$ (resp. $1 < |X| < r'$) <u>avec</u> $r \leqslant r' < 1$ (resp. $1 < r' \leqslant r$).

<u>Démonstration</u>. - Nous ne démontrerons pas le cas de la couronne $1 < |X| < r$ qui se traite comme celui de la couronne $r < |X-\alpha| < 1$.

Comme $\eta \in V$, il existe $R \in K(X)$ tel que $|\eta - R'/R| < |\pi|$, et l'on peut supposer de plus que R n'a ni pôles ni zéros dans les classes résiduelles où η se prolonge (c'est ce qu'on exprimait dans le théorème 2.5 en disant que $V \cap H_A = V_A$).

Donc $g = \eta - R'/R$ se prolonge dans toutes les classes où η se prolonge (resp. dans des couronnes $r_1 < |X - \alpha| < 1$ avec $r \leq r_1 < 1$). Il résulte alors du paragraphe 4.2 que $\xi = \omega(g)$ est un successeur de η . Mais comme $\omega = \frac{1}{pX} \tilde{\psi} \cdot X$, il résulte du paragraphe 2.2 que ξ se prolonge dans les classes résiduelles où g , donc η , se prolonge (resp. dans des couronnes $r' < |X - \alpha| < 1$ avec $r_1 \leq r' < 1$).

6.2. PROPOSITION. - Soit $\eta \in V$, et soit $\xi \in V$ un successeur de η . Soient u et $v \in W_0^1$ avec $u'/u = \eta$, $v'/v = \xi$. Si η et ξ se prolongent dans une classe résiduelle $\overline{\alpha} \neq \overline{\infty}$ (resp. dans une couronne $r < |X - \alpha| < 1$, $|\alpha| = 1$; resp. $1 < |X| < r$) alors $u/\tilde{\varphi}(v)$ se prolonge dans $\overline{\alpha}$ (resp. dans une couronne $r' < |X - \alpha| < 1$; resp. $1 < |X| < r'$) .

Démonstration. - En effet, $\eta - pX^{p-1} \tilde{\varphi}(\xi)$ se prolonge dans $\overline{\alpha}$ (resp. $r_1 < |X - \alpha| < 1$, resp. $1 < |X| < r_1$) , et la proposition est une conséquence immédiate du théorème 2.7.

6.3. COROLLAIRE. - Soit $\eta \in V$. Il existe un successeur $\xi \in V$ de η tel que, si u et $v \in W_0^1$ avec $u'/u = \eta$, $v'/v = \xi$, alors $u/\tilde{\varphi}(v)$ se prolonge dans toute classe résiduelle où η se prolonge, et se prolonge dans une couronne $r' < |X - \alpha| < 1$ (resp. $1 < |X| < r'$) si η se prolonge dans $r < |X - \alpha| < 1$ (resp. $1 < |X| < r$) .

6.4. Si $\eta \in V$ a une structure de Frobenius fort, on en déduit qu'il existe un k entier > 0 tel que, si $u'/u = \eta$ avec $u \in W_0^1$, alors $u/\tilde{\varphi}^k(u)$ se prolonge dans toutes les classes résiduelles où η se prolonge (resp. dans des sous-couronnes des couronnes où η se prolonge).

Il résulte du lemme 3.2 de [1] que si η se prolonge dans la classe $\overline{\alpha}$ et si $u_\alpha \in W_\alpha^1$ vérifie $u'_\alpha/u_\alpha = \eta$, alors $u_\alpha/\tilde{\varphi}^k(u_\alpha)$ est (à un facteur constant près) le prolongement de $u/\tilde{\varphi}^k(u)$ dans $\overline{\alpha}$.

Exemple. - Prenons $\eta = \pi$. D'après le paragraphe 5.2, on a une structure de Frobenius forte de période 1 . Donc $\exp(\pi X - \pi X^p)$ se prolonge dans toutes les classes résiduelles $\neq \overline{\infty}$ et dans une couronne $1 < |X| < r$, c'est dire que $\exp(\pi X - \pi X^p)$ converge dans un disque $D(0 , r^-)$ avec $r > 1$.

6.5. La réciproque à la remarque 6.4 est connue depuis longtemps (cf. le lemme 3.1 de [1]).

PROPOSITION. - Soit $u(X)$ analytique dans un voisinage de 0 . Supposons que $f = u/\tilde{\varphi}^k(u)$ appartienne à $H(A)$, où k est un entier > 0 , et A une union de classes résiduelles contenant 0 , et, de plus, ne s'annule pas dans A . Alors $\eta = u'/u$ appartient également à $H(A)$.

Démonstration. - On pose encore $\delta = X \frac{d}{dX}$. On a, dans une petite boule B de centre 0 ,

$$\delta f/f = \delta u/u - \delta\tilde{\varphi}^k(u)/\tilde{\varphi}^k u = \delta u/u - p^k \tilde{\varphi}^k(\delta u/u) ,$$

et donc, pour $s \geq 1$,

$$\frac{1}{X} \sum_{j=0}^{s-1} p^{kj} \tilde{\phi}^{kj}(\delta f/f) = u'/u - \frac{1}{X} p^{ks} \tilde{\phi}^{ks}(\delta u/u) .$$

Comme $f \in H(A)$, il résulte de 2.2 que tous les termes de la série de gauche appartiennent à $H(A)$ et sont majorés en norme par p^{-kj} , la série converge donc dans $H(A)$. D'autre part, pour tout $X \in B$, le terme de droite converge vers u'/u , ce qui achève la démonstration.

6.6. Remarque. - Si $f = u/\tilde{\phi}^k(u)$ se prolonge dans une couronne $r<|X-\alpha|<1$, on ne peut pas affirmer que u'/u se prolonge dans une couronne $r' < |X-\alpha| < 1$. En effet, pour chaque j , $\frac{1}{X} \tilde{\phi}^{kj}(\delta f/f)$ se prolonge dans une couronne $r_j<|X-\alpha|<1$, mais il peut arriver que $r_j \to 1$ quand $j \to +\infty$. On voit donc que la situation n'est pas tout à fait symétrique entre l'opérateur différentiel et son Frobenius et que, dans certains cas, le Frobenius peut donner des informations supplémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 37, p. 28-115).

[2] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, I., Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 27-37.

[3] MOTZKIN (E.). - La décomposition d'un élément analytique en facteurs singuliers, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 8, 11 p.

[4] ROBBA (P.). - Caractérisation des dérivées logarithmiques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 12, 6 p.

(Texte reçu le 26 juin 1975)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS