LAURENT COPPEY

Décompositions multiplicatives directes des entiers

Diagrammes, tome 67-68 (2012), p. 1-53

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2012__67-68__1_0>

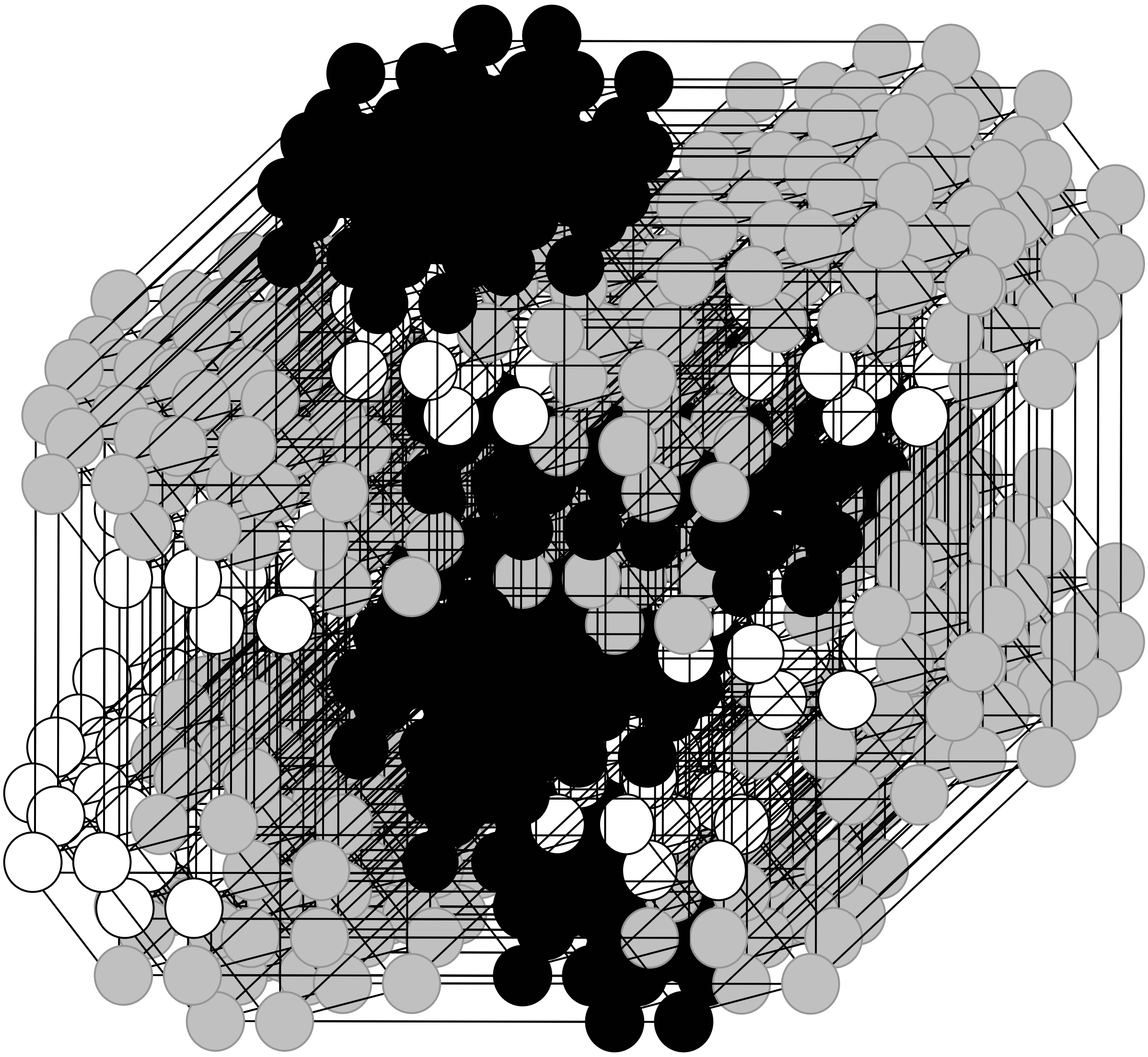
DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES DIRECTES DES ENTIERS

Deuxième Partie

Laurent Coppey

Sommaire de la première partie (Diagrammes, volumes 65+66, Paris, 2011)

Sommaire de la deuxième partie



UN SQUELETTE

SAIN SEMI-TRIVIAL

DE DIMENSION 10

Combien de composantes connexes a-t-il ?

5 . Classification générale .

Objets irréductibles.

Soit (A,B) une décomposition directe de $\mathbf{N}^k$; parmi les parties propres de $\mathbf{N}^k$, il y a les suivantes : soit H un sous-ensemble de K = {1, 2, …,k} ayant h éléments; l'ensemble des éléments $(x_p)_{p\in K}$ tels que $x_p = 0$ si $p \notin H$ est une partie propre relative à la décomposition donnée (A,B) sur laquelle (A,B) induit donc une décomposition directe (A',B') qui est naturellement isomorphe à une décomposition directe de $\mathbf{N}^h$ encore notée (A',B') ; la partie supplémentaire canonique de $\mathbf{N}^h$ est celle des éléments $(x_p)_{p\in K}$ tels que $x_p = 0$ si $p \in H$; c'est aussi une partie propre relative à la décomposition donnée (A,B) sur laquelle (A,B) induit une décomposition directe (A'',B'') qui est naturellement isomorphe à une décomposition directe de $\mathbf{N}^\ell$ encore notée (A'',B'') ($h + \ell = k$) ; bien sûr $\mathbf{N}^k = \mathbf{N}^h \oplus \mathbf{N}^\ell$, mais en général (A,B) n'est pas la somme directe (ou le produit !) des décompositions induites (A',B') et (A'',B'').

Définition 5-1.

S'il existe une partie propre H de K ($h = |H| \neq 0$ et $|K \setminus H| = \ell \neq 0$) telle que l'on ait :

$$(\mathbf{N}^k, (A,B)) \cong (\mathbf{N}^h, (A',B')) \oplus (\mathbf{N}^\ell, (A'',B''))$$

on dit que l'objet ($\mathbf{N}^k$,(A,B)) est *réductible*; dans le cas contraire on dit qu'il est *irréductible*.

On suppose que pour tout p, $1 \leq p \leq k$, $A_p = \{0\}$. Alors on a la proposition suivante :

Proposition 5-1.

Si, pour un certain ordre lexicographique *L*, $a = \inf_L(A^*)$ n'a aucune composante nulle, alors pour tout autre ordre lexicographique *L*', on a $\inf_{L'}(A^*) = a$; on peut donc écrire sans risque de confusion : $\omega^* = \inf(A^*)$ ($\omega^* = a$ est bien défini sans référence à tel ou tel ordre lexicographique *L*)

► Soit donc un autre ordre lexicographique *L*' et supposons $a' = \inf_{L'}(A^*) \neq a$; on a donc à la fois et par définition : $a <_L a'$ et $a' <_{L'} a$.

Définissons les deux éléments suivants :

b est défini par ses composantes : $b_i = a'_i - a_i$ si $a'_i \geq a_i$ et $b_i = 0$ autrement
b' est défini par ses composantes : $b'_j = a_j - a'_j$ si $a_j \geq a'_j$ et $b'_j = 0$ autrement

Remarquons d'abord que, pour tout i, on a : $b_i \leq a'_i$. Supposons que pour tout indice i, on ait $b_i = a'_i$; on ne peut pas avoir $a'_i \geq a_i$, puisque cela entrainerait : $b_i = a'_i - a_i = a'_i$ et donc $a_i = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Il existe donc au moins un indice i tel que $b_i < a'_i$. Supposons que cet indice i soit le plus petit possible, pour l'ordre lié à *L*' ; on en déduit alors que $b <_{L'} a'$ et donc que $b \in B$.

Remarquons encore que, pour tout j, on a : $b'_j \leq a_j$. Supposons que pour tout indice j, on ait $b'_j = a_j$; on ne peut pas avoir $a_j < a'_j$, puisque cela entrainerait : $b'_j = 0 = a_j$, ce qui est exclu par hypothèse ; donc pour tout indice j, on aurait : $a_j \geq a'_j$, ce qui contredirait l'inégalité stricte a $<_L$ a' . Il existe donc un indice j tel que $b'_j < a_j$. Supposons que cet indice j soit le plus petit possible, pour l'ordre lié à L ; on en déduit alors que $b' <_L a$ et donc que $b' \in B$.

Enfin, on vérifie que $a + b = a' + b'$; en effet :

- ou bien $a'_i \geq a_i$, et on a : $a_i + b_i = a_i + a'_i - a_i = a'_i = a'_i + 0 = a'_i + b'_i$,
- ou bien $a_i \geq a'_i$, et on a : $a_i + b_i = a_i + 0 = a_i = a'_i + a_i - a'_i = a'_i + b'_i$.

On aurait donc un élément avec deux décompositions. Ainsi, $a' = a = \omega^* = \inf(A^*)$ est défini indépendamment de l'ordre lexicographique L choisi sur $\mathbf{N}^k$. ◄

Supposons toujours que pour tout p, $1 \leq p \leq k$, $A_p = \{0\}$. Alors on a la proposition suivante :

Proposition 5-2.

Si l'élément $\omega^* = \inf(A^*)$ est bien défini, c'est-à-dire s'il existe un ordre lexicographique L tel que ω^* ($= \inf_L(A^*)$) ait *toutes ses composantes* a_i non nulles, alors l'objet ($\mathbf{N}^k$, (A,B)) est *irréductible.*

► On suppose donc qu'existe $\omega^* = \inf(A^*)$ et nous raisonnons par l'absurde en supposant que la décomposition directe additive ($\mathbf{N}^k$, (A,B)) se décompose en :

$$(\mathbf{N}^k, (A,B)) = (\mathbf{N}^h, (A',B')) \oplus (\mathbf{N}^\ell, (A'',B'')), \text{ avec } h \text{ et } \ell \neq 0 \ (k = \ell+h).$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que les composantes ont été rangées de telle sorte que $\mathbf{N}^h$ s'identifie à l'ensemble des $x = (x_1, x_2,\ldots, x_k)$ tels que $x_{h+1} = x_{h+2} =\ldots= x_k = 0$ et $\mathbf{N}^\ell$ s'identifie à l'ensemble des $x = (x_1, x_2,\ldots, x_k)$ tels que $x_1 = x_2 =\ldots= x_h = 0$. L'élément ω^* se décompose en $a'+a'' \in A'\oplus A'' = A$; les éléments a' et a'' sont dans A, mais évidemment strictement plus petits que ω^* ; ils ne peuvent qu'être nuls, mais alors aussi d'où a = 0, ce qui est une contradiction. ◄

La réciproque de cette proposition est fausse dès la dimension 3 : il suffit de se référer aux décompositions de type ***(ii)*** et ***(iii)*** décrites au paragraphe **4)$^{\text{bis}}$** Donnons encore un contre-exemple en dimension 4.

Une décomposition de $\mathbf{N}^4$ non descriptible en termes de décompositions de N, $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{N}^3$.

Soient $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$ les éléments de la « base canonique » de $\mathbf{N}^4$.

Pour une permutation (i,j,k,l) de (1,2,3,4), on pose $\mathbf{N}_{ij} = \mathbf{N}(e_i + e_j) \oplus \mathbf{N}e_k \oplus \mathbf{N}e_l$.

Le couple de parties $A = \mathbf{N}(e_3 + e_4) \cup \mathbf{N}(e_1 + e_2)$ et $B = \mathbf{N}_{13} \cup \mathbf{N}_{24} \cup \mathbf{N}_{23} \cup \mathbf{N}_{14}$ constitue une décomposition directe de $\mathbf{N}^4$.

Voici la décomposition d'un élément u = (x,y,z,t) en somme a+b, avec $a \in A$ et $b \in B$ selon la valeur de m = inf(x, y, z, t) :

- $m = x$ et $t \geq z$; $a = (0, 0, z-x, z-x)$ et $b = (x, y, x, t-z+x)$
- $m = x$ et $z \geq t$; $a = (0, 0, t-x, t-x)$ et $b = (x, y, z-t+x, x)$
- $m = y$ et $t \geq z$; $a = (0, 0, z-y, z-y)$ et $b = (x, y, y, t-z+y)$
- $m = y$ et $z \geq t$; $a = (0, 0, t-y, t-y)$ et $b = (x, y, z-t+y, y)$
- $m = z$ et $x \geq y$; $a = (y-z, y-z, 0, 0)$ et $b = (x-y+z, z, z, t)$
- $m = z$ et $y \geq x$; $a = (x-z, x-z, 0, 0)$ et $b = (z, y-x+z, z, t)$
- $m = t$ et $x \geq y$; $a = (y-t, y-t, 0, 0)$ et $b = (x-y+t, t, z, t)$
- $m = t$ et $y \geq x$; $a = (x-t, x-t, 0, 0)$ et $b = (t, y-x+t, z, t)$

On a donc bien $\mathbf{N}^4 = A \oplus B$. On peut vérifier facilement que cette décomposition n'est en aucun cas produit de deux décompositions induites de dimensions 2 ou de deux décompositions de dimensions 1 et 3 :

- sur (xy) et (zt), (1,1,1,1) serait élément de A, puisqu'égal à (1,1,0,0)+(0,0,1,1) ;
- sur (xz) et (yt), (1,1,1,1) serait élément de A, puisqu'égal à (1,0,1,0)+(0,1,0,1) ;
- sur (xt) et (yz), (1,1,1,1) serait élément de A, puisqu'égal à (1,0,0,1)+(0,1,1,0) ;

- sur (xyz) et (t), (1,1,1,1) ne serait pas dans B, puisqu'égal à $(1,1,0,0)_A+(0,0,1,1)_B$;
- sur (xyt) et (z), (1,1,1,1) ne serait pas dans B, puisqu'égal à $(1,1,0,0)_A+(0,0,1,1)_B$;
- sur (xzt) et (y), (1,1,1,1) ne serait pas dans B, puisqu'égal à $(1,1,0,0)_B+(0,0,1,1)_A$;
- sur (yzt) et (x), (1,1,1,1) ne serait pas dans B, puisqu'égal à $(1,1,0,0)_B+(0,0,1,1)_A$;

Nous verrons que cet exemple est en quelque sorte générique, puisqu'il représente un nouveau type de décomposition non triviale de $\mathbf{N}^4$, c'est-à-dire non « déductible » des décompositions directes des puissances de **N** inférieures à 4. On remarquera que le groupe $\mathbf{S_4}$ et sa représentation sur $\mathbf{S_3}$ sont en cause ici!

Soit $(\mathbf{N}^k, (A,B))$ une décomposition directe telle que, pour tout p, on ait : $|A_p| < \infty$. D'après la **proposition 4-1**, dont on reprend les notations, $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{C})$ est une décomposition directe de $\mathbf{N}^k$; les parties $\mathbf{\Omega}$ et **C** sont propres pour la décomposition (A,B) donnée.
Tout $z \in \mathbf{N}^k$ s'écrit de façon unique $z = \omega+c$ où $\omega \in \mathbf{\Omega}$ et $c \in \mathbf{C}$, et l'on a :

$$\underline{a}(z) = \underline{a}(\omega) + \underline{a}(c) \text{ et } \underline{b}(z) = \underline{b}(\omega) + \underline{b}(c), \text{ où } \underline{a}(\omega), \underline{b}(\omega) \in \mathbf{\Omega}$$

On est donc ramené à décrire la décomposition induite sur $\mathbf{\Omega}$. Comme $\mathbf{\Omega}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{N}^k$, il s'agit de décrire les décompositions directes de $\mathbf{N}^k$ telles que tous les axes $\mathbf{N}_p = \mathbf{N}e_p$, $e_p = (0,.0,., 0, 1_p, 0.,.0)$, soient dans B, ce que nous supposons donc.

Proposition 5-3.

Si l'élément $\omega^* = \inf(A^*)$ est bien défini, c'est-à-dire s'il existe un ordre lexicographique L tel que ω^* (= $\inf_L(A^*)$) ait *toutes ses composantes* $b_i e_i$ non nulles, la demi-droite $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\omega^*$ est une partie propre, l'ensemble $\mathbf{L} = \{x \mid \exists\, p\ (x_p < b_p)\}$ est contenu dans B et l'on a : $A = A_{\mathbf{D}}$ et aussi $B = B_{\mathbf{D}} \oplus \mathbf{L}$.

► Ceci étant, on procède par récurrence portant sur les multiples entiers de ω^* ; par définition, de ω^*, on a : $\mathbf{L} \subset B$, et tout élément z de $\omega^* + \mathbf{L}$ se décompose de façon évidente en $\omega^* + \ell$ sachant que $\omega^* \in A$ et $\ell \in \mathbf{L} \subset B$, conformément à l'énoncé de la proposition.

Supposons établi le résultat pour tous les ensembles $p.\omega^* + \mathbf{L}$, avec $p < q$, à savoir que, pour tout $\ell \in \mathbf{L}$, on a : $\underline{a}(p\omega^* + \ell) = \underline{a}(p\omega^*)$ et $\underline{b}(p\omega^* + \ell) = \underline{b}(p\omega^*) + \ell$, avec $\underline{a}(p\omega^*)$ et $\underline{b}(p\omega^*) \in \mathbf{D}$. Venons-en à l'ensemble $q.\omega^* + \mathbf{L}$; il y a trois cas à examiner :

- si $q.\omega^* \in A$, alors, on est dans la même situation que ci-dessus (cas $q = 1$) ; tout élément z de $q.\omega^* + \mathbf{L}$ se décompose en $q.\omega^* + \ell$ sachant que $q.\omega^* \in A$ et $\ell \in \mathbf{L} \subset B$;

- si $q.\omega^* \notin A \cup B$, alors $q.\omega^* = a + b$, où $(a,b) \in A^* \times B^*$; par hypothèse de récurrence, l'élément $a = \underline{a}(q.\omega^*)$ est a priori de la forme $p.\omega^*$, avec $0 < p < q$ et b est aussi un multiple de ω^*, puisqu'égal à $(q-p).\omega^*$; tout élément z de $q.\omega^* + \mathbf{L}$, $z = q.\omega^* + \ell$, se décompose alors de façon évidente : en effet, grâce à l'hypothèse de récurrence, on sait que l'élément $y = (q-p).\omega^* + \ell$ est dans B car $\underline{b}(y) = \underline{b}((q-p).\omega^* + \ell) = \underline{b}((q-p).\omega^*) + \ell = (q-p).\omega^* + \ell = y$; et l'unicité de décomposition achève d'établir que $\underline{a}(q.\omega^* + \ell) = \underline{a}(q.\omega^*)$ et $\underline{b}(q.\omega^* + \ell) = \underline{b}(q.\omega^*) + \ell$.

- si $q.\omega^* \in B$; montrons que pour tout $\ell \in \mathbf{L} \subset B$, $q.\omega^* + \ell \in B$.

A cet effet, établissons d'abord ceci :

si , pour tout $\ell < \ell_1 \in L$, on a : $q.\omega^* + \ell \notin A$, alors, pour ces mêmes ℓ, on a $q.\omega^* + \ell \in B$;

soit en effet $a = \underline{a}(q.\omega^* + \ell)$ et $b = \underline{b}(q.\omega^* + \ell)$; $b \neq 0$ car $q.\omega^* + \ell \notin A$; donc $a < q.\omega^* + \ell$; mais a priori a est de la forme $p.\omega^* + \ell'$ avec $p < q$ ($p > q$ est impossible, $p = q$ est exclu par hypothèse secondaire). L'hypothèse générale de récurrence s'applique alors : $\underline{a}(p.\omega^* + \ell') = \underline{a}(a) = a = p.\omega^* + \ell' = \underline{a}(p.\omega^*) \in \mathbf{N}.\omega^*$; donc $\ell' = 0$ et $a = p.\omega^* \in A$; alors $b = (q-p).\omega^* + \ell$; si $p > 0$, l'hypothèse générale de récurrence s'applique encore: $\underline{b}((q-p).\omega^* + \ell) = (q-p).\omega^* + \ell = \underline{b}((q-p).\omega^*) + \ell$ où $\underline{b}((q-p).\omega^*) \in B$; donc $\underline{b}((q-p).\omega^*) = (q-p).\omega^* \in B$; il y a alors une contradiction, puisque $q.\omega^*$ aurait deux décompositions : la triviale $q.\omega^* = 0 + q.\omega^*$ et l'autre $q.\omega^* = p.\omega^* + (q-p).\omega^*$ ($0 < p < q$). La seule possibilité qui reste est : $p = 0$, donc $a = 0$, donc $q.\omega^* + \ell \in B$.

Maintenant, supposons qu'il y ait dans $q.\omega^* + \mathbf{L}$ des éléments de A **;** soit $q.\omega^* + \ell$ le plus petit d'entre eux (pour un ordre lexicographique arbitraire !) ; on sait que $\ell = \sum_{i=1}^{k} m_i e_i$, et il existe i tel que $m_i < b_i$; effectuons pour tout i la division de m_i par b_i ; il existe donc des entiers s_i et r_i tels que : $m_i = s_i.b_i + r_i$, avec $r_i < b_i$; l'un des entiers s_i au moins est nul ; distinguons alors deux cas :

~ supposons d'abord que l'on ait : $r_i = 0$ pour tout i ; alors $\ell = \sum_{i=1}^{k} m_i e_i = \sum_{i=1}^{k} s_i b_i e_i$ et il existe un indice $i = j$ au moins tel que $s_j > 0$; on supposera que cet indice est le plus petit possible (pour l'ordre lexicographique en cause) ; posons :

$$\ell_1 = (s_j - 1) b_j e_j + \sum_{i \neq j} s_i b_i e_i$$

de sorte que $\ell = \ell_1 + b_j e_j$; il y a alors une contradiction concernant l'unique décomposition de l'élément $q.\omega^* + \ell + \sum_{i \neq j} b_i e_i$:

$$q.\omega^* + \ell + \sum_{i \neq j} b_i e_i = (q.\omega^* + \ell)_A + (\sum_{i \neq j} b_i e_i)_B$$

$$q.\omega^* + \ell + \sum_{i \neq j} b_i e_i = q.\omega^* + \ell_1 + \sum_{i=1}^{k} b_i e_i = (q.\omega^* + \ell_1)_B + (\omega^*)_A$$

Remarquons bien que $\ell_1 < \ell$, par choix de minimalité de j, et le résultat du début s'applique : $q.\omega^* + \ell_1 \in B$.
Remarquons aussi que $\sum_{i \neq j} b_i e_i < \omega^*$, et donc $\sum_{i \neq j} b_i e_i \in B$, par définition de ω^* ;

~ supposons maintenant qu'il existe j tel que $r_j \neq 0$; alors $\tau = \sum_{i=1}^{k} (b_i - r_i) e_i \in \mathbf{L} \subset B$; de plus, on a : $\ell + \tau = \ell_1 + \omega^*$ où $\ell_1 = \sum_{i=1}^{k} s_i b_i e_i < \ell$; il y a encore une contradiction concernant l'unique décomposition de l'élément $q.\omega^* + \ell + \tau$:

$$q.\omega^* + \ell + \tau = (q.\omega^* + \ell)_A + (\tau)_B = (q.\omega^* + \ell_1)_B + (\omega^*)_A$$

($\ell_1 < \ell$ et le résultat du début s'applique : $q.\omega^* + \ell_1 \in B$)
Finalement, l'existence même d'un élément de A tel que $q.\omega^* + \ell$ conduit à une contradiction : tous les éléments de $q.\omega^* + \mathbf{L}$ sont dans B.

En résumé, nous savons maintenant que si $(\mathbf{N}^k, (A,B))$ est une décomposition directe telle que, pour tout p, on ait : $|A_p| < \infty$, alors :

$$\mathbf{N}^k = \mathbf{L} \oplus \mathbf{D} \oplus \mathbf{C} = \mathbf{L} \oplus A_{\mathbf{D}} \oplus B_{\mathbf{D}} \oplus A_{\mathbf{C}} \oplus B_{\mathbf{C}} \text{ où}$$
$$A = A_{\mathbf{\Omega}} \oplus A_{\mathbf{C}} = A_{\mathbf{D}} \oplus A_{\mathbf{C}} \text{ et } B = \mathbf{L} \oplus B_{\mathbf{D}} \oplus B_{\mathbf{C}},$$

et, lorsqu'on a opéré la première réduction, ou si l'on veut si $\mathbf{C} = \{0\}$, alors :

$$\mathbf{N}^k = \mathbf{L} \oplus \mathbf{D} = \mathbf{L} \oplus A_{\mathbf{D}} \oplus B_{\mathbf{D}} \text{ où}$$
$$A = A_{\mathbf{D}} \text{ et } B = \mathbf{L} \oplus B_{\mathbf{D}}. .$$

Nous indiquons pour finir comment calculer pratiquement p et ℓ.

Soit $x = \sum_i x_i e_i$; on a $\omega^* = \sum_i b_i e_i$; si $x \notin \mathbf{L}$, c'est que toutes les composantes de x sont plus grandes que celles de ω^* ; pour tout i, de 1 à k, on effectue la division euclidienne de x_i par b_i : $x_i = p_i.b_i + r_i$, avec $r_i < b_i$; si $x \neq \omega^*$ il existe au moins un indice i pour lequel $p_i \neq 0$; soit alors p le plus petit des $p_i \neq 0$; alors l'élément suivant : $\ell = \sum_i ((p_i - p).b_i + r_i).e_i =$

$\sum_i (x_i - p.b_i).e_i$ est dans **L** : en effet, soit j un indice pour lequel $p_j = p$; on a : $\ell_j = r_j < b_j$; l'élément ℓ n'est autre que x – p.ω* ; pour avoir la décomposition de x, il convient de décomposer encore p sur la demi droite **D** = **N**.ω*. ◄

Définition 5-2

Soit ($\mathbf{N}^k$, (A,B)) une décomposition directe telle que tous les axes $\mathbf{N}_p = \mathbf{N}.e_p$ se décomposent en $A_p \oplus B_p$ chaque A_p étant fini. Si, après réduction, existe l'élément $\alpha = \inf(A^*)$ comme dans la ***proposition* 5-3** ci-dessus, un tel objet sera dit *objet irréductible simple*, et plus précisément, si tous les A_p sont réduits à {0} (i.e. **C** = {0}) *objet irréductible réduit simple.* Ce sont les objets de la ***proposition* 5-2.**

Définition 5-3.

On dira que (e_{i1} , e_{i2}, …, e_{iq}) est à *la base d'un sous-objet irréductible simple de* ($\mathbf{N}^k$, (A,B)) si la décomposition induite par (A,B) sur $\mathbf{N}.e_{i1} \oplus \mathbf{N}.e_{i2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{N}.e_{iq}$, qui est canoniquement isomorphe à une décomposition de $\mathbf{N}^q$, est un objet irréductible simple, ce qui suppose qu'existe un plus petit élément α de $A\setminus\{0\} \cap (\mathbf{N}.e_{i1} \oplus \mathbf{N}.e_{i2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{N}.e_{iq})$ qu'on appellera le *générateur d'irréductiblité* du sous-objet en question.

Définition 5-4 (sutures).

Soit ($\mathbf{N}^k$, (A,B)) un objet irréductible simple, avec générateur d'irréductiblité α dans A ; l'ensemble **D** = **N.**α se décompose en $A_\mathbf{D} \oplus B_\mathbf{D}$; si $A_\mathbf{D}$ est ***fini*** (***et par essence*** non réduit à {0}!) nous dirons que c'est une *suture de genre* a (ou que l'objet ($\mathbf{N}^k$, (A,B)) présente une *suture de genre* a) ; les éléments non nuls de $A_\mathbf{D}$ sont appelés *points de suture*.
On définit de façon symétrique les *sutures de genre* b et leurs points de suture.

Notons que la seule considération des squelettes sains (cf. : la première partie, au § **4)** **bis**, **petite incursion en dimension 4 et 5**) élimine d'office les *sutures*.

Dans ce qui suit, **propositions 5-4** à **5-10**, on travaille avec un objet ($\mathbf{N}^k$, (A,B)) où *chaque* $\mathbf{N}_p$ *est contenu dans* B.

Proposition 5-4.
Supposons que $E_q = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{iq})$ et $E_r = (e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jr})$ soient à la base de deux sous-objets irréductibles simples distincts de ($\mathbf{N}^k$, (A,B)), avec générateurs d'irréductibilité respectifs α_q et α_r. Alors les ensembles E_q et E_r sont disjoints.

► Posons $\alpha_q = \sum_{p=1}^{q} m_p e_{ip}$ et $\alpha_r = \sum_{p=1}^{r} n_p e_{jp}$; nous raisonnons par l'absurde et supposons donc que $e \in E_q \cap E_r$ et, pour fixer les idées, que $e = e_{i1} = e_{j1}$ et que l'on ait : $m_1 \geq n_1$; alors l'élément $x = m_1.e + \sum_{p=2}^{q} m_p e_{ip} + \sum_{p=2}^{r} n_p e_{jp}$ aurait deux décompositions selon (A,B), à savoir :

$\underline{a}(x) = m_1.e + \sum_{p=2}^{q} m_p e_{ip} = \sum_{p=1}^{q} m_p e_{ip} = \alpha_q$ et $\underline{b}(x) = \sum_{p=2}^{r} n_p e_{jp}$ ($\in$B, par déf. de α_r),

et

$\underline{a}(x) = n_1.e + \sum_{p=2}^{r} n_p e_{jp} = \sum_{p=1}^{r} n_p e_{jp} = \alpha_r$ et $\underline{b}(x) = \sum_{p=2}^{q} m_p e_{ip} + (m_1 - n_1).e$ ($\in$B, par déf. de α_q) ◄

Proposition 5-5.

Il existe une unique partition $\mathcal{P}$ de K = {0,1,2,…,k} ayant la propriété suivante : $\forall$ I $\in \mathcal{P}$

- ou bien card(I) $\geq$ 2 et dans ce cas, $(e_i)_{i \in I}$ est une base de sous-objet irréductible simple de ($\mathbf{N}^k$, (A,B)),
- ou bien card(I) = 1 et l'ensemble S de ces singletons est tel que $\mathbf{S} = \bigoplus_{s \in S} \mathbf{N}.e_s \subset$ B.

► Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de sous-objets irréductibles simples de ($\mathbf{N}^k$, (A,B)). D'après la **proposition 5-4** c'est un ensemble de parties disjointes de K ayant chacune au moins 2 éléments. Soit U leur réunion et soit S = K \ U.

Montrons que le sous-monoïde **S** engendré par S est entièrement contenu dans B. Raisonnons par l'absurde : supposons que A ∩ **S** ne soit pas réduit à {0}; soit a ∈ A ∩ **S** un élément non nul, ayant un nombre de composantes non nulles minimum (ce nombre est alors nécessairement supérieur ou égal à 2); pour fixer les idées, supposons que ces composantes correspondent aux indices (i_1 , i_2 , …, i_r) et posons pour simplifier $f_n = e_{in}$; soit **R** le sous-monoïde engendré par (f_1, f_2 ,…, f_r) et soit L un ordre lexicographique dans **R** (correspondant par exemple à l'ordre naturel : 1 < 2 <…< r) ; soit enfin a' = $\inf_L(A^* \cap \mathbf{R})$; les r composantes de a' sont non nulles puisque a a été choisi dans **S** avec un nombre minimum de composantes non nulles (qui est r !). D'après les **propositions 5-1 et 5-2**, l'élément a' = $\inf(A^* \cap \mathbf{R})$ est minimum absolu et **R** est sous-jacent à un sous-objet irréductible de ($\mathbf{N}^k$, (A,B)), dont a' serait le générateur d'irréductibilité ; alors { i_1 , i_2 , …, i_r }serait une base de sous-objet irréductible et donc élément de $\mathcal{B}$, et à ce titre { i_1 , i_2 , …, i_r } serait contenu dans U et non dans S. ◄

Proposition 5-6.

Supposons en plus que $\mathcal{P}$ ne contienne qu'un élément de base E_q = (e_1 , e_2, …, e_q) et de générateur d'irréductibilité $\alpha = \sum_{i=1}^{q} n_i e_i$; désignons par (f_1, f_2 ,…, f_s) les éléments de S.

Alors les supplémentaires canoniques des axes $\mathbf{N}.e_i$ sont entièrement contenus dans B.

► Nous raisonnons par l'absurde et seulement dans le cas i = 1 pour fixer les idées : supposons que $\alpha^* = \sum_{i=2}^{q} \beta'_i\, e_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j . f_j$ soit un élément de A^*, minimum pour un ordre lexicographique ; d'après la **proposition 5-5**, l'élément $\sum_{j=1}^{s} \beta_j . f_j$ est dans B, et l'élément $\sum_{i=2}^{q} \beta'_i\, e_i$ est aussi dans B, puisqu'il est sur le bord d'un objet irréductible dont les axes sont dans B (la première composante de $\underline{a}(\sum_{i=2}^{q} \beta'_i\, e_i)$ est nulle, et comme c'est un élément de A dans un sous-objet irréductible à base dans B, il ne peut qu'être nul, donc $\sum_{i=2}^{q} \beta'_i\, e_i \in$ B) ; de plus $\sum_{i=2}^{q} \beta'_i\, e_i \neq 0$, sinon $\alpha^* \in A \cap B$ et $\alpha^* = 0 \notin A^*$.

Si $\beta'_i \geq n_i$, on pose $t_i = \beta'_i - n_i$ et $u_i = 0$; si $n_i > \beta'_i$, on pose $u_i = n_i - \beta'_i$ et $t_i = 0$ (par convention, $\beta'_1 = 0$); l'élément $z = \alpha^* + \sum_{i=1}^{q} u_i e_i$ a deux décompositions :

$$(1) \quad z = \sum_{i=2}^{q} \beta'_i\, e_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j . f_j + \sum_{i=1}^{q} u_i e_i = \alpha + (\sum_{i=2}^{q} t_i e_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j . f_j) \; ;$$

l'élément $(\sum_{i=2}^{q} t_i e_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j . f_j)$ est strictement plus petit que α^* , puisqu'il existe au moins un indice i pour lequel $\beta'_i \neq 0$, et nécessairement alors élément de B ;

$$(2) \quad z = \alpha^* + \sum_{i=1}^{q} u_i e_i$$

$\sum_{i=1}^{q} u_i e_i$ est élément de B puisque pour tout i on a : $n_i \geq u_i$ et qu'il existe au moins un indice i pour lequel cette inégalité est stricte, car $\sum_{i=2}^{q} \beta'_i\, e_i \neq 0$.

Ces deux décompositions sont évidemment distinctes. ◄

Cette proposition généralise la **proposition 4-1-1** (cf. première partie)

Proposition 5-7.

Dans le cas de deux bases de sous-objets irréductibles simples (de même nature) :

- soit $E_p = (e_1,\ldots, e_p)$ et $E_q = (f_1,\ldots, f_p)$ (dans B toutes deux)
- et leurs générateurs d'irréductibilité: $\alpha = \sum_{i=1}^{p} n_i e_i$ et $\alpha' = \sum_{j=1}^{q} n'_j f_j$, éléments de A,

on a : $\mathbf{L}_p \oplus \mathbf{L}_q \subset B$.

► $\mathbf{L}_p = \{ \ell_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \mid \exists i \ \lambda_i < n_i \}$ et $\mathbf{L}_q = \{ \ell_q = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j f_j \mid \exists j \ \lambda_j < n'_j \}$. Comme $\mathbf{L}_p \oplus \mathbf{L}_q$ est propre, il suffit de montrer que $\mathbf{L}_p \oplus \mathbf{L}_q$ ne contient aucun élément de A.

Pour $\ell_p \in \mathbf{L}_p$ on définit l'entier $h(\ell_p) = \ell_{p1} + \ell_{p2} + \ldots + \ell_{pp}$.

Pour $\ell_q \in \mathbf{L}_q$ fixé, on effectue une simple récurrence portant sur l'entier $n = h(\ell_p)$; on peut supposer $\ell_p \neq 0$.
Supposons que $\ell'_p + \ell_q \in B$ pour tout ℓ'_p tel que $h(\ell'_p) < n$;
soit alors ℓ_p tel que $n = h(\ell_p)$; pour tout i, posons $m_i = 0$ si $\ell_{pi} \geq n_i$ et $n_i - \ell_{pi}$ autrement ;
soit $\mu = \sum_{i=1}^{p} m_i e_i$; supposons que $\ell_p + \ell_q \in A$; soit $z = \ell_p + \ell_q + \mu$;
alors on dispose de deux décompositions pour z :

$$z = (\ell_p + \ell_q)_A + \mu_B \quad \text{car } \mu \in \mathbf{L}_p \subset B \text{, et}$$

$$z = \ell_p + \ell_q + \mu = \ell'_p + \mu' + \ell_q + \mu = (\ell'_p + \ell_q)_B + \alpha_A ;$$

où l'on a posé: $\ell_p = \ell'_p + \mu'$, avec $\mu' = \sum_{i=1}^{p} (n_i - m_i).e_i$ et $\ell'_{p\,i} = \ell_{p\,i} + m_i - n_i$;
on a : $h(\ell'_p) < n$,
car si $\ell_{pi} \geq n_i$, alors $m_i = 0$ et $\ell_{p\,i} + m_i - n_i < \ell_{p\,i}$, et si $\ell_{pi} < n_i$, alors $\ell_{p\,i} + m_i - n_i = 0 \leq \ell_{p\,i}$; et si on est toujours dans le deuxième cas, il n'est que de remarquer qu'un au moins des $\ell_{p\,i}$ n'est pas nul, puisque $\ell_p \neq 0$; ainsi , par hypothèse de récurrence, $\ell'_p + \ell_q \notin A$ et donc $\in B$, car la partie $\mathbf{L}_p \oplus \mathbf{L}_q$ est propre.

Clairement ces deux décompositions sont distinctes…d'où la contradiction et $\ell_p + \ell_q \notin A$. ◄

Proposition 5-8.

Toujours avec les mêmes hypothèses, et les mêmes notations et posant $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\alpha$ et $\mathbf{D}' = \mathbf{N}.\alpha'$, $\mathbf{D} \oplus \mathbf{D}'$ est une partie propre et l'on a : $A = A_{\mathbf{D} \oplus \mathbf{D}'}$ et $B = B_{\mathbf{D} \oplus \mathbf{D}'} \oplus \mathbf{L}_p \oplus \mathbf{L}_q$.

► On établit ce résultat par récurrence (transfinie) portant sur les couples (p,p') d'entiers coordonnées des éléments de $\mathbf{D} \oplus \mathbf{D'}$. Les éléments de $\mathbf{L}_p$ (resp. $\mathbf{L}_q$) sont génériquement désignés par la lettre ℓ (resp. ℓ'). On suppose que pour tout couple $(q,q') \prec (p,p')$ on a :

$$\underline{a}(q.\alpha+q'.\alpha'+\ell+\ell') = \underline{a}(q.\alpha+q'.\alpha') \text{ et } \underline{b}(q.\alpha+q'.\alpha'+\ell+\ell') = \underline{b}(q.\alpha+q'.\alpha')+\ell+\ell'$$

avec $\underline{a}(q.\alpha+q'.\alpha')$ et $\underline{b}(q.\alpha+q'.\alpha') \in \mathbf{D} \oplus \mathbf{D'}$

soit $z_0 = p.\alpha+p'.\alpha'+\ell+\ell'(z_0 = z + z'$, avec $z = p.\alpha+\ell$ et $z' = p'.\alpha'+\ell')$; on décompose $z_0 -\ell-\ell'= p.\alpha+p'.\alpha'$ en a + b, où $a = p_1.\alpha+p'_1.\alpha'+\ell_1+\ell'_1$ et $b = p_2.\alpha+p'_2.\alpha'+\ell_2+\ell'_2$; supposons que l'on ait : $(p_1,p'_1) \prec (p,p')$ et $(p_2,p'_2) \prec (p,p')$; alors :

$$p_1.\alpha+p'_1.\alpha'+\ell_1+\ell'_1 = \underline{a}(p_1.\alpha+p'_1.\alpha'+\ell_1+\ell'_1) = \underline{a}(p_1.\alpha+p'_1.\alpha') ;$$

donc $\ell_1 = \ell'_1 = 0$ et $p_1.\alpha+p'_1.\alpha' \in A$; dans ce cas, $b = (p-p_1).\alpha + (p'-p'_1).\alpha'$; de même on a :

$$p_2.\alpha+p'_2.\alpha'+\ell_2+\ell'_2 = \underline{b}(p_2.\alpha+p'_2.\alpha'+\ell_2+\ell'_2) = \underline{b}(p_2.\alpha+p'_2.\alpha')+\ell_2+\ell'_2 ;$$

donc $p_2.\alpha+p'_2.\alpha' \in B$ et l'unicité de décomposition selon $\mathbf{D} \oplus \mathbf{D'} \oplus \mathbf{L}_p \oplus \mathbf{L}_q$ achève de prouver que:

$$\underline{a}(p.\alpha+p'.\alpha') = p_1.\alpha+p'_1.\alpha' \text{ et } \underline{b}(p.\alpha+p'.\alpha') = p_2.\alpha+p'_2.\alpha' ;$$

de plus, $\underline{b}(p_2.\alpha+p'_2.\alpha'+\ell+\ell') = \underline{b}(p_2.\alpha+p'_2.\alpha')+\ell+\ell' = p_2.\alpha+p'_2.\alpha'+\ell+\ell'$ (en appliquant l'hypothèse de récurrence) et du coup, on a :

$$\underline{a}(z_0) = \underline{a}(p.\alpha+p'.\alpha'+\ell+\ell') = p_1.\alpha+p'_1.\alpha' = \underline{a}(p.\alpha+p'.\alpha'), \text{ et}$$
$$\underline{b}(z_0) = \underline{b}(p.\alpha+p'.\alpha'+\ell+\ell') = p_2.\alpha+p'_2.\alpha'+\ell+\ell' = \underline{b}(p.\alpha+p'.\alpha')+\ell+\ell' ;$$

supposons maintenant que $(p_1,p'_1) = (p,p')$; alors $p.\alpha+p'.\alpha' \in A$, et $\ell+\ell' \in B$, de sorte qu'on a encore, grâce à l'unicité de décomposition :

$$\underline{a}(z_0) = \underline{a}(p.\alpha+p'.\alpha'+\ell+\ell') = p.\alpha+p'.\alpha' = \underline{a}(p.\alpha+p'.\alpha') \text{ et } \underline{b}(z_0) = \ell+\ell' = \underline{b}(p.\alpha+p'.\alpha')+\ell+\ell';$$

supposons enfin que $(p_2,p'_2) = (p,p')$; alors $b = p.\alpha+p'.\alpha'+\ell_2+\ell'_2$ et nécessairement $\ell_2=\ell'_2 =0$ et $b = p.\alpha+p'.\alpha'$, et a = 0 ; ainsi on trouve encore :

$$\underline{a}(z_0) = 0 = \underline{a}(p.\alpha+p'.\alpha'), \text{ et}$$
$$\underline{b}(z_0) = p.\alpha+p'.\alpha'+\ell+\ell' = \underline{b}(p.\alpha+p'.\alpha')+\ell+\ell' \ . \blacktriangleleft$$

Proposition 5-9 (généralise la proposition 5-7)

Dans le cas de r bases de sous-objets irréductibles simples, soit $E_1, E_2,...E_r$ (toutes dans B) et leurs générateurs d'irréductibilité : $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_r$ (tous dans A) on a :

$$\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r \subset B, \text{ où , rappelons-le : } \mathbf{L}_s = \{ \ell_s = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{p_s}} \lambda_{\mathbf{s\,i}} \mathbf{e_{s\,i}} \mid \exists i \ \lambda_{s\,i} < n_{s\,i} \}.$$

► Rappelons que :

$\mathbf{L}_1 = \{ \ell_1 = \sum_{i=1}^{p_1} \lambda_{1i} e_{1i} \mid \exists i \ \lambda_{1i} < n_{1i} \}$,…, $\mathbf{L}_r = \{ \ell_r = \sum_{i=1}^{p_r} \lambda_{ri} e_{ri} \mid \exists i \ \lambda_{ri} < n_{ri} \}$.

On établit ce résultat par récurrence sur le nombre r. Pour r = 2, la **proposition 5-7** fournit le résultat. Supposons le résultat établi pour tout s < r. Alors $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{L}_3 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r \subset B$.

Comme $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r$ est propre, il suffit de montrer que $\mathbf{L}_1 \oplus (\mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r)$ ne contient aucun élément de A.

Pour $\ell_1 \in \mathbf{L}_1$ on définit l'entier $h(\ell_1) = \ell_{1\,1} + \ell_{1\,2} + \ldots + \ell_{1\,p1}$.

Pour $\ell_2 + \ldots + \ell_r \in \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r$ fixé, on effectue une simple récurrence portant sur l'entier n $= h(\ell_1)$; on peut supposer $\ell_1 \neq 0$.
Supposons que $\ell'_1 + (\ell_2 + \ldots + \ell_r) \in B$ pour tout ℓ'_1 tel que $h(\ell'_1) < n$;
soit alors ℓ_1 tel que $n = h(\ell_1)$; pour tout i, posons $m_i = 0$ si $\ell_{1\,i} \geq n_{1\,i}$ et $n_{1\,i} - \ell_{1\,i}$ autrement ;
soit $\mu = \sum_{i=1}^{p_1} m_i e_{1i}$; supposons que $\ell_1 + (\ell_2 + \ldots + \ell_r) \in A$; soit $z = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_r + \mu$;
alors on dispose de deux décompositions pour z :

$$z = (\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_r)_A + \mu_B \text{ car } \mu \in \mathbf{L}_1 \subset B \text{ , et}$$

$$z = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_r + \mu = \ell'_1 + \mu' + \ell_2 + \ldots + \ell_r + \mu = (\ell'_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_r)_B + (\alpha_1)_A \,;$$

où l'on a posé: $\ell_1 = \ell'_1 + \mu'$, avec $\mu' = \sum_{i=1}^{p_1} (n_{1i} - m_i).e_{1i}$ et $\ell'_{1\,i} = \ell_{1\,i} + m_i - n_{1\,i}$;
on a : $h(\ell'_1) < n$,
car si $\ell_{1\,i} \geq n_{1\,i}$, alors $m_i = 0$ et $\ell_{1\,i} + m_i - n_{1\,i} < \ell_{1\,i}$,
et si $\ell_{1\,i} < n_{1\,i}$, alors $\ell_{1\,i} + m_i - n_{1\,i} = 0 \leq \ell_{1\,i}$;
et si on est toujours dans le deuxième cas, il n'est que de remarquer qu'un au moins des $\ell_{1\,i}$ n'est pas nul, puisque $\ell_1 \neq 0$; ainsi, par hypothèse de récurrence, $(\ell'_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_r) \notin A$ et donc $\in B$, car la partie $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r$ est propre.

Clairement ces deux décompositions sont distinctes d'où une contradiction : alors l'élément $\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_r \notin A$. ◄

Proposition 5-10 (généralise la proposition 5-8)

Toujours avec les mêmes hypothèses, et les mêmes notations, posant $\mathbf{D}_1 = \mathbf{N}.\alpha_1$, $\mathbf{D}_2 = \mathbf{N}.\alpha_2$, …$\mathbf{D}_r = \mathbf{N}.\alpha_r$, alors $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D}_r$ est une partie propre et on a :

$$A = A_{\mathbf{D}} \text{ et } B = B_{\mathbf{D}} \oplus \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r \,.$$

► On établit ce résultat par récurrence (transfinie) portant sur les r-uples $(p_1, p_2,\ldots,p_r)$ d'entiers coordonnées des éléments de $\mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus \ldots\oplus \mathbf{D}_r$. Les éléments de $\mathbf{L}_p$ sont génériquement désignés par la lettre ℓ_p , pour tout p de 1 à r.

On suppose que pour tout r-uple $(q_1, q_2,\ldots,q_r) \prec (p_1, p_2,\ldots,p_r)$ on a :

$$\underline{a}(\sum_{j=1}^{r} q_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j) = \underline{a}(\sum_{j=1}^{r} q_j\alpha_j) \text{ et } \underline{b}(\sum_{j=1}^{r} q_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j) = \underline{b}(\sum_{j=1}^{r} q_j\alpha_j) + \sum_{j=1}^{r}\ell_j ,$$

avec $\underline{a}(\sum_{j=1}^{r} q_j\alpha_j)$ et $\underline{b}(\sum_{j=1}^{r} q_j\alpha_j) \in \mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus \ldots\oplus \mathbf{D}_r$;

soit $z_0 = \sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j$ ($z_0 = \sum_{j=1}^{r} z_j$, avec $z_j = p_j.\alpha_j+\ell_j$); on décompose $z_0 - \sum_{j=1}^{r}\ell_j = \sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j$ en a + b, où $a = \sum_{j=1}^{r} p_j^{1}\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j^{1}$ et $b = \sum_{j=1}^{r} p_j^{2}\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j^{2}$; supposons que l'on ait : $(p_1^{1}, p_2^{1},\ldots, p_r^{1}) \prec (p_1, p_2,\ldots,p_r)$ et $(p_1^{2}, p_2^{2},\ldots, p_r^{2}) \prec (p_1, p_2,\ldots,p_r)$; alors :

$$\sum_{j=1}^{r} p_j^{1}\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j^{1} = \underline{a}(\sum_{j=1}^{r} p_j^{1}\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j^{1}) = \underline{a}(\sum_{j=1}^{r} p_j^{1}\alpha_j) ;$$

donc $\forall j,\ 1 \le j \le r,\ \ell_j^{1} = 0$ et $\sum_{j=1}^{r} p_j^{1}\alpha_j \in$ A; dans ce cas, $b = \sum_{j=1}^{r}(p_j - p_j^{1}).\alpha_j$; de même on a :

$$\sum_{j=1}^{r} p_j^{2}\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j^{2} = \underline{b}(\sum_{j=1}^{r} p_j^{2}\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j^{2}) = \underline{b}(\sum_{j=1}^{r} p_j^{2}\alpha_j) + \sum_{j=1}^{r}\ell_j^{2} ;$$

donc $\sum_{j=1}^{r} p_j^{2}\alpha_j \in$ B et l'unicité de décomposition selon $\mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus ..\oplus \mathbf{D}_r \oplus \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus ..\oplus \mathbf{L}_r$ achève de prouver que:

$$\underline{a}(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j) = \sum_{j=1}^{r} p_j^{1}\alpha_j \quad \text{et} \quad \underline{b}(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j) = \sum_{j=1}^{r} p_j^{2}\alpha_j \ ;$$

de plus, $\underline{b}(\sum_{j=1}^{r} p_j^{2}\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j) = \underline{b}(\sum_{j=1}^{r} p_j^{2}\alpha_j) + \sum_{j=1}^{r}\ell_j = \sum_{j=1}^{r} p_j^{2}\alpha_j + \sum_{j=1}^{r}\ell_j$ (en appliquant l'hypothèse de récurrence) et du coup, on a :

$$\underline{a}(z_0) = \underline{a}\Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{r} \ell_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} p_j^{\,1}\alpha_j = \underline{a}\Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j\Big), \text{ et}$$

$$\underline{b}(z_0) = \underline{b}\Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{r} \ell_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} p_j^{\,2}\alpha_j + \sum_{j=1}^{r} \ell_j = \underline{b}\Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j\Big) + \sum_{j=1}^{r} \ell_j \ ;$$

supposons maintenant que $(p_1^{\,1}, p_2^{\,1},\dots, p_r^{\,1}) = (p_1, p_2,\dots,p_r)$; alors $\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j \in$ A, et $\sum_{j=1}^{r} \ell_j \in$ B, de sorte qu'on a encore, grâce à l'unicité de décomposition :

$$\underline{a}(z_0) = \underline{a}\Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{r} \ell_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j = \underline{a}\Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j\Big) \text{ et } \underline{b}(z_0) = \sum_{j=1}^{r} \ell_j = \underline{b}\Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j\Big) + \sum_{j=1}^{r} \ell_j \ ;$$

supposons enfin que $(p_1^{\,2}, p_2^{\,2},\dots, p_r^{\,2}) = (p_1, p_2,\dots,p_r)$; alors, $b = \sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{r} \ell_j^{\,2}$ et nécessairement $\forall j,\ 1 \le j \le r,\ \ell_j^{\,2} = 0$ et $b = \sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j$, et $a = 0$; ainsi on trouve encore :

$$\underline{a}(z_0) = 0 = \underline{a}\Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j\Big), \text{ et}$$

$$\underline{b}(z_0) = \sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{r} \ell_j = \underline{b}\Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\alpha_j\Big) + \sum_{j=1}^{r} \ell_j \qquad \blacktriangleleft$$

La proposition suivante concerne le cas général.
Elle « rétablit » la symétrie entre A **et** B.

Proposition 5-11 (cas général, généralise les propositions 5-8 et 5-10).

- On suppose que chaque axe est entièrement dans A ou entièrement dans B (il y a donc eu éventuellement une première *simplification* par les axes sur lesquels on a: $|A| = |B| = \infty$, grâce au ***théorème* 1-1**, et aussi une première *réduction*, grâce à la ***proposition* 4-1**).

- On dispose des *cycles et singletons* qui sont dans B :
$(f_1, f_2,\dots, f_t)$ les éléments de S_B ; ils engendrent le sous-monoïde $\mathbf{S_B}$,
les r cyles bases de sous-objets irréductibles simples $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2,\dots,\mathbf{E}_r$ à bords dans B, avec générateurs d'irréductibilité $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, éléments de A, générateurs des droites $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, **…,** $\mathbf{D}_r$.

- On dispose aussi des *cycles et singletons* qui sont dans A :
$(g_1, g_2,\dots, g_u)$ les éléments de S_A ; ils engendrent le sous-monoïde $\mathbf{S_A}$,

les s cycles bases de sous-objets irréductibles simples $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2,\ldots,\mathbf{F}_s$ à bords dans A, avec générateurs d'irréductibilité β_1, β_2, **…,** β_s , éléments de B, générateurs des droites $\mathbf{D'}_1$, $\mathbf{D'}_2$, **…,** $\mathbf{D'}_s$;

- On dispose encore des « régions » $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, **…,** $\mathbf{L}_r$ qui sont entièrement dans B ,
et des « régions » $\mathbf{L'}_1$, $\mathbf{L'}_2$, **…,** $\mathbf{L'}_s$ qui sont entièrement dans A .
Alors,

$$S_A \oplus \mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D}_r \oplus \mathbf{S}_B \oplus \mathbf{D'}_1 \oplus \mathbf{D'}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D'}_s$$
$$\text{et } \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r \oplus \mathbf{L'}_1 \oplus \mathbf{L'}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L'}_s$$

sont des parties propres.

- On pose :

$$\mathbf{L} \;=\; \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r \;\;,\;\; \mathbf{L'} \;=\; \mathbf{L'}_1 \oplus \mathbf{L'}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L'}_s$$
$$\text{et } \mathbf{D} \;=\; S_A \oplus \mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D}_r \oplus \mathbf{S}_B \oplus \mathbf{D'}_1 \oplus \mathbf{D'}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D'}_s .$$

Les générateurs de **D** sont désignés génériquement par γ_i; ce sont les éléments f_1, $f_2,\ldots, f_t$ de S_B , les éléments $g_1, g_2,\ldots, g_u$ de S_A , et les générateurs α_1, α_2, **…,** α_r , β_1, β_2, **…,** β_s.

Tout élément z se décompose de façon unique en $z = \ell + \ell' + \sum_i p_i \cdot\gamma_i$, avec $\ell \in$ **L** , $\ell' \in$ **L'** et $\sum_i p_i \cdot\gamma_i \in$ **D** , et sa décomposition selon (A,B) est donnée par :

$$\underline{a}(z) = \ell' + \underline{a}(\textstyle\sum_i p_i \cdot\gamma_i) \;\text{ et }\; \underline{b}(z) = \ell + \underline{b}(\textstyle\sum_i p_i \cdot\gamma_i).$$

► On établit ce résultat par récurrence (transfinie) portant sur les n-uples d'entiers $(p_i)_{1\le i \le n}$ coordonnées des éléments de **D**.

Les éléments de $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r$, génériquement désignés par la lettre ℓ sont dans B.
Les éléments de $\mathbf{L'} = \mathbf{L'}_1 \oplus \mathbf{L'}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L'}_r$, génériquement désignés par la lettre ℓ'sont dans A.
Ces derniers faits résultent de la **proposition 5-10**.

On suppose que :

$$\forall\, z' = \ell + \ell' + \textstyle\sum_i q_i \cdot\gamma_i \text{ , où le n-uple } (q_i)_{1\le i \le n} \text{ est tel que : } (q_i)_{1\le i \le n} \prec (p_i)_{1\le i \le n}$$

on a :

$$\underline{a}(z') \;=\; \underline{a}(\ell + \ell' + \textstyle\sum_i q_i \cdot\gamma_i) \;=\; \ell' + \underline{a}(\textstyle\sum_i q_i \cdot\gamma_i),$$
$$\underline{b}(z') \;=\; \underline{b}(\ell + \ell' + \textstyle\sum_i q_i \cdot\gamma_i) \;=\; \ell + \underline{b}(\textstyle\sum_i q_i \cdot\gamma_i),$$

avec $\underline{a}(\sum_i q_i \cdot\gamma_i)$ et $\underline{b}(\sum_i q_i \cdot\gamma_i) \in$ **D**,

soit $z \;=\; \ell + \ell' + \sum_i p_i \cdot\gamma_i$; l'élément $z - \ell - \ell' = \sum_i p_i \cdot\gamma_i$ se décompose en a + b, où a priori :

$$a = \ell^1 + \ell'^1 + \textstyle\sum_i {p_i}^1 \cdot\gamma_i \text{ avec } \ell^1 \in \mathbf{L}\,,\; \ell'^1 \in \mathbf{L'} \text{ et } \textstyle\sum_i {p_i}^1 \cdot\gamma_i \in \mathbf{D} \text{ et}$$
$$b \;=\; \ell^2 + \ell'^2 + \textstyle\sum_i {p_i}^2 \cdot\gamma_i \text{ avec } \ell^2 \in \mathbf{L}\,,\; \ell'^2 \in \mathbf{L'} \text{ et } \textstyle\sum_i {p_i}^2 \cdot\gamma_i \in \mathbf{D}$$

supposons que l'on ait :

$$({p_i}^1)_{1\le i \le n} \prec (p_i)_{1\le i \le n} \;\text{ et }\; ({p_i}^2)_{1\le i \le n} \prec (p_i)_{1\le i \le n}$$

alors :

$$\ell^1+\ell'^1+\sum_i p_i^1.\gamma_i \;=\; \underline{a}(\ell^1+\ell'^1+\sum_i p_i^1.\gamma_i\,) = \ell'^1+\underline{a}(\sum_i p_i^1.\gamma_i\,)$$

d'où $\ell^1 = 0$ et $\sum_i p_i^1.\gamma_i \in$ A d'après l'unicité de décomposition selon $\mathbf{L}\oplus\mathbf{L}'\oplus\mathbf{D}$ **;**

de sorte que $a = \ell'^1+\sum_i p_i^1.\gamma_i$;

dans ce cas, $b = \sum_i p_i.\gamma_i - (\ell'^1+\sum_i p_i^1.\gamma_i\,) = \sum_i (p_i - p_i^1).\gamma_i - \ell'^1$

de même on a :

$$\ell^2+\ell'^2+\sum_i p_i^2.\gamma_i \;=\; \underline{b}(\ell^2+\ell'^2+\sum_i p_i^2.\gamma_i\,) = \ell^2+\underline{b}(\sum_i p_i^2.\gamma_i\,)$$

d'où $\ell'^2 = 0$ et $\sum_i p_i^2.\gamma_i \in$ B d'après l'unicité de décomposition selon $\mathbf{L}\oplus\mathbf{L}'\oplus\mathbf{D}$ **;**

de sorte que $b = \ell^2+\sum_i p_i^2.\gamma_i$; alors il vient :

$a+b = \;= \ell'^1+\sum_i p_i^1.\gamma_i + \ell^2+\sum_i p_i^2.\gamma_i \;=\; \sum_i p_i.\gamma_i$,

et comme la décomposition selon $\mathbf{L}\oplus\mathbf{L}'\oplus\mathbf{D}$ est directe, on a, par unicité :

$$\ell'^1 = \ell^2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, i\,,\ 1\le i\le n\,,\ p_i = p_i^1 + p_i^2\ ;$$

en conséquence, on a : $a = \sum_i p_i^1.\gamma_i$ et $b = \sum_i p_i^2.\gamma_i$

on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\ell+\ell'+\sum_i p_i^1.\gamma_i$ et à $\ell+\ell'+\sum_i p_i^2.\gamma_i$; il vient :

$$\underline{a}(\,\ell+\ell'+\sum_i p_i^1.\gamma_i\,) \;=\; \ell'+\underline{a}(\sum_i p_i^1.\gamma_i\,) \;=\; \ell'+\sum_i p_i^1.\gamma_i$$

$$\underline{b}(\,\ell+\ell'+\sum_i p_i^2.\gamma_i\,) = \ell+\underline{b}(\sum_i p_i^2.\gamma_i\,) \;=\; \ell+\sum_i p_i^2.\gamma_i$$

L'unicité de décomposition fait alors que :

$$\underline{a}(z) = \underline{a}(\ell+\ell'+\sum_i p_i.\gamma_i\,) = \ell'+\sum_i p_i^1.\gamma_i$$
$$\underline{b}(z) = \underline{b}(\ell+\ell'+\sum_i p_i.\gamma_i\,) = \ell+\sum_i p_i^2.\gamma_i$$

et comme :

$$\underline{a}(\sum_i p_i.\gamma_i\,) \;=\; a \;=\; \sum_i p_i^1.\gamma_i \quad \text{et} \quad \underline{b}(\sum_i p_i.\gamma_i\,) \;=\; b = \sum_i p_i^2.\gamma_i$$

le résultat est établi dans ce cas.

Supposons maintenant que l'on ait : $(p_i^1)_{1\le i\le n} \;=\; (p_i)_{1\le i\le n}$; comme on a :

$$a = \ell^1+\ell'^1+\sum_i p_i^1.\gamma_i = \ell^1+\ell'^1+\sum_i p_i.\gamma_i \;=\; \ell^1+\ell'^1+a+b\,,$$

il vient : $b+\ell^1+\ell'^1 = 0$, et donc, $b = \ell^1 = \ell'^1 = 0$ et $a = \sum_i p_i.\gamma_i$; d'après la **proposition 5-9** on voit que ℓ' est dans A, et d'après la **proposition 5-10** (dans laquelle il faut échanger les rôles de A et de B !), on peut dire que $\ell'+\sum_i p_i.\gamma_i \in$ A ; toujours d'après la **proposition 5-9**, on voit que $\ell \in$ B ; l'unicité de décomposition permet de conclure que :

$$\underline{a}(z) = \ell' + \sum_i p_i \cdot \gamma_i = \ell' + \underline{a}(\sum_i p_i \cdot \gamma_i) \ \text{ et } \ \underline{b}(z) = \ell = \ell + \underline{b}(\sum_i p_i \cdot \gamma_i) \ ;$$

le même raisonnement, avec échange des rôles entre A et B, permet de conclure, lorsque l'on a : $(p_i^2)_{1 \leq i \leq n} = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$. ◀

6. La suite des foncteurs dérivés associée à une décomposition directe multiplicative de $\mathbf{N}^*$.

Définition 6-1.
Une décomposition directe du (pré)monoïde *multiplicatif* $\mathbf{N}^*$ sera dite *décomposition directe multiplicative* de $\mathbf{N}^*$. C'est donc un couple (A,B) de parties de $\mathbf{N}^*$ tel que la multiplication des entiers définit une bijection de $A \times B$ sur $\mathbf{N}^*$.

Remarques.

1) L'emploi du *même* symbole « × » pour la multiplication et le produit cartésien exprime de façon « imagée » que la *notation* $A \times B = \mathbf{N}^*$ *n'est pas ambiguë*, dans ce cas.

2) Etant donné un bon ordre de l'ensemble des nombres premiers (**par exemple**, l'ordre croissant !) le monoïde multiplicatif ($\mathbf{N}^*$,×) est *naturellement isomorphe* au monoïde *somme* de **N** copies de (**N**, +) qu'on note (bizarrement) ($\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$, +) : à l'entier $n = p_{i1}{}^{\alpha 1}.\, p_{i2}{}^{\alpha 2} \dots p_{ik}{}^{\alpha k}$, on fait correspondre l'élément $\tilde{n} = (\tilde{n}_i)_{i \in \mathbf{N}}$ dont les composantes sont : $\tilde{n}_i = \alpha_m$ si $i = i_m$ et $\tilde{n}_i = 0$ si i n'est pas l'un des indices $i_1, i_2 \dots, i_k$.
Cet isomorphisme a les propriétés formelles d'un logarithme ; on le désignera par $\mathscr{Log}$ et son inverse par $\mathscr{Exp}$; sur l'axe canonique d'indice p, ce $\mathscr{Log}$ se restreint en le véritable logarithme de base p ; on peut encore dire que $\mathscr{Log}$ est un logarithme « *multi-bases* » (idem pour son inverse $\mathscr{Exp}$).

3) Une décomposition directe multiplicative de $\mathbf{N}^*$ s'identifie alors à une décomposition directe additive de $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$, la quelle induit sur tout $\mathbf{N}^{(X)}$, où X est une partie de **N**, une décomposition additive, qui est du type de celles étudiées jusqu'ici lorsque X est fini.

Pour des raisons structurelles faciles à comprendre, à l'interprétation additive précédente on préfère la description *fonctorielle* suivante (cf. ma thèse:1975-78), qui lui est parfaitement équivalente :

La donnée d'une décomposition directe multiplicative (A,B) de **N*** équivaut à celle d'un certain foncteur $\mathbf{\Phi}$ de *source la catégorie* $\mathscr{P}_f(\mathbf{P})$ des ensembles finis de nombres premiers (et inclusions entre eux) vers la *catégorie des décompositions directes additives* des puissances finies de **N** et restrictions entre elles :

A une partie finie $X = \{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}\}$ de l'ensemble **P** des nombres premiers (objet de $\mathscr{P}_f(\mathbf{P})$) le foncteur $\mathbf{\Phi}$ fait correspondre une décomposition additive directe $\mathbf{\Phi}(X)$ de $\mathbf{N}^n$, notée génériquement (A,B) (c'est ici qu'il convient de disposer d'un certain *bon ordre* dans l'ensemble **P**, par exemple l'ordre croissant !).

Si $Y = \{p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jm}\}$ est une partie de X à m éléments, la décomposition induite par (A,B) sur le sous-ensemble $\mathbf{N}_{j1} \oplus \mathbf{N}_{j2} \oplus \dots \oplus \mathbf{N}_{jm}$ de $\mathbf{N}^n$ détermine une décomposition additive directe $\mathbf{\Phi}(Y)$ de $\mathbf{N}^m$.

Le foncteur $\mathbf{\Phi}$ est ainsi complètement défini : l'inclusion $Y \subset X$ doit être vue comme une flèche $\iota : X \to Y$, et $\mathbf{\Phi}(\iota) : \mathbf{\Phi}(X) \to \mathbf{\Phi}(Y)$ est la « *restriction canonique*» associée.

A chaque entier premier p_i on fait correspondre un symbole $\mathbf{t}(p_i)$ qui caractérise le *type* de la décomposition induite (A_i , B_i) sur $\mathbf{N}_i$ ($= \mathbf{N}p_i$) auquel on a à faire :
$\mathbf{t}(p_i) = \mathscr{n}$ si $|A_i| = |B_i| = \infty$;
$\mathbf{t}(p_i) = \mathscr{b}$ si $|A_i| < \infty$ (et $|B_i| = \infty$);
$\mathbf{t}(p_i) = \mathscr{a}$ si $|B_i| < \infty$ (et $|A_i| = \infty$).

On pose :
$\mathbf{I} = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = \mathscr{n} \}$; pour une raison d'homogénéïté de notations, on pose $\mathcal{I} = \{\{i\}\}_{i \in \mathbf{I}}$
$\mathbf{F} = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = \mathscr{a}$ ou $\mathscr{b} \}$; plus précisément $\mathbf{F}_\beta = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = \mathscr{b} \}$ et $\mathbf{F}_\alpha = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = \mathscr{a} \}$.

Soit $p_i \in \mathbf{F}_\beta$ (resp. $\mathbf{F}_\alpha$) ; on désigne par e_i le plus petit élément sur la droite $\mathbf{N}_i$ qui ne soit pas dominé par A_i (resp. B_i) ; c'est un élément de B (resp. A) .

On dispose d'une partition naturelle $\mathcal{B}_\alpha$ (resp. $\mathcal{B}_\beta$) de l'ensemble $\mathbf{F}_\alpha$ (resp. $\mathbf{F}_\beta$) : $\mathcal{B}_\alpha$ et $\mathcal{B}_\beta$ ne sont autres que les ensembles de *bases d'objets irréductibles simples* ou *des singletons* :

soit $\{p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}\} \subset \mathbf{F}_\beta$ un élément de $\mathcal{B}_\beta$, avec $n > 1$; alors $E_n = (e_{i1} , e_{i2}, \ldots, e_{in})$ est une base d'objet irréductible, ce qui signifie qu'il existe un n-uple d'entiers non nuls $(m_{ij})_{1 \leq j \leq n}$ tel que l'élément $\alpha = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}.e_{ij}$ soit générateur d'irréductibilité, c'est-à-dire que la somme $\mathbf{N}.e_{i1} \oplus \mathbf{N}.e_{i1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{N}.e_{in}$ se décompose en $\mathbf{L} \oplus \mathbf{D}$ où $\mathbf{L} = \{\ell = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_{ij} \mid \exists j \ \lambda_{ij} < n_{ij}\}$ est entièrement contenu dans B et $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\alpha$ est une partie propre pour la décomposition (A,B) donnée, et $\alpha \in$ A.

Bien sûr, si $p \in \mathbf{F}_\beta$ ne fait partie d'aucune base d'objet irréductible, c'est le singleton $\{p\}$ qui est élément de $\mathcal{B}_\beta$. On désigne par $\mathbb{S}_\beta$ l'ensemble de ces singletons et par $\mathcal{B}'_\beta$ l'ensemble des bases d'objets irréductibles simples : $\mathcal{B}_\beta = \mathcal{B}'_\beta \cup \mathbb{S}_\beta$. On définit de même $\mathcal{B}'_\alpha$, $\mathbb{S}_\alpha$ et $\mathcal{B}_\alpha$ et on pose $\mathbb{S} = \mathbb{S}_\alpha \cup \mathbb{S}_\beta \cup \mathbf{I}$

Définition 6-2

Une partie de $\mathbf{P}$ est dite *saturée d'ordre* 1 *,* ou plus brièvement 1-*saturée*, si c'est une réunion d'éléments de $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\alpha \cup \mathcal{B}_\beta$.

Toute partie $X = \{p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik}\}$ de $\mathbf{P}$ engendre une partie 1-saturée X_f , à savoir la réunion des éléments E de $\mathcal{B}$ tels que $E \cap X \neq \emptyset$. Si X est finie, sa 1-saturée X_f l'est aussi.

Toute partie X de $\mathbf{P}$ admet une décomposition analogue à celle de $\mathbf{P}$ en $\mathbf{I} \cup \mathbf{F} = \mathbf{I} \cup \mathbf{F}_\alpha \cup \mathbf{F}_\beta$; on en désignera les éléments par la même lettre, mais avec l'indice X ; il est clair que l'on a les égalités suivantes : $\mathbf{I}_X = \mathbf{I} \cap X$; $\mathbf{F}_X = \mathbf{F} \cap X$; $\mathbf{F}_{\beta X} = \mathbf{F}_\beta \cap X$; $\mathbf{F}_{\alpha X} = \mathbf{F}_\alpha \cap X$.

Par contre, pour une base d'objet irréductible simple donnée $E = \{p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik}\} \in \mathcal{B}'_\alpha$ (resp. $\mathcal{B}'_\beta$) , on a :

- ou bien $E \cap X = X$, et dans ce cas $E \in \mathcal{B}'_{\alpha X}$ (resp. $\mathcal{B}'_{\beta X}$),

- ou bien $E \cap X \neq X$, et dans ce cas $E \cap X \in \mathbb{S}_{\alpha X}$ (resp. $\mathbb{S}_{\beta X}$) ;
dans ce dernier cas on n'a pas d'égalité $\mathcal{B}_{\alpha X} = \mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{P}(X)$, puisqu'il y a des transferts possibles de $\mathcal{B}'_\alpha \cap \mathcal{P}(X)$ vers $\mathbb{S}_{\alpha X}$ (les bases *incomplètes* dans X sont *désagrégées* en singletons).

Donc, en général, on n'a pas d'égalité $\mathcal{B}_{\alpha X} = \mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{P}(X)$.
Par contre, on a la :

Proposition 6-1.

Une partie X est 1-saturée si et seulement si le phénomène de désagrégation ne s'y produit pas, c'est-à-dire si on a à la fois $\mathcal{B}_{\alpha X} = \mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{B}_{\beta X} = \mathcal{B}_\beta \cap \mathcal{P}(X)$.

Démonstration évidente suivant les **définitions 6-1** et **6-2**.

Définition 6-3

L'ensemble $\mathbf{P}^{(1)} = \mathcal{S} \cup \mathcal{B}$ est appelé *ensemble dérivé d'ordre* 1 de **P** relativement à la décomposition directe multiplicative donnée (A,B).

On peut munir $\mathbf{P}^{(1)}$ d'un quelconque bon ordre, mais aussi, si l'on y tient, du bon ordre « compatible » avec celui de **P**, c'est-à-dire qui induit sur $\mathcal{S}$ le bon ordre provenant de **P** et qui a aussi la propriété suivante :

$$\forall E \in \mathcal{B} \;\; \forall \{p\} \in \mathbf{P}^{(1)} \;\; [\, p < \sup(E) \;\Rightarrow\; \{p\} < E \,]$$

Ce bon ordre est parfaitement déterminé par celui de **P**.

Par exemple, avec **P** = { 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …}, muni de l'ordre de croissance, supposons que {3}, {17}, {29} soient des singletons et que {1, 5, 11} , {7, 13} , {2, 19}, {23, 31} soient des bases d'objets irréductibles, alors on pourra adopter dans $\mathbf{P}^{(1)}$ le bon ordre lié à l'ordre de croissance des *sup.* commençant ici par :

$$\{3\} < \{1, 5, 11\} < \{7, 13\} < \{17\} < \{2, 19\} < \{29\} < \{23, 31\} < \ldots$$

Soit $X^{(1)}$ une partie finie de $\mathbf{P}^{(1)}$; il lui correspond une partie finie et 1-saturée X de **P**, savoir :

$$X = \int X^{(1)} = \{\, p \mid \exists E \in X^{(1)} \, (p \in E) \,\}.$$

Posons $|X| = n$ et $|X^{(1)}| = m$. On distingue dans X l'ensemble $\mathcal{S}(X)$ des singletons {p} et l'ensemble $\mathcal{B}'(X)$ des bases d'objets irréductibles simples E ; ce sont les éléments de $X^{(1)}$.

A chaque base d'objet irréductible simple E correspond un générateur d'irréductibilité $\alpha(E)$. La décomposition $\Phi(X)$ de $\mathbf{N}^n$ détermine alors, par restriction à la partie propre :

$$\left(\oplus_{p \in \mathscr{S}(X)} \mathbf{N}_p\right) \oplus \left(\oplus_{E \in \mathscr{B}'(X)} \mathbf{N}.\alpha(E)\right)$$ (**proposition (5-11**)

et choix des bons ordres - compatibles entre eux par exemple), une décomposition directe de $\mathbf{N}^m$; c'est cette décomposition qu'on désigne par $\Phi^{(1)}(X^{(1)})$ ou simplement $\Phi(X^{(1)})$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

Soit $Y^{(1)}$ une partie de $X^{(1)}$ et $Y = \int Y^{(1)}$; posons $|Y| = n'$ et $|Y^{(1)}| = m'$; Y est une partie saturée de X, de sorte que $\mathscr{B}'(Y)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{B}'(X)$ et $\mathscr{S}(Y)$ un sous-ensemble de $\mathscr{S}(X)$; ainsi le carré d'inclusions suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\left(\oplus_{p \in \mathscr{S}(Y)} \mathbf{N}_p\right) \oplus \left(\oplus_{E \in \mathscr{B}'(Y)} \mathbf{N}.\alpha(E)\right) & \longrightarrow & \mathbf{N}^{m'} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\left(\oplus_{p \in \mathscr{S}(X)} \mathbf{N}_p\right) \oplus \left(\oplus_{E \in \mathscr{B}'(X)} \mathbf{N}.\alpha(E)\right) & \longrightarrow & \mathbf{N}^{m}
\end{array}$$

et $\Phi^{(1)}(Y^{(1)})$, décomposition additive directe de $\mathbf{N}^{m'}$, apparaît bien comme la restriction canonique de $\Phi^{(1)}(X^{(1)})$, de sorte que $\Phi^{(1)}$ est un foncteur qui « dérive » du foncteur Φ ; sa source est la catégorie $\mathscr{P}_f(\mathbf{P}^{(1)})$ des ensembles finis de $\mathbf{P}^{(1)}$ et inclusions entre eux.

Définition 6-4

Nous dirons que $\Phi^{(1)}$ est le foncteur *dérivé* de Φ relativement à la décomposition directe multiplicative (A,B) donnée. Par récurrence, sont définis les *ensembles dérivés* $\mathbf{P}^{(r)}$ et les *foncteurs dérivés* $\Phi^{(r)}$ de tous ordres.

De même on définit les ensembles saturés de tous ordres.
Par restriction à une partie X de **P**, on définit de même les ensembles dérivés $X^{(r)}$, le foncteur restriction $\mathbf{\Phi}_X$ et sa suite de foncteurs dérivés $\mathbf{\Phi}_X{}^{(r)}$.

Définition 6-5

Tout ensemble $\mathbf{N}\alpha$, où α est élément de $X^{(r)}$, est appelé *axe principal.*

Construction.

Se pose maintenant le problème consistant à donner d'une décomposition directe (A,B) de $\mathbf{N}^*$ une description *constructive* , c'est-à-dire qu'il s'agit de décrire l'ensemble des paramètres numériques (dits *paramètres libres*) qui caractérisent le foncteur $\mathbf{\Phi}$ associé à (A,B) : ce sont les choix des ensembles dérivés successifs $\mathbf{P}^{(r)}$, partant de $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{P}$ et les valeurs des diverses fonctions $\boldsymbol{\mu}^{(r)}$ (multiplicateurs) , $\mathbf{t}^{(r)}$ (types) et $\boldsymbol{\nu}^{(r)}$ (localisation des générateurs d'objets irréductibles) :

Première étape.

C'est la donnée pour chaque entier premier p d'une décomposition directe de **N** qui sera celle de l'axe $\mathbf{N}_p$, c'est-à-dire, pour chaque p, d'une *suite (finie ou non) de multiplicateurs* $\boldsymbol{\mu}(p)$, et d'un *choix pour* 1 ($1\in$ A *ou* $1\in$ B) ;

- si la suite est infinie c'est que $p \in \mathbf{I}$ et $\mathbf{t}(p) = \mathscr{n}$;
- si la suite est finie c'est que $p \in \mathbf{F}$;
  - $p\in \mathbf{F}_\beta$ et $\mathbf{t}(p) = \mathscr{b}$, si $1\in A$ et $|\boldsymbol{\mu}(p)|$ impair ou si $1\in B$ et $|\boldsymbol{\mu}(p)|$ pair ;
  - $p\in \mathbf{F}_\alpha$ et $\mathbf{t}(p) = \mathscr{a}$, si $1\in B$ et $|\boldsymbol{\mu}(p)|$ impair ou si $1\in A$ et $|\boldsymbol{\mu}(p)|$ pair ;

à ce stade, la fonction de typification $\mathbf{t} : \mathbf{P} \rightarrow \{\mathscr{n},\mathscr{a},\mathscr{n}\}$ est donc entièrement déterminée.

Deuxième étape.

Elle consiste à préciser les éléments de $\mathscr{B}'$, aussi bien ceux de $\mathscr{B}'_\alpha$ que de $\mathscr{B}'_\beta$; les seules règles à respecter sont les suivantes : pour qu'un ensemble fini $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de **P** puisse appartenir à $\mathscr{B}'_\beta$ (resp. $\mathscr{B}'_\alpha$) il est nécessaire que ce soit un sous ensemble fini de plus de 2 éléments de $\mathbf{F}_\beta = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = \mathscr{b}\}$ (resp. $\mathbf{F}_\alpha = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = \mathscr{a} \}$) ; d'autre part, deux éléments de $\mathscr{B}'$ ne peuvent qu'être disjoints.
Font alors partie des singletons, outre les éléments p tels que $\mathbf{t}(p) = \mathscr{n}$, les éléments p de $\mathbb{S}_\beta$ (resp. $\mathbb{S}_\alpha$) tels que $t(p) = \mathscr{b}$ (resp. $t(p) = \mathscr{a}$) et qui n'ont pas été retenus pour constituer les éléments de $\mathscr{B}'$; on pose : $\mathscr{B}_\beta = \mathscr{B}'_\beta \cup \mathbb{S}_\beta$, $\mathscr{B}_\alpha = \mathscr{B}'_\alpha \cup \mathbb{S}_\alpha$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_\alpha \cup \mathscr{B}_\beta$.
L'ensemble $\mathbf{P}^{(1)} = \mathscr{I} \cup \mathscr{B}$ est alors constitué .

Troisième étape.

Elle consiste à fournir les multiplicateurs (entiers > 0) qui permettent de localiser les générateurs d'irréductibilité ; c'est la donnée d'une fonction $\boldsymbol{\nu} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{N}^*$ où **B** n'est autre que l'ensemble des nombres premiers qui participent aux bases d'objets irréductibles choisies, i.e. $\mathbf{B} = \int\mathscr{B}' = \{ p \mid \exists E \in \mathscr{B}' (p \in E)\}$.

Soit $E = \{p_1, p_2,\ldots, p_n\}\in \mathscr{B}'$; les décompositions sur les axes $\mathbf{N}_i$ sont fournies par la fonction $\boldsymbol{\mu}$; on peut *étendre la définition de* **t** en posant $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}(p_i)$ pour n'importe quel $p_i \in E$; supposons par exemple que $\mathbf{t}(E) = \mathscr{b}$ c'est-à-dire que $|A_i| < \infty$ et $|B_i| = \infty$ sur chaque axe $\mathbf{N}_i$; alors on définit, pour chaque indice i, l'entier e_i qui est le plus petit entier de B_i dans $\mathbf{N}_i$ non majoré par un élément de A_i ; « l'hyper-cube » $\prod_{i=1}^{n}[0,e_i[$ a une décomposition directe complètement triviale, c'est-à-dire produit des décompositions induites sur les segments $[0,e_i[$; on sait (**proposition 4-1**) que le réseau $\boldsymbol{\Omega}$ engendré par les e_i doit être une partie propre (isomorphe à $\mathbf{N}^n$); le n-uple d'entiers non nuls $(\boldsymbol{\nu}(p_i)\ _i\ )_{1 \leq i \leq n}$ constitue les coordonnées du générateur d'irréductibilité: $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \nu(p_i).e_i$; $\mathbf{\Omega} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{D}$, où $\mathbf{L} = \{\ell = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i e_i \mid \exists i\ \lambda_i < \nu(p_i)\}$ est entièrement contenu dans B et $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\alpha$ doit être une partie propre pour la décomposition (A,B) à construire, et $\alpha \in$ A.

Arrivés à ce stade, on poursuit en définissant $\mu^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathscr{B}'^{(1)}$, puis $\nu^{(1)}$:

Première étape $^{(1)}$.

$\mu^{(1)}(\{p\}) = \mu(p)$ pour tout p élément de **I** ou de $\mathbb{S}$; pour E $\in \mathscr{B}'$, avec générateur d'irréductibilité α, $\mu^{(1)}(E)$ est la suite (finie ou non) des multiplicateurs qui décrivent la décomposition de $\mathbf{N}\alpha \sim \mathbf{N}$, sachant que le choix « $1 \in A$ ou $1 \in B$ » n'est plus à faire, puisque 1 correspond en fait à $1.\alpha$, et que, par définition des éléments de $\mathscr{B}'$, $\alpha \in A$ si $E \in \mathscr{B}'_\beta$ et $\alpha \in B$ si $E \in \mathscr{B}'_\alpha$. Ainsi $\mu^{(1)}$ « complète » la définition de μ en attribuant une valeur aux « nouveaux » éléments (ceux de $\mathscr{B}'$).

A ce stade, la fonction symbolique de typification $\mathbf{t}^{(1)} : \mathbf{P}^{(1)} \to \{\mathscr{n}, \mathscr{a}, \mathscr{b}\}$ est entièrement déterminée : la valeur de $\mathbf{t}^{(1)}(E)$ est déterminée en fait par la nature de la décomposition de $\mathbf{N}.\alpha$, elle-même déterminée par $\mu^{(1)}(E)$ *et* $\mathbf{t}(E)$:

- si $|\mu^{(1)}(E)| = \infty$, alors $\mathbf{t}^{(1)}(E) = \mathscr{n}$;
- si $\mathbf{t}(E) = \mathscr{b}$ ($\alpha \in$ A) : $|\mu^{(1)}(E)|$ pair $\Rightarrow \mathbf{t}^{(1)}(E) = \mathscr{a}$ et $|\mu^{(1)}(E)|$ impair $\Rightarrow \mathbf{t}^{(1)}(E) = \mathscr{b}$;
- si $\mathbf{t}(E) = \mathscr{a}$ ($\alpha \in$ B) : $|\mu^{(1)}(E)|$ pair $\Rightarrow \mathbf{t}^{(1)}(E) = \mathscr{b}$ et $|\mu^{(1)}(E)|$ impair $\Rightarrow \mathbf{t}^{(1)}(E) = \mathscr{a}$.

Si $\mathbf{t}(E) = \mathscr{b}$ (resp. $= \mathscr{a}$) le générateur d'irréductibilité α est dans A (resp.B) ; ceci ne détermine pas la valeur de $\mathbf{t}^{(1)}(E)$; il y faut la connaissance de $\mu^{(1)}(E)$. La décomposition $\mathbf{\Phi}(E)$ présentera une *suture* si et seulement si $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}^{(1)}(E)$ (suture de genre $\mathscr{b}$ si $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}^{(1)}(E) = \mathscr{a}$ ou suture de genre $\mathscr{a}$ si $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}^{(1)}(E) = \mathscr{b}$).

Deuxième étape $^{(1)}$.

On peut passer à $\mathscr{B}'^{(1)}$: un élément E_1 de $\mathscr{B}'^{(1)}$ doit obligatoirement contenir au moins un *nouvel* élément du genre $E = \{p_1, p_2, \ldots p_n\} \in \mathscr{B}'$; par contre, un élément de $\mathscr{B}'^{(1)}$ peut fort bien incorporer des *singletons de la première génération* (plus précisément, un élément de $\mathbb{S}_\beta$ peut fort bien être élément d'un élément E_1 de $\mathscr{B}'^{(1)}_\beta$, de même qu'un élément de $\mathbb{S}_\alpha$ peut fort bien être élément d'un élément $E^{(1)}$ de $\mathscr{B}'^{(1)}_\alpha$).
Exemple: $E^{(1)} = \{p, E, E'\}$ peut être élément de $\mathscr{B}'^{(1)}_\beta$ à la condition nécessaire que $p \in \mathbb{S}_\beta$, et que $E, E' \in \mathscr{B}'$ avec $\mathbf{t}^{(1)}(E) = \mathbf{t}^{(1)}(E') = \mathscr{b}$; bien noter que ceci ne signifie pas du tout qu'on doive avoir $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}(E')$; les quatre valeurs a priori de $(\mathbf{t}(E), \mathbf{t}(E'))$ sont possibles :

- $(\mathscr{a}, \mathscr{a})$ [$\mathbf{\Phi}(E)$ et $\mathbf{\Phi}(E')$ ne présentent pas de sutures] ,
- $(\mathscr{a}, \mathscr{b})$ [$\mathbf{\Phi}(E)$ ne présente pas de suture et $\mathbf{\Phi}(E')$ présente une suture de genre $\mathscr{a}$] ,
- $(\mathscr{b}, \mathscr{a})$ [$\mathbf{\Phi}(E')$ ne présente pas de suture et $\mathbf{\Phi}(E)$ présente une suture de genre $\mathscr{a}$] ,
- $(\mathscr{b}, \mathscr{b})$ [$\mathbf{\Phi}(E)$ et $\mathbf{\Phi}(E')$ présentent des sutures de genre $\mathscr{a}$] ,

et l'objet $\mathbf{\Phi}(X)$, où $X = \int X^{(1)} = \{ p \mid \exists E \in X^{(1)} (p \in E) \} = \{p\} \cup E \cup E'$, est un objet *irréductible d'ordre* ≥ 2.

Troisième étape [(1)].

Elle consiste à fournir les multiplicateurs (entiers > 0) qui permettent de localiser les générateurs d'irréductibilité d'ordre 2; c'est la donnée d'une fonction $\boldsymbol{\nu}^{(1)} : \mathbf{B}^{(1)} \rightarrow \mathbf{N}^*$ où $\mathbf{B}^{(1)}$ n'est autre que l'ensemble des éléments de $\mathbf{P}^{(1)}$ qui participent aux bases d'objets irréductibles choisies, i.e. $\mathbf{B}^{(1)} = \int \mathcal{B}'^{(1)} = \{E \mid \exists \; E^{(1)} \in \mathcal{B}'^{(1)} \; (E \in E^{(1)})\}$ (ici certains éléments E peuvent fort bien être de la forme $\{p\}$).

Soit $E^{(1)} = \{E_1, E_2,\dots, E_n\} \in \mathcal{B}'^{(1)}$; les axes $\mathbf{N}_i$ sont soit des axes canoniques de première génération, soit des axes de type $\mathbf{N}.\alpha$, où α est un générateur d'irréductibilité d'ordre 1 (qui se « *substitue* » aux entiers premiers formant sa *base*). Dans tous les cas, les décompositions induites sur les axes $\mathbf{N}_i$ sont fournies par la fonction $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$; on peut *étendre la définition de* $\mathbf{t}^{(1)}$ en posant $\mathbf{t}^{(1)}(E^{(1)}) = \mathbf{t}^{(1)}(E_i)$ pour n'importe quel $E_i \in E^{(1)}$; supposons par exemple que $\mathbf{t}^{(1)}(E) = \ell$ c'est-à-dire que $|A_i| < \infty$ et $|B_i| = \infty$ sur chaque axe $\mathbf{N}_i$; alors on définit, pour chaque indice i, l'entier e_i qui est le plus petit entier de B_i dans $\mathbf{N}_i$ non majoré par un élément de A_i ; « l'hyper-cube » $\prod_{i=1}^{n}[0,e_i[$ a une décomposition directe complètement triviale, c'est-à-dire produit des décompositions induites sur les segments $[0,e_i[$; on sait (***proposition* 4-1**) que le réseau $\mathbf{\Omega}$ engendré par les e_i doit être une partie propre (isomorphe à $\mathbf{N}^n$); le n-uple d'entiers non nuls $(\boldsymbol{\nu}^{(1)}(E_i))_{1 \leq i \leq n}$ constitue les coordonnées du générateur d'irréductibilité d'ordre 2, soit: $\alpha = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \boldsymbol{\nu}^{(1)}(E_i).e_i$; $\mathbf{\Omega} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{D}$, où $\mathbf{L} = \{\ell = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \mid \exists i \; \lambda_i < \boldsymbol{\nu}^{(1)}(E_i)\}$ est entièrement contenu dans B et $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\alpha$ doit être une partie propre pour la décomposition (A,B) à construire, et $\alpha \in A$.

Les objets irréductibles simples (éventuellement réduits) ne sont autres que les objets irréductibles d'ordre 1.

Et la construction de la décomposition (A,B) continue ainsi par récurrence. Il n'y a aucune raison a priori pour que cette récurrence aboutisse à la description de (A,B) en un nombre fini d'étapes. C'est dire aussi que la suite des foncteurs dérivés peut être infinie, auquel cas le foncteur $\mathbf{\Phi}$ n'est entièrement déterminé qu'après la donnée d'une infinité d'étapes comme celles décrites ci-dessus.

Par contre, pour un ensemble fini $X \subset \mathbf{P}$, le nombre des dérivés utiles est forcément fini : en effet, la suite $(|X^{(n)}|)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante tant que se présentent de nouveaux irréductibles et dès que $|X^{(n)}| = |X^{(n+1)}|$, cela signifie qu'il n'y a pas, à l'étape n+1, de nouvel irréductible qui se présente, et la décomposition $\mathbf{\Phi}(X)$ (ou si l'on veut le foncteur $\mathbf{\Phi}_X$) est entièrement déterminée. L'entier $|X^{(n)}|$ est le nombre de composantes irréductibles en lesquelles $\mathbf{\Phi}(X)$ se décompose en produit (ou somme directe).

7. Squelettes (ou une typologie possible des décompositions directes de $\mathbf{N}^*$)

Définition 7-1 (*Squelettes simples*).

Un *squelette simple* est une décomposition directe additive de $\mathbf{N}^X$ qui a les propriétés suivantes :

- l'ensemble de départ X (l'analogue de **P**) est fini, c'est la base du squelette;

- les fonctions μ, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$,…sont toutes à valeur *minimum finie*; cette valeur est *vide* quand il n'y a pas de suture, par contre, s'il se présente une suture à l'ordre r sur $\mathbf{N}\alpha$, on la suppose réduite au minimum, c'est-à-dire à *un seul point de suture* ; la suite $\mu^{(r)}(\alpha)$ se réduit donc à *un seul multiplicateur de valeur minimum* 2, i.e. $\mu^{(r)}(\mathbf{N}\alpha) = (2)$ (c'est la division par 2) ;

- enfin, les fonctions de localisation des générateurs d'irréductibilité $\nu^{(r)} : \mathbf{B}^{(r)} \rightarrow \mathbf{N}^*$ qui se présentent sont constantes et égales à 1.

Un squelette simple sans suture est dit *sain*; sinon il est dit *suturé.*

Proposition 7-1.

Un squelette sain est entièrement déterminé par sa restriction à l'hypercube canonique de côté 1, bâti sur X. Chacun de ses axes principaux $\mathbf{N}\alpha$ (**définition 6-5**) , de quelqu'ordre qu'il soit, est entièrement dans A ou entièrement dans B, selon que $\alpha \in$ A ou $\alpha \in$ B.

Un squelette suturé est entièrement déterminé par sa restriction à l'hypercube canonique de côté 2^s, bâti sur X, où s est le nombre des niveaux r (cf. la suite des dérivés) où se présentent effectivement des sutures (plus précisément, par sa restriction à un certain parallélotope contenu dans cet hypercube). Si α est suture de genre $\mathscr{a}$ (resp. $\mathscr{b}$) l'axe $2\alpha\mathbf{N}$ est entièrement dans B (resp A).

► Soit S = (A,B) un squelette sain, de base X ; il induit sur l'hypercube canonique HCX de côté 1, bâti sur X, une décomposition additive directe $S_0 = (A_0, B_0)$, car tout (hyper)-cube est une partie propre; c'est la restriction dont il est question dans l'énoncé.

Réciproquement, supposons $S_0 = (A_0, B_0)$ donnée ; montrons qu'il existe un seul squelette sain qui prolonge S_0 à $\mathbf{N}^X$ tout entier. Notons toujours $e_1, e_2, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{N}^X$ qu'on ne se prive pas d'identifier à X ; supposons que $Y = \{e_{i\,1}, e_{i\,2}, \ldots, e_{i\,k}\}$ soit un sous-ensemble non vide de X ayant les propriétés suivantes :

- $Y \subset B_0$ (resp. $Y \subset A_0$),
- $e_{i\,1} + e_{i\,2} + \ldots + e_{i\,k} = \alpha \in A_0$ (resp. : $\in B_0$) ,
- $|Y|$ est minimum pour ces propriétés.

