Philippe Robba

Caractérisation des dérivées logarithmiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 12, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A11_0>

Groupe d'étude d'analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 12, 6 p.

3 mars 1975

CARACTÉRISATION DES DÉRIVÉES LOGARITHMIQUES

par Philippe ROBBA

(d'après un travail en commun avec B. DWORK)

1. Introduction.

Nous reprenons les notations de l'exposé [3], reprises dans l'exposé [5].

Rappelons seulement que W_a^0 représente l'espace des fonctions analytiques bornées dans le disque $D(a, 1^-)$, $|a| \leq 1$; E représente le complété de $K(X)$ pour la norme de Gauss, et t désigne le point générique.

1.1. Nous montrerons qu'un opérateur différentiel possède au moins une solution dans le disque générique si, et seulement si, il possède des solutions approchées de tous ordres, fractions rationnelles (§2).

1.2. Ce résultat ne peut pas se transposer dans une classe résiduelle quelconque sauf dans le cas des opérateurs différentiels de premier ordre.

Ce critère nous donne alors une caractérisation des éléments analytiques dans une classe résiduelle qui sont des dérivées logarithmiques de fonction analytique (§3).

Dans le même ordre d'idées, nous caractériserons les éléments analytiques qui sont des dérivées logarithmiques d'éléments analytiques (§4).

Ces deux caractérisations jouent un rôle essentiel dans la caractérisation d'une structure de Frobenius pour les équations différentielles du premier ordre (cf. exposé [6]).

1.3. La technique employée pour caractériser les dérivées logarithmiques d'éléments analytiques, nous permettra de compléter des résultats de prolongement analytique antérieurement obtenus (voir MOTZKIN [2]) dans le cas des équations différentielles du premier ordre (§4).

2. Solutions approchées d'une équation différentielle.

2.1. Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. - *Soit* $L \in E[D]$. *Alors l'équation* $Lu = 0$ *possède une solution (analytique) bornée dans le disque générique si, et seulement si, elle possède des solutions approchées appartenant à* E , *c'est-à-dire quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe* $u \in E$ *tel que* $\|u\| = 1$ *et* $\|Lu\| < \varepsilon$.

Remarques.

(i) Rappelons que l'équation $Lu = 0$ a une solution analytique bornée dans le disque générique si, et seulement si, elle y a une solution analytique ([3], proposition 5.10).

(ii) Il est par ailleurs évident que si on a une solution approchée dans E, on a aussi une solution approchée dans $K(X)$ (puisque $K(X)$ est dense dans E).

2.2. LEMME. - Soit $L \in E[D]$. On a $\|L\|_{W_t^0} = \|L\|_E$.

Démonstration. - Comme $E \subset W_t^0$, on a $\|L\|_E \leq \|L\|_{W_t^0}$. D'autre part, on vérifie facilement qu'il existe un polynôme (à coefficients dans K) u, tel que

$$1 = \|u\|_E = \|u\|_{W_t^0} \quad \text{et} \quad \|Lu\|_E = \|Lu\|_{W_t^0} = \|L\|_{W_t^0},$$

ce qui montre que, $\|L\|_E \geq \|L\|_{W_t^0}$.

2.3. LEMME. - Supposons que L soit injectif dans W_t^0. Alors L est inversible dans W_t^0 et E, et on a de plus

$$\|L^{-1}\|_{W_t^0} = \|L^{-1}\|_E .$$

Démonstration. - Comme L est injectif dans W_t^0, il résulte du théorème 5.8 de [3] qu'il existe $Q \in E[D]$ tel que $\|QL - 1\|_{W_t^0} < 1$. On a donc aussi, par le lemme précédent, $\|QL - 1\|_E < 1$. Ceci montre que QL est inversible dans W_t^0 et E.

Q étant surjectif dans W_t^0, la proposition 2.6 de [4] nous dit alors que Q est injectif dans W_t^0, et donc aussi dans E (sous réserve que le corps de reste de K soit de caractéristique non nulle ; dans le cas où cette caractéristique est nulle, on peut encore montrer par une méthode différente que L est surjectif dans W_t^0). Donc Q, et par suite L aussi, sont inversibles dans W_t^0 et E. Comme $\|Q\|_E = \|L^{-1}\|_E$ et $\|Q\|_{W_t^0} = \|L^{-1}\|_{W_t^0}$ (car $\|(QL)^{-1}\|_E = \|(QL)^{-1}\|_{W_t^0} = 1$) une nouvelle application du lemme 2.2 nous donne $\|L^{-1}\|_{W_t^0} = \|L^{-1}\|_E$.

2.4. LEMME. - Soit $L \in E[D]$, unitaire d'ordre n. Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $M \in E[D]$, unitaire d'ordre n, tel que

$$\|L - M\|_{W_t^0} < \varepsilon ,$$

et tel que M soit injectif dans W_t^0.

Démonstration. - Si $n = 1$, on peut supposer que $L = D - u'/u$, où $u \in W_t^0$. Soit s entier tel que $|p^s| < \varepsilon$. Alors $M = D - u'/u - p^s X^{p^s-1}$ répond à la question (car $u \exp(X^{p^s} - t^{p^s}) \notin W_t^0$).

Nous démontrons le cas général par récurrence sur n.

Si $n > 1$, soit $L = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0$.

Il résulte du cas $n = 1$, qu'il existe $b \in E$ tel que $|b - a_{n-1}| < \varepsilon$ et que le wronskien de

$$R = D^n + bD^{n-1} + \dots + a_0$$

n'appartienne pas à W_t^0 (et donc n'appartient pas à $\mathfrak{a}_t$). Le noyau de R au voisinage de t n'est pas contenu dans $\mathfrak{a}_t$. Il existe donc une factorisation de R (cf. §5.13 de [3]) : $R = NM_1$, telle que

$$\mathrm{Ker}_t\, M_1 = \mathrm{Ker}_t\, R \cap \mathfrak{a}_t \text{ , } \quad N \text{ injectif dans } W_t^0 \text{ .}$$

On a donc ordre $M_1 < n$, et d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $Q \in E[D]$ de même ordre que M_1 tel que $\|M_1 - Q\| < \varepsilon/\|N\|$, et que Q soit injectif dans W_t^0 . Alors $M = NQ$ répond à la question.

2.5. Démonstration du théorème 2.1.

Si L est injectif dans W_t^0 , d'après le lemme 2.3, L est inversible dans E , donc si $\|u\|_E = 1$, on a

$$1 = \|u\|_E = \|L^{-1}(Lu)\|_E \leq \|L^{-1}\| \; \|Lu\| \text{ ,}$$

ce qui montre qu'il n'existe pas de solution approchée dans E .

Réciproquement supposons que L ne soit pas injectif dans W_t^0 . D'après le lemme 2.4, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $M \in E[D]$, injectif dans W_t^0 , tels que $\|L - M\|_{W_t^0} < \varepsilon$. D'après le lemme 2.3, M est inversible dans W_t^0 et E .

On a $\|M^{-1}\|_{W_t^0} \geq 1/\|L - M\|_{W_t^0}$, car autrement L serait aussi inversible dans W_t^0 contrairement à l'hypothèse. Il résulte donc du lemme 2.3 que

$$\|M^{-1}\|_E = \|M^{-1}\|_{W_t^0} > 1/\varepsilon \text{ .}$$

Mais ceci signifie qu'il existe $u \in E$, $\|u\|_E = 1$ et $\|Mu\| < \varepsilon$. Et alors on a aussi

$$\|Lu\| = \max(\|Mu\| \text{ , } \|L - M\| \; \|u\|) < \varepsilon \text{ .}$$

3. Cas particulier des équations du 1er ordre : dérivée logarithmique d'une fonction bornée.

Nous allons caractériser les éléments analytiques sur un disque qui sont des dérivées logarithmiques de fonctions analytiques dans ces disques.

3.1. THÉORÈME. - Soit $\eta \in H(D(0 , 1^-))$. Alors η est de la forme $\eta = u'/u$, $u \in \mathfrak{a}_0$, si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R \in K(X)$ telle que $|\eta - R'/R|_{\text{Gauss}} < \varepsilon$ (on peut supposer que R n'a ni pôles ni zéros dans les classes résiduelles où η se prolonge).

Démonstration. - L'opérateur $D - \eta$ a un noyau non trivial dans $\mathfrak{a}_0$ si, et seulement si, il y a un noyau non trivial dans $\mathfrak{a}_t$.

En vertu du théorème 2.1 et des remarques (i) et (ii), $D - \eta$ a un noyau non trivial dans $\mathfrak{a}_t$ si, et seulement si, il existe $R_n \in K(X)$ telles que

$$(D - \eta)R_n \longrightarrow 0$$

ce qui démontre le théorème.

Si Δ est une classe résiduelle où η se prolonge, on a $R = R_1 R_2$ avec R_1, $R_2 \in K(X)$ et les pôles et zéros de R_2 sont exactement les pôles et zéros de R dans Δ. Il est clair que R_2'/R_2 est la partie singulière de R relative à Δ. Comme $|\eta - R'/R| < \varepsilon$ et $\eta_\Delta = 0$, il en résulte que $|R_2'/R_2| < \varepsilon$, et donc $|\eta - R_1'/R_1| < \varepsilon$, et R_1 n'a ni pôles ni zéros dans Δ.

3.2. Si l'on fait des hypothèses supplémentaires sur K (K extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$), on obtient des précisions supplémentaires sur les η qui sont des dérivées logarithmiques (CHRISTOL [1]).

4. Caractérisation et prolongement des dérivées logarithmiques d'éléments analytiques.

4.1. Le théorème 3.1 donne une caractérisation des éléments analytiques sur $D(0, 1^-) = \Delta$ qui sont dérivées logarithmiques de fonctions analytiques dans Δ. Nous allons maintenant caractériser ceux qui sont dérivées logarithmiques d'éléments analytiques dans Δ.

THÉORÈME. - Soit $\eta \in H(\Delta)$. Si η est de la forme $\eta = u'/u$ avec $u \in H(\Delta)$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $R \in K(X)$ et $g \in H(\Delta)$ tels que $\eta = R'/R + g'$ et $|g|_{\text{Gauss}} < \varepsilon$.

Réciproquement, s'il existe $R \in K(X)$ et $g \in H(\Delta)$ tels que $\eta = R'/R + g'$ et $|g| < \pi$, où $\pi = p^{-1/(p-1)}$ est le rayon de convergence de l'exponentielle, alors η est de la forme $\eta = u'/u$ avec $u \in H(\Delta)$.

Démonstration. - Soit $\eta = u'/u$, $u \in H(\Delta)$. On peut supposer que $|u| = 1$. Soit $R \in K(X)$ tel que $|R - u| < \varepsilon < 1$, R sans pôles dans Δ. Comme $|u| = 1$, nous avons aussi $|R| = 1$, et donc $|u/R - 1| < \varepsilon$; de plus u n'ayant pas de zéros dans Δ, R n'en a pas non plus. Alors $g = \log(u/R)$ est un élément analytique sur Δ. Si l'on suppose de plus que $\varepsilon < \pi = p^{-1/(p-1)}$, ce qui ne restreint pas la généralité, on a alors $|g| = |u/R - 1| < \varepsilon$ (car $|\log(1 + a)| = |a|$ si $|a| < \pi$) et de plus $g' = u'/u - R'/R$.

Réciproquement, soit $\eta = R'/R + g'$ avec $R \in K(X)$, $g \in H(\Delta)$, $|g| < \pi$. Alors $v = \exp g$ est bien défini sur Δ et appartient à $H(\Delta)$. Alors $g' = v'/v$ et donc $\eta = u'/u$ avec $u = Rv$ qui appartient bien à $H(\Delta)$.

4.2. La comparaison entre les théorèmes 3.1 et 4.1 est encore plus suggestive si on réécrit le théorème 3.1 sous la forme :

Soit $\eta \in H(\Delta)$. Alors $\eta = u'/u$ avec $u \in \mathfrak{a}_0$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R \in K(X)$ et $g \in H(\Delta)$ tels que $\eta = R'/R + g$ et $|g| < \varepsilon$.

Ces deux caractérisations nous serviront dans l'étude de la structure de Frobenius des équations différentielles du premier ordre (cf. exposé [6]).

4.3. Rappelons le résultat de prolongement (MOTZKIN [2], proposition 1).

THÉORÈME. - Soient η et $u \in H(\Delta)$ avec $\eta = u'/u$. Alors si η se prolonge dans la classe résiduelle $\Delta' \neq \overline{\infty}$, u se prolonge également dans Δ' .

4.4. Grâce au théorème 4.3 on peut apporter la précision suivante au théorème 4.1 : Si $\eta \in H(A)$, où A est une union de classes résiduelles, on peut préciser que R n'a ni pôles ni zéros dans A , et que $g \in H(A)$.

En effet, comme $u \in H(A)$, lorsqu'on choisit $R \in K(X)$ tel que $|R-u| < \varepsilon < 1$, on peut supposer que R n'a pas de pôles dans A . Comme de plus u ne s'annule pas dans A (sinon η y aurait des singularités), R ne s'annule pas dans A non plus. Alors $g = \log(u/R)$ est bien un élément analytique sur A .