Remarquons d'abord que l'on a : k > 1, sinon on aurait : $A_0 \cap B_0 = e_{il} \neq 0$.
Choisissons le cas « $Y \subset B_0$ et $\alpha \in A_0$ » pour fixer les idées.

Toute somme partielle $e_{i\,j1} + e_{i\,j2} + \ldots + e_{ijk}$, avec $j_k < k$, est élément de B_0 , de par la minimalité de Y. Si un squelette sain S existe, qui prolonge S_0 , alors il induit sur l'hypercube HCY de base Y une décomposition qui n'est autre que celle induite aussi par S_0 . Le squelette S_Y induit par S sur $\mathbf{N}^Y$ est un squelette sain (vérification aisée).

Mieux, c'est un sous-objet irréductible réduit simple (objet irréductible d'ordre 1) de S : compte tenu de la minimalité de Y, l'élément α est un générateur d'irréductibilité de base Y dans le squelette sain S_Y induit par S . La « droite » $\mathbf{N}.\alpha$ est entièrement contenue dans A_0 puisque le squelette S_Y est sain et la **proposition 5-3** s'applique : la décomposition S_Y *existe* (même si on ne sait pas encore que S existe !) et comporte un seul générateur d'irréductibilité :

- la décomposition d'un élément $\lambda = \lambda_1.e_{i\,1} + \lambda_2.e_{i\,2} + \ldots + \lambda_k.e_{ik}$ pour lequel *tous* les λ_j sont > 0 est la suivante :
  $\underline{a}(\lambda) = \mu..\,\alpha$ où $\mu = \inf(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$
  $\underline{b}(\lambda) = (\lambda_1 - \mu)..e_{i\,1} + (\lambda_2 - \mu).e_{i\,2} + \ldots + (\lambda_k - \mu).e_{ik}$;

- tous les autres éléments de $\mathbf{N}^Y$ sont dans B_0 .

On peut songer à poursuivre alors par récurrence portant sur l'entier $|X|$; malheureusement, à ce stade, c'est bien prématuré (voir ci-dessous les graphes squelettiques), en tout cas, la démonstration que nous proposons suit pas à pas la **construction** précédente.

Posons $X_1 = X \setminus Y$. La décomposition S_0 induit sur l'hypercube HCX_1 de base X_1 une décomposition directe S_1 , car cet hypercube est propre relativement à S_0 . On peut alors considérer, si c'est possible, un sous-ensemble Y_1 de X_1 qui soit un analogue de Y pour X !

En poursuivant, on obtiendra une partition de X en bases d'objets irréductibles simples, et éventuellement singletons restants, indépendante de l'ordre dans le quel on aura effectué les divers choix Y_1 , X_1 , Y_2 , X_2 ,.... Tous les cas de partitions sont possibles a priori et se présentent :

- il n'y a que des singletons dans X (le processus précédent ne démarre pas : il n'y a pas de partie telle que Y) ;

- il n'y a plus de singletons restants , après d choix de parties telles que Y_i dans $X_{i-1} = X_i \setminus Y_i$; noter que l'on a : $0 \leq d \leq n - 1$;

- il y a des singletons (dans B_0 ou dans A_0 , « ou » non exclusif) et des bases d'objets irréductibles simples (dans B_0 ou dans A_0 , « ou » non exclusif aussi) ;

- d peut prendre toute valeur comprise entre 0 et n-1, 0 et n-1 inclus !...

A ce stade, on aura reconnu, dans la partition en question, l'ensemble dérivé $X^{(1)}$ associé à S, si cette décomposition existe. Il est évident que l'hypercube $HCX^{(1)}$ de base $X^{(1)}$ est « contenu » dans l'hypercube HCX et grâce aux **propositions 5-10** et **5-11** c'est une partie propre de S et donc de S_0.

On peut reprendre et suivre la **construction récurrente** ci-dessus portant sur les dérivés de X (les fonctions «multiplicateurs » $\mu^{(r)}$, « types » $\mathbf{t}^{(r)}$ et « localisations » $\nu^{(r)}$ sont connues de part la définition des squelettes sains) ou si l'on veut, entreprendre ici la récurrence portant sur $|X|$ et, appliquant encore les **propositions 5-1, 5-2, 5-10** et **5-11,** conclure.

A la fin des étapes constituant l'ensemble $X^{(1)}$, on peut dire que toutes les décompositions intermédiaires S_{Yi} des ensembles $\mathbf{N}^{Yi}$, sont les décompositions induites de la supposée S, mais S n'en est pas la somme directe en général ! Les ensembles $\mathbf{N}^{Yi}$ sont les sous-objets irréductibles simples (ou d'ordre 1) de la décomposition S de $\mathbf{N}^X$, c'est tout. D'où la récurrence et l'usage des **propositions 5-1, 5-2, 5-10** et **5-11**.

Dans le cas « suturé », la démonstration procède de manière analogue. Voici les modifications à effectuer.

Soit S = (A,B) un squelette suturé, de base X ; il y a un premier entier $r > 0$ tel que $X^{(r)}$ présente au moins un point de suture qu'on suppose de genre α ($\alpha \in A$) pour fixer les idées ; la base de α est dans $B \cap X^{(r-1)}$ (par convention, $X^{(0)} = X$), et l'élément $2.\alpha$ est dans B. Sur l'axe principal $\mathbf{N}.\alpha$, 0 et α sont les seuls éléments de A ; l'ensemble $B \cap \mathbf{N}.\alpha$ est constitué de 0 et des multiples pairs de α.

Pour représenter ce fait, il convient de disposer de l'hypercube 2..HCX pour représenter les deux éléments α et $2.\alpha$ qui caractérisent α comme suture, et non pas comme simple générateur d'irréductiblité de squelette sain…

Cet hypercube 2.HCX prendra en compte non seulement α, mais aussi toutes les sutures qui apparaissent à ce stade r, où, pour la première fois se présentent des sutures quels que soient leurs genres.

A chaque passage d'un niveau où il y a des sutures, il convient de doubler la « longueur » du côté de l'hypercube sur lequel on examine la restriction de S. Si s est le nombre de ces niveaux « à suture », on désignera par $S_0 = (A_0, B_0)$ la décomposition induite par S sur l'hypercube 2^s.HCX.

Réciproquement, supposons $S_0 = (A_0, B_0)$ donnée ; montrons qu'il existe un seul squelette sain qui prolonge S_0 à $\mathbf{N}^X$ tout entier. Notons toujours $e_1, e_2, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{N}^X$ qu'on ne se prive pas d'identifier à X ; supposons que $Y = \{e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ik}\}$ soit un sous-ensemble non vide de X ayant les propriétés suivantes :

- $Y \subset B_0$ (resp. $Y \subset A_0$),
- $e_{i1} + e_{i2} + \ldots + e_{ik} = \alpha \in A_0$ (resp. : $\in B_0$),
- $|Y|$ est minimum pour ces propriétés.

Remarquons d'abord que l'on a : $k > 1$, sinon on aurait : $A_0 \cap B_0 = e_{il} \neq 0$.
Choisissons le cas « $Y \subset B_0$ et $\alpha \in A_0$ » pour fixer les idées.

Toute somme partielle $e_{ij1} + e_{ij2} + \ldots + e_{ijk}$, avec $j_k < k$, est élément de B_0, de par la minimalité de Y. Si un squelette sain S existe, qui prolonge S_0, alors il induit sur l'hypercube 2^s.HCY de base Y une décomposition qui n'est autre que celle induite aussi par S_0. Le squelette S_Y induit par S sur $\mathbf{N}^Y$ est un squelette sain (vérification aisée).

Mieux, c'est un sous-objet irréductible réduit simple (objet irréductible d'ordre 1) de S : compte tenu de la minimalité de Y, l'élément α est un générateur d'irréductibilité de base Y dans le squelette sain S_Y induit par S . La « droite » $\mathbf{N}.(2\alpha)$ est entièrement contenue dans B_0 puisque le squelette S_Y est sain et la **proposition 5-3** s'applique : la décomposition S_Y existe et comporte un seul générateur d'irréductibilité :

- la décomposition d'un élément $\lambda = \lambda_1.e_{i\,1} + \lambda_2.e_{i\,2} + \ldots + \lambda_k.e_{ik}$ pour lequel *tous* les λ_j sont > 0 est la suivante, avec $\mu = \inf(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = 2.\mu' + \varepsilon$ ($\varepsilon = 0$ ou 1 selon que μ est pair ou non):
  $\underline{a}(\lambda) = \varepsilon.\alpha$
  $\underline{b}(\lambda) = (\lambda_1 - \mu)..e_{i\,1} + (\lambda_2 - \mu).e_{i\,2} + \ldots + (\lambda_k - \mu).e_{ik} + 2.\mu'.\alpha$;

- tous les autres éléments de $\mathbf{N}^Y$ sont dans B_0 .

Posons $X_1 = X \setminus Y$. La décomposition S_0 induit sur l'hypercube $2^s.HCX_1$ de base X_1 une décomposition directe S_1 , car cet hypercube est propre relativement à S_0 . On peut alors considérer, si c'est possible, un sous-ensemble Y_1 de X_1 qui soit un analogue de Y pour X !

En poursuivant, on obtiendra une partition de X en bases d'objets irréductibles simples, et éventuellement singletons restants, indépendante de l'ordre dans le quel on aura effectué les divers choix Y_1 , X_1 , Y_2 , X_2 ,.... Voici les cas de partitions a priori possibles :

- il n'y a plus de singletons restants , après d choix de parties telles que Y_i dans $X_{i-1} = X_i \setminus Y_i$; noter que l'on a : $1 \leq d \leq n - 1$;

- il y a des singletons (dans B_0 ou dans A_0 , « ou » non exclusif) et des bases d'objets irréductibles simples (dans B_0 ou dans A_0 , « ou » non exclusif aussi) ;

- d peut prendre toute valeur comprise entre 1 et n-1, 1 et n-1 inclus !...

On aura reconnu, à ce stade, dans la partition en question l'ensemble dérivé $X^{(1)}$ associé à S, si cette décomposition existe. Il est évident que l'hypercube $HCX^{(1)}$ de base $X^{(1)}$ est « contenu » dans l'hypercube$2^s.HCX_1$ et grâce aux **propositions 5-10** et **5-11** c'est une partie propre de S et donc de S_0.

On peut reprendre et suivre la **construction récurrente** ci-dessus portant sur les dérivés de X , ou si l'on veut, entreprendre ici la récurrence portant sur $|X|$ et appliquant encore les **propositions 5-1, 5-2, 5-10** et **5-11,** conclure. ◄

Définition 7-2 (Graphes squelettiques simples).

A tout squelette simple de base X on fait correspondre *un graphe squelettique simple.*
Il a les propriétés suivantes :

- c'est un graphe *gradué*, les objets d'ordre 0 sont les éléments de X; soit S_{r-1} l'ensemble des objets d'ordre $< r$; l'ensemble Γ des générateurs d'irréductibilité éléments de $S_{r-1}^{(1)}$ est réunion disjointe de l'ensemble Σ des sutures et de l'ensemble Λ des autres générateurs ; l'ensemble S_r n'est autre que l'ensemble $S_{r-1} \cup \Lambda \cup 2.\Sigma$;

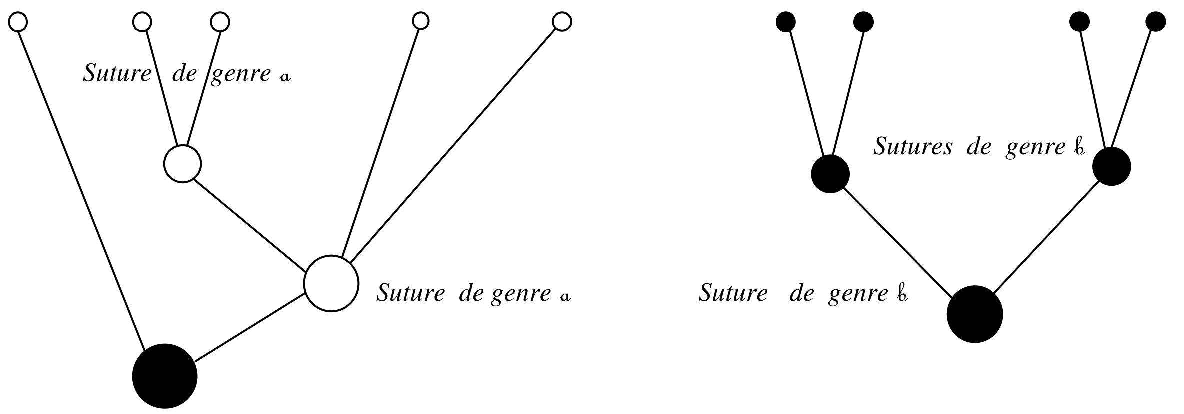
l'ensemble $\Lambda \cup 2.\Sigma$ est l'ensemble des objets d'ordre r; les objets sont de couleur noire (dans A) ou blanche (dans B);

- à tout élément irréductible α de base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \subset S_{r-1}$ correspond un cône (arêtes):

  + de sommet α et base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ de *couleurs opposées*, si α n'est pas une suture ;

  + de sommet 2α et base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$de *même couleur*, si α est une suture.

Exemples:



Ces deux graphes squelettiques présentent, chacun, deux niveaux de sutures. Ils représentent des squelettes suturés, caractérisés entièrement par leurs traces sur les les hypercubes respectifs $\mathbf{5}^4$ et $\mathbf{4}^4$, où $\mathbf{5} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\mathbf{4} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Remarque.

On gardera bien en tête que dans un squelette (sain ou non) *sommet et base d'un cône sont toujours de couleurs différentes* (cf. définition des générateurs d'irréductibilité).
Il n'en est pas de même dans les graphes squelettiques associés, pour peu qu'ils présentent des sutures, et le genre d'une suture est de couleur opposée à sa représentation graphique.

Proposition 7-2.

Un squelette simple est entièrement déterminé par son graphe squelettique.
Il est irréductible si et seulement si son graphe est connexe.
Il est toujours le produit direct de ses composantes irréductibles, elles-mêmes associées aux composantes connexes de son graphe squelettique.
Les objets d'ordre r d'un squelette sain sont les éléments de $X^{(r)} \setminus X^{(r-1)}$.

► Soit GS un graphe squelettique. L'ensemble X des objets d'ordre 0 est la base du squelette simple à construire. Chaque élément de X est soit dans A (noir) soit dans B (blanc) ; à ce stade, la fonction de typification $\mathbf{t} : \mathbf{P} \to \{n, a, n\}$ est donc déterminée, la valeur n étant exclue par définition même des squelettes simples. La fonction $\boldsymbol{\mu}$ est à valeur $\varnothing$.

L'ensemble dérivé $X^{(1)}$ est constitué :

- des objets d'ordre 0 (éléments de X) qui ne participent à aucune base de cônes, et ils gardent leur couleur,
- les sommets des cônes dont la base est de couleur différente, et ils gardent leur couleur ; leurs coordonnées non nulles sont égales à 1 ;
- enfin les sommets des cônes dont la base est de même couleur, mais alors ils changent de couleur (en tant qu'éléments de $X^{(1)}$!) leurs coordonnées non nulles sont aussi égales à 1.

Les fonctions $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ et $\mathbf{t}^{(1)}$ sont bien définies:

- $\boldsymbol{\mu}^{(1)}(\alpha) = (2)$ pour tout α correspondant à un sommet de cône (du graphe squelettique) dont la base est de même couleur, mais qui a changé de couleur lors de la constitution de $X^{(1)}$; de plus $\mathbf{t}^{(1)}(\alpha) = \mathscr{b}$ si $\alpha \in A$ et $\mathbf{t}^{(1)}(\alpha) = \mathscr{a}$ si $\alpha \in B$

- $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ est à valeur $\varnothing$ dans tous les autres cas ; de plus $\mathbf{t}^{(1)}(\alpha) = \mathscr{b}$ si $\alpha \in B$ et $\mathbf{t}^{(1)}(\alpha) = \mathscr{a}$ si $\alpha \in A$

La fonction symbolique de typification $\mathbf{t}^{(1)} : X^{(1)} \to \{\mathscr{n},\mathscr{a},\mathscr{b}\}$ ne peut pas prendre la valeur $\mathscr{n}$; à partir de là, on peut poursuivre la construction en utilisant pour graphe squelettique associé à $X^{(1)}$ le graphe squelettique de départ, dans lequel chaque sommet de cône de la première génération se « substitue » aux objets de sa base.

La construction s'arrêtera quand il n'y aura plus de cônes. Elle peut ne pas démarrer, si dès le départ il n'y a pas de cônes. De toutes façons elle s'arrêtera puis que $|X^{(s)}|$ va en décroissant. Si cet arrêt à lieu à la r-ième étape, c'est donc que $|X^{(r+1)}| = |X^{(r)}|$. C'est aussi le nombre de composantes connexes du graphe squelettique de départ.

Le reste de la proposition est évident. ◄

Exemple de squelette sain irréductible, en dimension 20.

On le décrit par la suite de ses dérivés : $X = X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, …, $X^{(5)}$.

Seules les *données nouvelles*, à chaque ordre r, sont mises en retrait :

$X = X^{(0)} = \{e_1, e_2, \dots, e_{20}\}$ base canonique de $\mathbf{N}^{20}$

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \in \mathscr{S}_\beta$ $e_6, e_7, e_8 \in \mathscr{S}_\alpha$

$\mathscr{c}_1 = \{e_9, e_{10}, e_{11}\}$ $\mathscr{c}_2 = \{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\} \in \mathscr{B}'_\beta$

$\mathscr{c}_3 = \{e_{16}, e_{17}\}$ $\mathscr{c}_4 = \{e_{18}, e_{19}, e_{20}\} \in \mathscr{B}'_\alpha$

$X^{(1)} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, \mathscr{c}_1, \mathscr{c}_2, \mathscr{c}_3, \mathscr{c}_4\}$

$e_1, e_2, e_3, \mathscr{c}_4 \in \mathscr{S}^{(1)}{}_\beta$ $e_7, e_8, \mathscr{c}_1 \in \mathscr{S}^{(1)}{}_\alpha$

$\mathscr{d}_1 = \{e_4, e_5, \mathscr{c}_3\} \in \mathscr{B}'^{(1)}{}_\beta$ $\mathscr{d}_2 = \{e_6, \mathscr{c}_2\} \in \mathscr{B}'^{(1)}{}_\alpha$

$X^{(2)} = \{e_1, e_2, e_3, \mathscr{c}_4, e_7, e_8, \mathscr{c}_1, \mathscr{d}_1, \mathscr{d}_2\}$

$e_1, e_2, c_4 \in \mathcal{S}^{(2)}{}_\beta$ $\qquad\qquad$ $e_7 \in \mathcal{S}^{(2)}{}_\alpha$

$\qquad f_1 = \{e_3, d_2\} \in \mathcal{B}'^{(2)}{}_\beta$ $\qquad\qquad$ $f_2 = \{e_8, c_1, d_1\} \in \mathcal{B}'^{(2)}{}_\alpha$

$X^{(3)} = \{e_1, e_2, c_4, e_7, f_1, f_2\}$

$e_7, f_1 \in \mathcal{S}^{(3)}{}_\alpha$

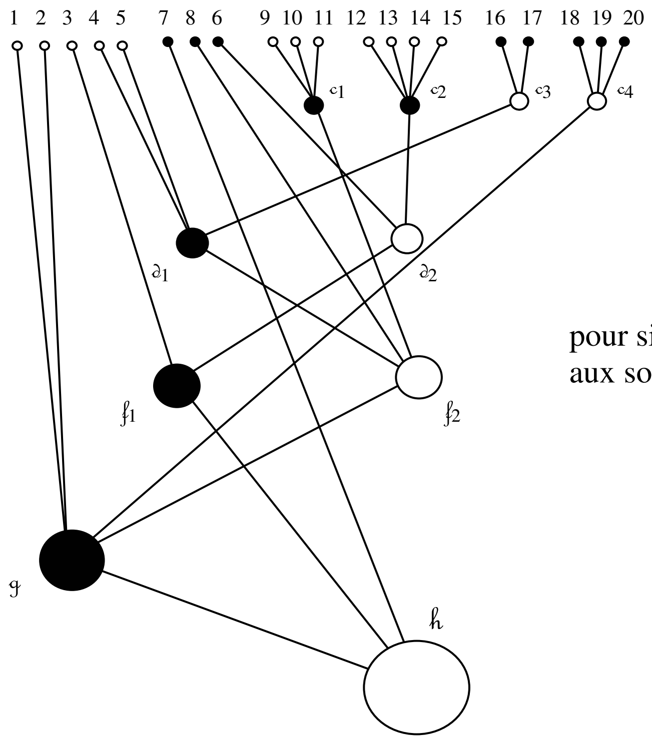
$\qquad g = \{e_1, e_2, c_4, f_2\} \in \mathcal{B}'^{(3)}{}_\beta$

$X^{(4)} = \{e_7, f_1, g\}$

$\qquad h = \{e_7, f_1, g\} \in \mathcal{B}'^{(4)}{}_\beta$

$X^{(5)} = \{ h \}$

En voici le dessin:

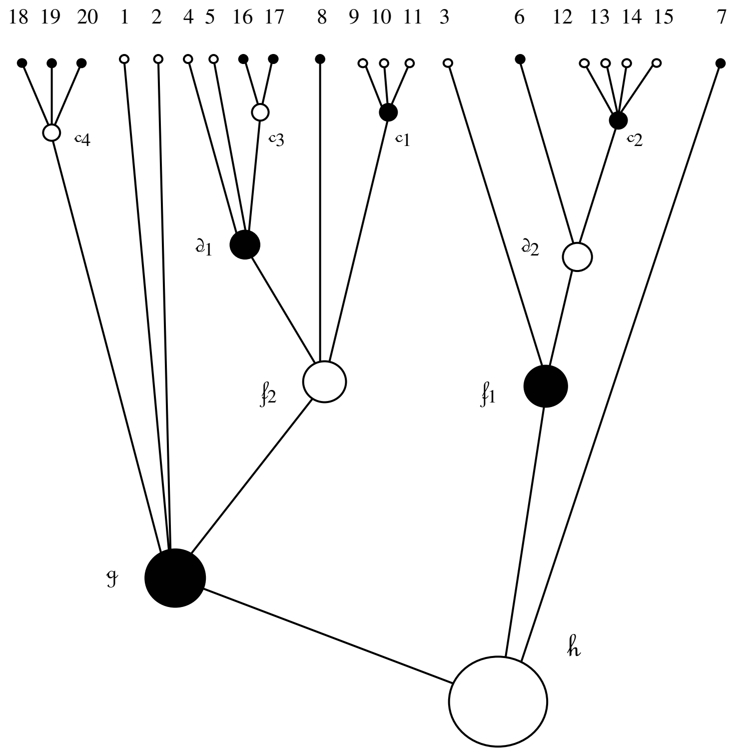


pour simplifier, on a donné
aux sommets le nom de leur base

Chacune des données correspond à un sommet de l'hypercube de dimension 20 ; il y en a 18 ; tous les autres sommets de cet hypercube sont entièrement déterminés : il y en a exactement 2^{20}-18 = 1048558 : c'est le sens de la **proposition 7-2**, qui découle elle-même des **propositions 4-1** et **5-11.**

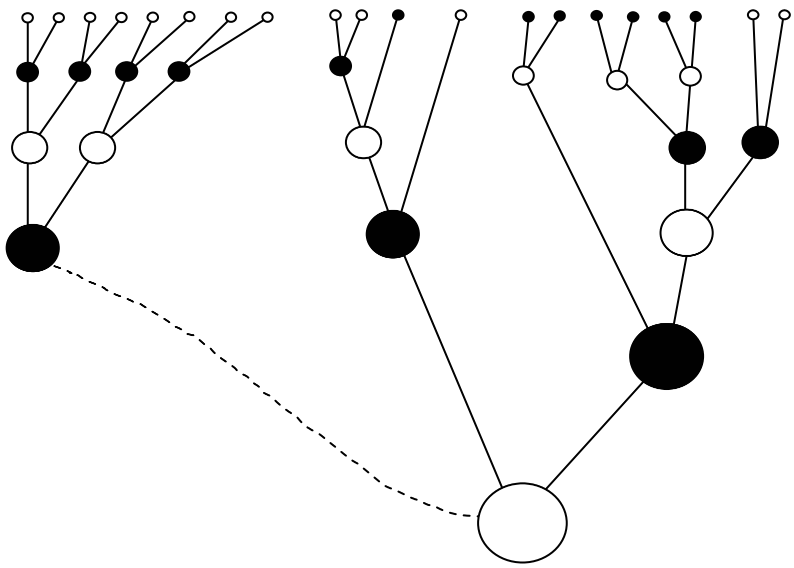
On peut toujours éviter les croisements d'arêtes dans une représentation planaire, et ce de plusieurs manières : il suffit de commencer par les éléments irréductibles d'ordre maximum. Bien sûr, le prix à payer, c'est qu'il ne sera pas possible de regrouper les éléments de A ou de B entre eux.

Voici un exemple d'une telle représentation planaire, sans croisements :



Autre exemple de squelette sain, en dimension 20.

Ici, le graphe squelettique a deux composantes connexes, ce qui correspond à une décomposition de cette structure squelettique de décomposition en produit de deux décompositions irréductibles des hypercubes de dimensions respectives 8 et 12. Ces trois squelettes sont sains.



Le lien en pointillés indique seulement qu'il s'agit du même graphe squelettique (et non de deux graphes squelettiques. Ce n'est pas une arête.

Définition 7-3 (Squelettes généraux).

Lorsque se présente, dans une décomposition directe additive d'un $\mathbf{N}^X$, une *base de sous-objet irréductible simple* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ avec *générateur d'irréductibilité* α, les squelettes simples rendent compte ***génériquement*** de ce qui se passe en α seulement si $\mathbf{t}(\alpha) = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b}$.
Les squelettes généraux prennent en compte le cas où $\mathbf{t}(\alpha) = \mathfrak{n}$, en fournissant comme « standard » l'écriture en base 2, i.e. $\boldsymbol{\mu}(\alpha) = (2, 2, \ldots, 2, \ldots)$. Certes, ces *squelettes généraux* sont *infinis*, mais les branches infinies sont des *terminaux*: en effet, si $\mathbf{t}(\alpha) = \mathfrak{n}$, aucun élément de $\mathbf{N}\alpha$ ne peut participer à une quelconque base de sous-objet irréductible d'ordre supérieur.

D'une manière générale un *terminal* (d'ordre r) est un objet (d'ordre r) qui ne participe plus à aucune base d'objet irréductible d'ordre $\geq$ r. Un objet peut être terminal relativement à X, mais pas relativement à Y, pour $Y \supset X$. Quand X est clairement fixé (par exemple, $X = \mathbf{P}$), on parle de terminal, sans repréciser X ! Les objets de type $\mathfrak{n}$ sont des terminaux absolus, mais ce ne sont pas forcément les seuls…

Insistons sur ceci ,: supposons α irréductible de base $E = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q) \subset B$ (resp. $\subset A$) et $\mathbf{t}(\alpha) = \mathfrak{n}$, le tout dans un squelette général ; alors $\alpha \in A$ (resp. $\alpha \in B$), ***nécessairement*** ; en effet, si on avait $\alpha \in B$ (resp. $\alpha \in A$), α ne serait pas le générateur d'irréductibilité, ce serait $2.\alpha$, et nous ne serions pas en présence d'un squelette (cf. remarque suivant la **définition 7-2**)

Définition 7-4 (Graphes squelettiques généraux).

A tout squelette de base X on fait correspondre un graphe *fini* qui le représente et le détermine complètement .
Ce graphe est construit comme dans le cas d'un squelette simple, sauf que peut se présenter aussi le cas où un élément irréductible α de base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \subset S_{r-1}$ est tel que $\mathbf{t}(\alpha) = \mathfrak{n}$; dans ce cas la couleur de α est opposée à celle de sa base, comme toujours, mais l'objet en question est affecté de l'indice ∞ rappelant ainsi qu'il ne participe plus à une quelconque base d'objet irréductible d'ordre supérieur.
Si aucun objet n'est affecté de l'indice ∞, c'est que le squelette en question est simple.

Proposition 7-3 (complète les propositions 7-1 et 7-2).

Un squelette général est entièrement déterminé par son graphe squelettique général.
Il est irréductible si et seulement si son graphe est connexe.
Il est toujours le produit direct de ses composantes irréductibles, elles-mêmes associées aux composantes connexes de son graphe squelettique.
Si un objet α d'ordre r est affecté de l'indice ∞, sa composante connexe (ensemble des *prédécesseurs* de α) détermine un squelette général irréductible ayant $\mathbf{N}\alpha$ comme seul axe terminal et il en est un facteur direct (son supplément étant de type L, cf. exemples en (0), première partie).

► La démonstration procède de la même manière ; simplement, quand se présente un objet α du graphe avec indice ∞ , la décomposition induite sur $\mathbf{N}.\alpha$, de type $\mathfrak{n}$, est entièrement déterminée par sa suite infinie de multiplicateurs, tous égaux à 2.

Par exemple, si $\alpha \in$ A, on voit que :

$$A = \{ 0, \alpha, 4.\alpha, 5.\alpha, 16.\alpha, 17.\alpha, 20.\alpha, 21.\alpha, 64.\alpha, 65.\alpha, 68.\alpha, 69.\alpha, \dots\}$$
$$B = \{ 0, 2.\alpha, 8.\alpha, 10.\alpha, 32.\alpha, 34.\alpha, 40.\alpha, 42.\alpha, \dots\}$$

D'autre part, cet axe principal est simplifiable (cf. le **théorème 1**-1 de la première partie) et on peut poursuivre la **construction**, après simplification par ce facteur direct de décomposition ◄

Les notions de squelettes et de graphes squelettiques s'étendent évidemment au cas où X est infini (par exemple : X = $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(2)}$,…) et ces structures sont elles-mêmes descriptibles en termes de foncteurs à valeurs squelettiques finies.

Proposition 7-4.

A toute décomposition directe additive (A,B) de $\mathbf{N}^X$, X fini ou non, est associé un graphe squelettique général et donc un squelette général *naturel* (A^s, B^s) (cf. ***propositions*** **7-2** et **7-3**).

► La construction du graphe squelettique associé est assez simple : on dispose de 4 sortes d'objets dans X :

$$\bullet \qquad \circ \qquad \bullet_\infty \qquad \circ_\infty$$

selon que l'objet α en question est dans A ou B et $\mathbf{t}(\alpha) \neq n$ ou $\mathbf{t}(\alpha) = n$. On construit alors l'ensemble $X^{s(1)}$ des objets d'ordre 1 du graphe squelettique à partir de $X^{(1)}$ en « sautant les bases d'objets irréductibles » (on a déjà expliqué ce procédé dans le cas des graphes squelettiques simples - définition **7-2**) : les objets du genre $\bullet_\infty$ ou $\circ_\infty$ sont inertes, tout

comme les objets de genre $\bullet$ ou $\circ$, qui ne participent à aucune base d'objets irréductibles (d'ordre 0) ; par contre toute base d'un générateur irréductible α s'efface au profit

- soit du générateur α lui-même s'il n'y a pas de suture, et il est de couleur opposée à la base et affecté éventuellement de l'indice ∞ (si $\mathbf{t}(\alpha) = n$),
- soit du plus petit multiple possible n.α qui soit de même couleur que la base, « après » les points de suture.

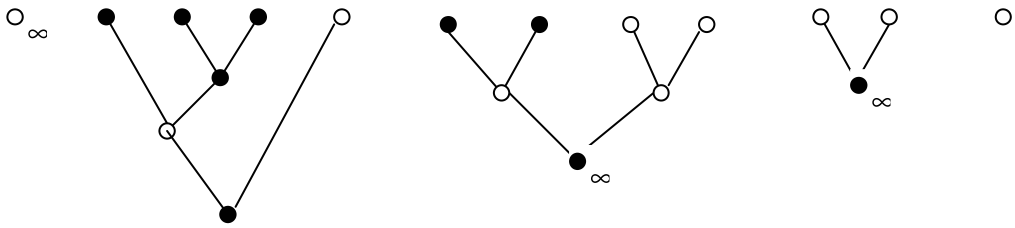
L'ensemble $X^{s(1)}$ jouant alors le rôle de X, on pose $X^{s(2)} = (X^{s(1)})^{s(1)}$. En poursuivant, on obtient tous les dérivés *sains* $X^{s(r)}$ de X et en définitive le graphe squelettique général associé à la décomposition (A,B) donnée. Il suffit alors de reprendre les étapes de la description constructive d'une décomposition multiplicative de N^*, comme décrite à la section (6) (en termes additifs via le foncteur $\mathcal{L}og$) pour construire le squelette (A^s, B^s).

Observons qu'une composante connexe du graphe squelettique ne peut présenter un terminal qu'en son sommet ultime s'il est de type n ◄

Voici un exemple de graphe squelettique général :

Il s'agit d'une décomposition de $\mathbf{N}^{12}$ en produit de 5 décompositions :
- deux de $\mathbf{N}$, une de $\mathbf{N}^2$, deux de $\mathbf{N}^4$;

- 7 objets irréductibles : 4 d'ordre 1, 2 d'ordre 2 , et 1 d'ordre 3 ;
- 3 terminaux de niveaux différents (0, 1 et 2) ;
- 2 sutures d'ordre 1 ;
- caractérisée par sa trace sur l'hypercube $\mathbf{4}^{12}$ (5^{12} sommets !)

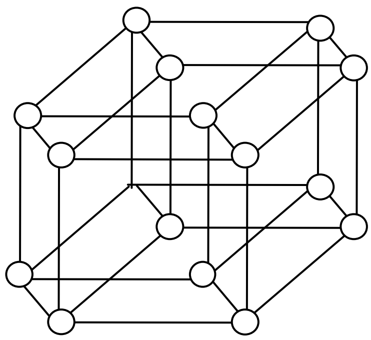


Voici pour finir les graphes associés aux squelettes *sains* de dimension 4.
Ils ont 1, 2, 3 ou 4 composantes. Le nombre de composantes indique le « degré » de décomposition (en produit : en 1, 2, 3 ou 4 facteurs).

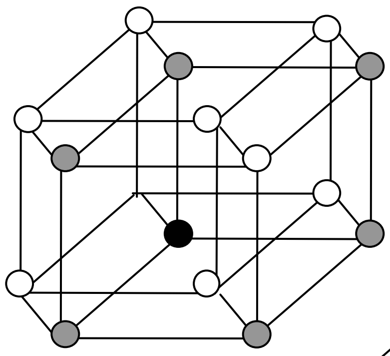
La théorie des groupes intervient ici, pour tenir compte des « répliques » : on en a fait figurer seulement 2 ici, pour « visualiser » l'effet de l'échange entre A et B.

Enfin, on pourra constater de visu l'intérêt qu'il y a à se référer aux graphes squelettiques, plutôt qu'aux squelettes ou à leur traces sur les hypercubes convenables.

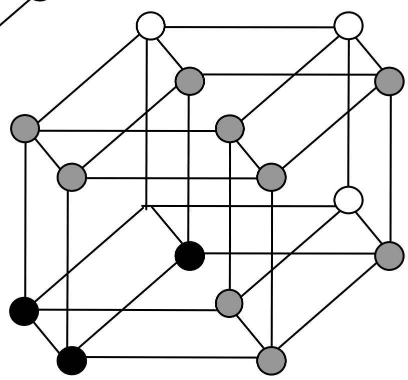
Triviaux
(produits de 4 décompositions triviales de **N**)



$\mathbf{N}_B{}^4$ ○ ○ ○ ○

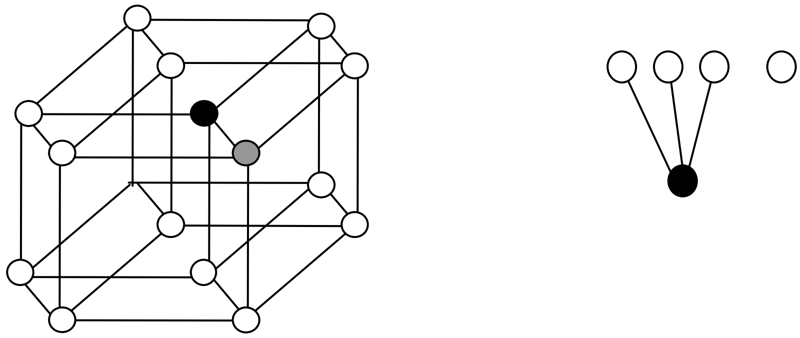


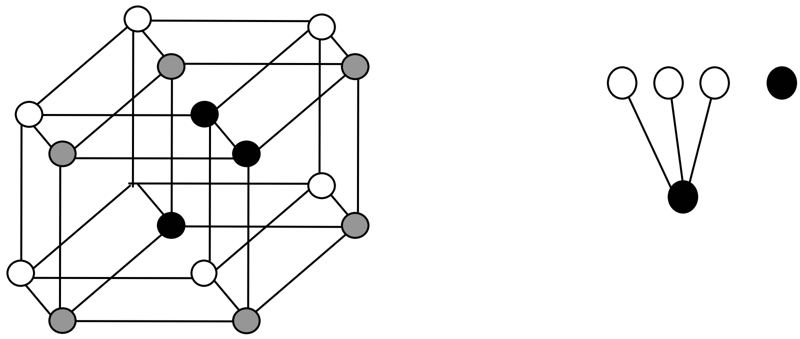
$\mathbf{N}_B{}^3 \times \mathbf{N}_A$ ○ ○ ○ ●

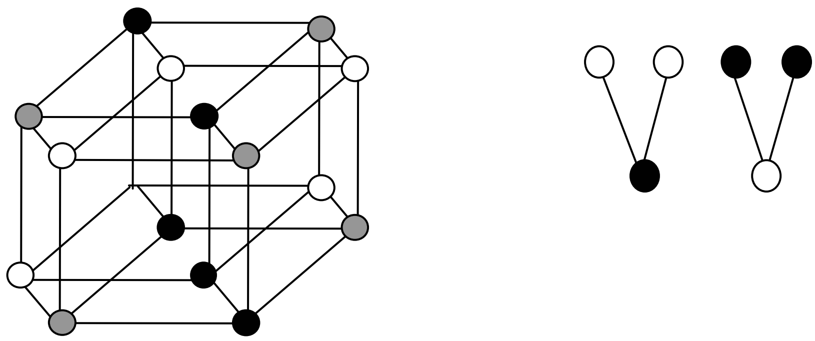


$\mathbf{N}_B{}^2 \times \mathbf{N}_A{}^2$ ○ ○ ● ●

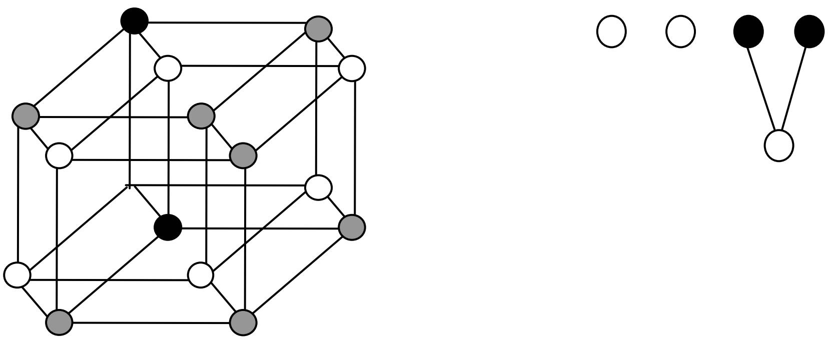
Semi-triviaux (produits de deux décompositions irréductibles)



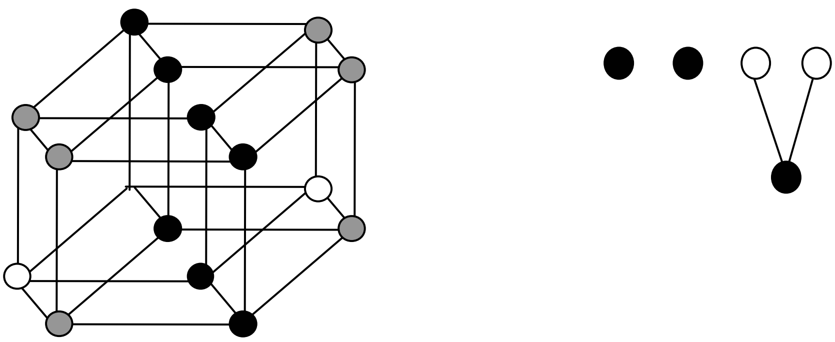


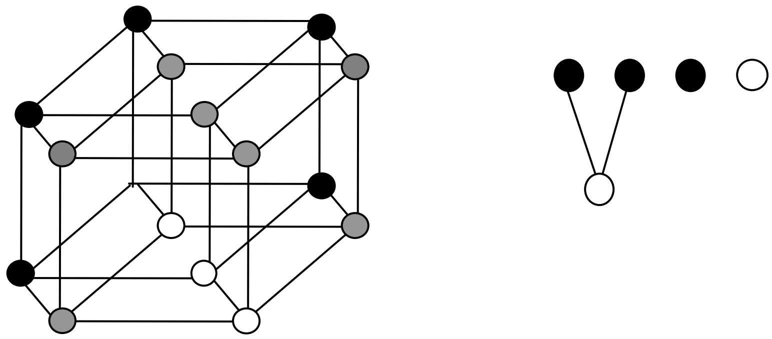


Semi-triviaux (produits de trois décompositions irréductibles

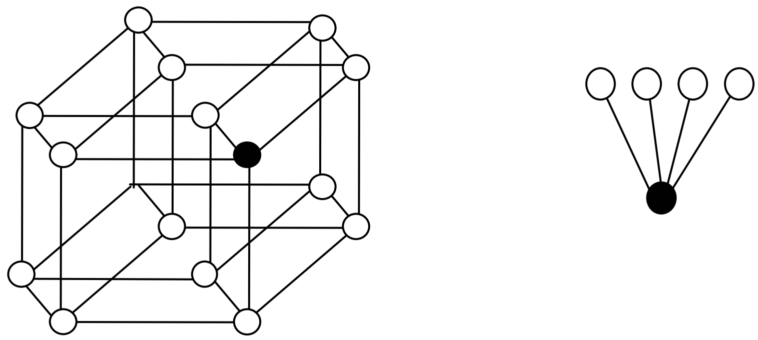


Réplique

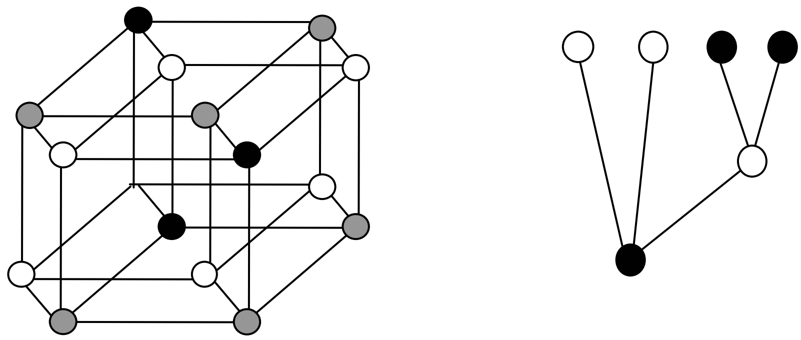




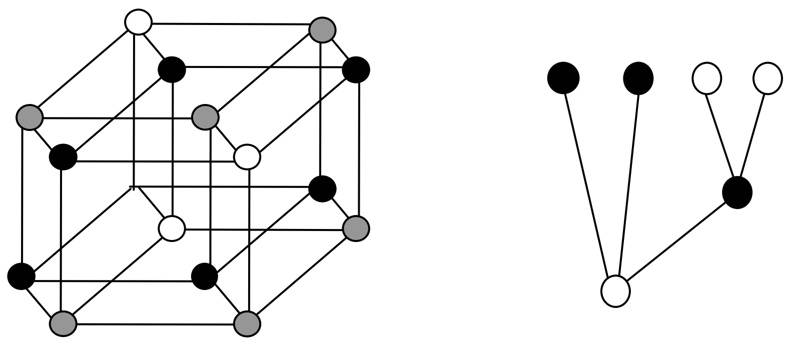
Irréductibles
(d’ordre 1)

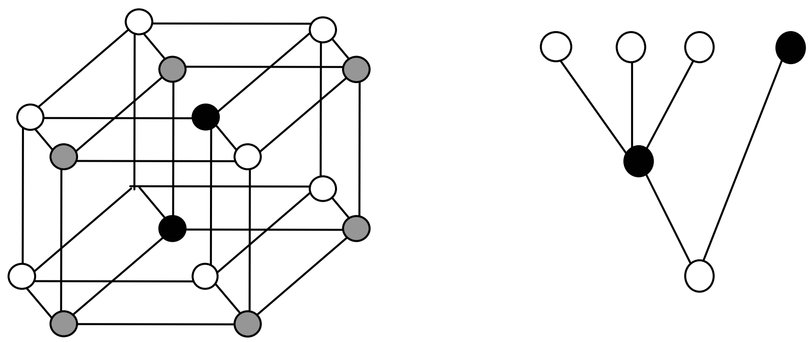


Irréductibles
(d’ordre 2)

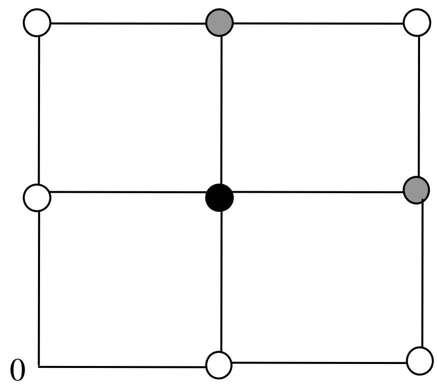


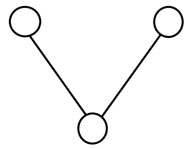
Réplique





Pour les squelettes suturés, citons le plus simple d'entre eux :





On a écarté la dimension 1 exprès, puisqu'elle entraînerait une complication inutile pour l'ensemble des graphes squelettiques : le graphe ○ présenterait une ambiguïté :

- il pourrait caractériser la décomposition triviale où **N** = B et A = {0} ;

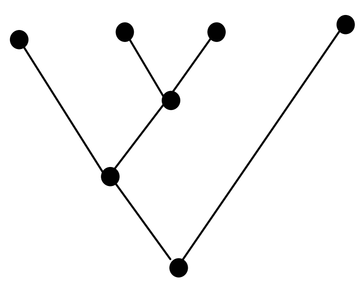
- il pourrait aussi repésenter la décomposition « suturée » à une dimension, dans laquelle B = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, …} et A = {0, 1} ;

- en fait, nous ne considérons pas cette dernière comme une suture, non seulement parce que toute ambiguïté est ainsi levée, mais aussi parce qu'une suture (qui compte un nombre fini de points) a pour fonction de « recoudre plusieurs morceaux », au moins deux ;

- les deux décompositions précédentes, ainsi que toute celles de **N** pour lesquelles A est fini, ont le même type (c'est ℓ), même squelette : ○ et même graphe squelettique, à savoir encore ○ ;

- dans le même ordre d'idées, il faut comprendre la **proposition 7-4**, comme généralisant la fonction de *typification* à toutes les décompositions: elle est à valeurs dans l'ensemble des squelettes, mais mieux encore, dans l'ensemble des graphes squelettiques.

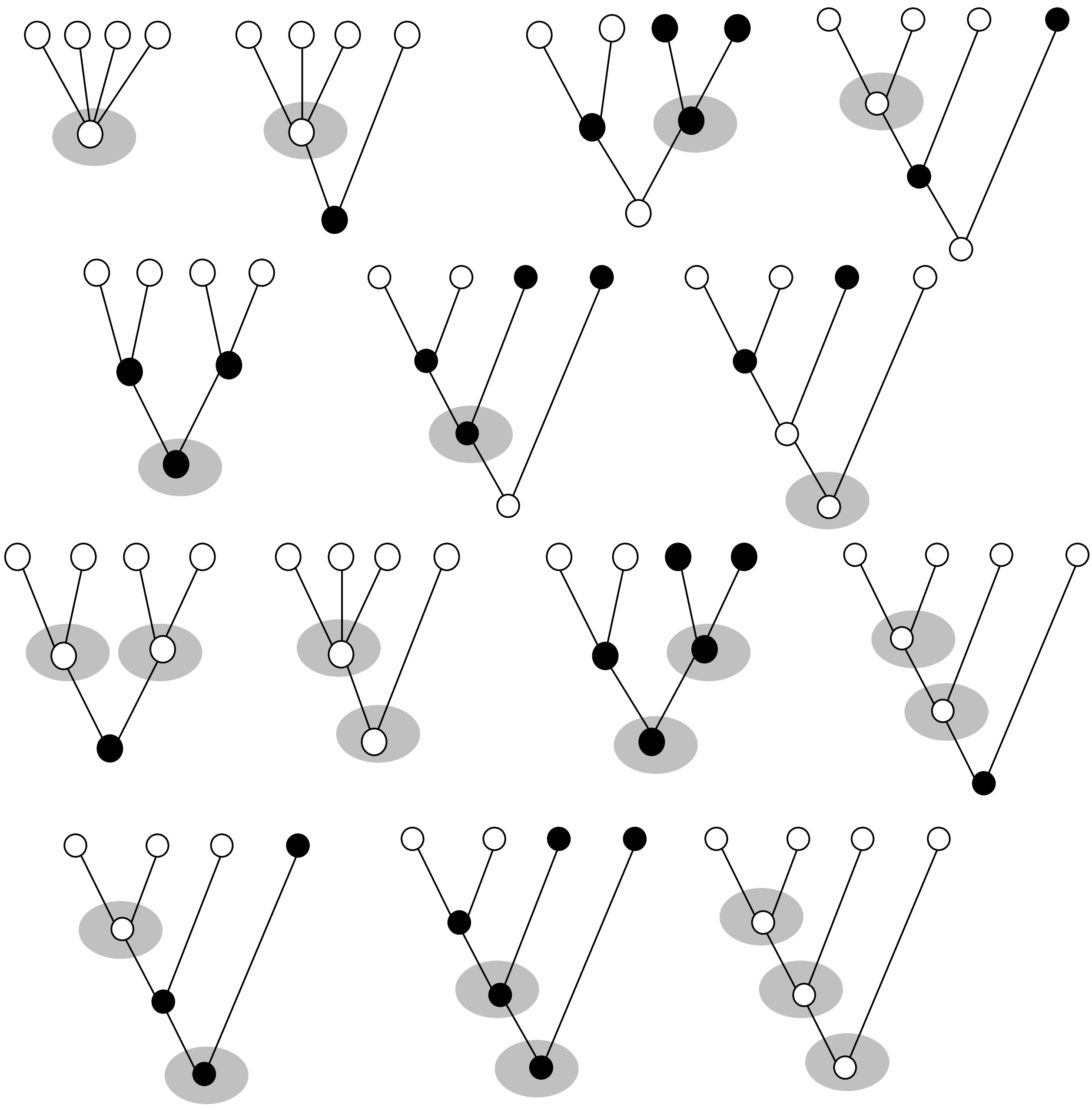
- cette dernière remarque, parce qu'un graphe squelettique est très « économe » par rapport à la trace qu'il laisse sur l'hypercube convenable , surtout dans le cas suturé; par exemple, il faudrait l'hypercube $\mathbf{8}^4$, qui a 9^4 = 6561 sommets pour rendre compte du simple graphe triplement suturé suivant (composante de l'exemple ci-dessus) :



Il est clair que pour classifier, dénombrer, les squelettes, on peut supposer connexes leurs graphes squelettiques : ils se terminent alors toujours par un dernier sommet d'un des types suivants : ○ ● $○_\infty$ $●_\infty$

S'il s'agit d'un sous-graphe squelettique GS' d'un graphe squelettique GS plus « vaste », le sommet en question, qui ne peut être que d'un des types ○ ●, se substitue à tout le sous-graphe GS' dans la construction associée du squelette S. On comprend mieux pourquoi les autres objets sont qualifiés de *terminaux*. Cette remarque est à la base de tous les décomptes possibles des squelettes sains, suturés, ou généraux, puisqu'elle installe immédiatement une récurrence. Ces dénombrements divers donnent lieu à de très belles formules, qui encombreraient évidemment, et inutilement, ce chapitre.

Donnons encore pour clore la dimension 4, la liste des squelettes suturés connexes, en les rangeant dans l'ordre lié au nombre de sutures qu'ils présentent (sur fond gris par simple souci de bonne lecture), et en évitant les répliques (échanges noir-blanc) :



8. Facteurs eulériens (ou le retour aux nombres).

A chaque exemplaire de **N** figurant dans les décompositions sous forme d'axe principal (donc aussi les axes de coordonnées des diverses puissances $\mathbf{N}^X$) on fait correspondre une variable x (qui peut être formelle) et les entiers de l'axe attaché à x représentent alors les puissances de x :

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

Nous y associons aussi la série $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ qu'on ne se prive pas d'écrire sous forme d'un facteur eulérien simple : $\frac{1}{1-x}$; l'exemple « type » est celui où l'exemplaire de **N** est indexé par un nombre premier p et x n'est autre que le nombre complexe $\frac{1}{p^z}$.

Plus généralement, si $X = \{x, y, z, \ldots\}$, on associe à tout point $(i, j, k, \ldots)$ de $\mathbf{N}^X$ le monôme $x^i.y^j.z^k\ldots$ terme général de la série produit :

$$S(x, y, z,\ldots) = (1 + x + x^2 + \ldots).(1 + y + y^2 +\ldots).(1 + z + z^2 + \ldots)\ldots$$

qui se présente encore sous forme de produit de facteurs eulériens simples :

$$P(x, y, z,\ldots) = \frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-y}.\frac{1}{1-z}\ldots$$

A toute décomposition directe (A,B) de $\mathbf{N}^X$ est associée une décomposition de $S(x, y, z,\ldots)$ en produit de deux séries (formelles) :

$$S(x, y, z,\ldots) = S_A(x, y, z,\ldots) . S_B(x, y, z,\ldots)$$

ou aussi une décomposition de $P(x, y, z,\ldots)$ en expressions « eulériennes » :

$$P(x, y, z,\ldots) = P_A(x, y, z,\ldots) . P_B(x, y, z,\ldots).$$

Délibérément, on laisse de côté les questions de convergence des séries et des produits infinis. C'est dire qu'une large part de ce nous exposons maintenant est valable pour un ensemble X même infini .

Factorisations associées aux décompositions additives directes de N.

Soit (A,B) une telle décomposition. On suppose, pour fixer les idées que $1 \in A$.

D'après la **proposition 2-1** (1ère partie) il existe une unique suite dite des *multiplicateurs*, suite (finie ou non) d'entiers strictement supérieurs à 1, soit $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$, à laquelle est associée une autre suite dite *base généralisée de* **N** :

$$b_0 = 1 \ , \ b_1 = m_1.b_0 \ , \ b_2 = m_2.b_1 \ , \ b_k = m_k.b_{k-1} = m_k.m_{k-1}\ldots m_1 \ , \ldots$$

de sorte que tout nombre N se décompose en:

$$\underline{a}(N) = \sum_{i=0} N_{2i} b_{2i} \quad \text{et} \quad \underline{b}(N) = \sum_{i=0} N_{2i+1} b_{2i+1} \quad (\forall i \quad N_i < m_{i+1})$$

S'il y a un dernier multiplicateur m_k, on convient que $m_{k+1} = \infty$, de sorte qu'il n'y a simplement pas de condition de bornage sur N_k dans le terme .

Alors, le facteur eulérien $P(x) = \frac{1}{1-x}$ et son développement en série $S(x) = 1+x+x^2+\ldots$se décomposent ainsi :

$$P_A(x) = \frac{1-x^{m_1}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{m_1 m_2 m_3}}{1-x^{m_1 m_2}} \cdot \frac{1-x^{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5}}{1-x^{m_1 m_2 m_3 m_4}} \ldots = \frac{1-x^{b_1}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{b_3}}{1-x^{b_2}} \cdot \frac{1-x^{b_5}}{1-x^{b_4}} \ldots$$

$$P_B(x) = \frac{1-x^{m_1 m_2}}{1-x^{m_1}} \cdot \frac{1-x^{m_1 m_2 m_3 m_4}}{1-x^{m_1 m_2 m_3}} \cdot \frac{1-x^{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6}}{1-x^{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5}} \ldots = \frac{1-x^{b_2}}{1-x^{b_1}} \cdot \frac{1-x^{b_4}}{1-x^{b_3}} \cdot \frac{1-x^{b_6}}{1-x^{b_5}} \ldots$$

par convention (quand le multiplicateur ∞ se présente) $x^{\infty} = 0$ (référence est ainsi faite au cas de convergense absolue lorsque, pour une norme $\|\ \|$ convenable, on a : $\|x\| < 1$).
Pour $S_A(x)$ et $S_B(x)$, il convient de développer les divers facteurs $\frac{1}{1-x^q}$, mais on a intérêt à laisser les séries sous forme de produits (éventuellement infinis) de séries.

Exemples.

- La division par 2 : $A = \{0, 1\}$ et $B = \{0, 2, 4, \ldots\}$ fournit les facteurs suivants :

$$P_A(x) = \frac{1-x^2}{1-x}, \quad S_A(x) = 1+x \ ; \quad P_B(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad S_