4.5. Nous allons maintenant établir un théorème de prolongement analytique dans les couronnes.

THÉORÈME. - Soient η et $u \in H(\Delta)$ avec $\eta = u'/u$. Supposons que η se prolonge dans la couronne $r < |X - a| < 1$, avec $0 < r < 1$, $|a| = 1$, alors il existe $r' < 1$ tel que u se prolonge dans la couronne $r' < |X - a| < 1$.

(De même si η se prolonge dans la couronne $1 < |X| < r$, u se prolongera dans la couronne $1 < |X| < r'$ par un certain r').

Démonstration. - On peut supposer que $|u| = 1$. On choisit alors $R \in K(X)$ sans pôles dans Δ tel que $|u - R| < \pi = p^{-1/(p-1)}$. Alors, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 4.1,

$$g = \log(u/R) \in H(\Delta) \quad \text{et} \quad |g| < \pi .$$

De plus $g' = \eta - R'/R$ se prolonge dans une couronne $r_1 < |x - a| < 1$, avec $r \leq r_1 < 1$, et par conséquent g se prolonge dans cette même couronne. Comme $|g|_{Gauss} < \pi$, il existe r' , $r_1 < r' < 1$, tel que si Δ' désigne la réunion de Δ et de la couronne $r' < |x - a| < 1$ on ait $\|g\|_{\Delta'} \leq |g|_{Gauss} + \varepsilon < \pi$ (cf. lemme 2.3 de [5]). Mais ceci montre que $\exp g \in H(\Delta')$ et donc $u = R \exp g \in H(\Delta')$ puisque R n'a ni pôles ni zéros dans Δ' .

4.6. COROLLAIRE. - Soient η et u définis dans un voisinage de 0 satisfaisant $\eta = u'/u$. Si le disque de convergence de u est strictement inclus dans celui de η , ce disque de convergence est non circonférencié (c'est-à-dire que si $u = \sum u_n x^n$ et si ρ est le rayon de convergence de cette série, $\rho^n u_n$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$).

Démonstration. - Supposons que le disque de convergence de u soit circonférencié. Quitte à agrandir le corps des constantes, on peut par une homothétie se ramener au cas où ce disque est $D(0 , 1^+)$. Alors $u \in H(D(0 , 1^+))$. Si alors η se prolonge dans $D(0 , r^-)$ avec $r > 1$, d'après le théorème 4.5, u se prolonge dans $D(0 , r'^-)$ avec $1 < r' < 1$ et donc le rayon de convergence de u est $\geq r'$ ce qui contredit l'hypothèse.

4.7. Exemple : Prendre $\eta = 1$.

4.8. Le corollaire 4.6. est un cas particulier du résultat suivant.

COROLLAIRE. - Soient η et u définis dans un voisinage de 0 satisfaisant $\eta = u'/u$. Si le disque de convergence de u est strictement inclus dans celui de η , u n'est pas un élément analytique dans son disque de convergence.

Démonstration. - On sait déjà que le disque de convergence de u est non circonférencié. Quitte à agrandir le corps des constantes on peut, par une homothétie, se ramener au cas où le disque de convergence est $D(0\ ,\ 1^-)$. Si alors $u \in H(D(0, 1^-))$, comme η se prolonge dans toutes les classes résiduelles $D(a\ ,\ 1^-)$, $|a| = 1$, en vertu du théorème 4.3 u se prolonge aussi dans toutes ces classes résiduelles, donc se prolonge dans $D(0\ ,\ 1^+)$. Son disque de convergence contient donc $D(0, 1^+)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

4.9. Exemple : Prendre encore $\eta = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTOL (G.). - Opération de Cartier et vecteurs de Witt, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 13, 7 p.

[2] MOTZKIN (E.). - La décomposition d'un élément analytique en facteurs singuliers, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 8, 11 p.

[3] ROBBA (P.). - Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène, Groupe d'etude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 1, 15 p.

[4] ROBBA (P.). - Indice d'un opérateur différentiel, Groupe d'etude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 2, 14 p.

[5] ROBBA (P.). - Factorisation d'un opérateur différentiel. Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 2, 16 p.

[6] ROBBA (P.). - Structure de Frobenius faible pour les équations différentielles du 1er ordre, Groupe d'etude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 20,

(Texte reçu le 2 juin 1975)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS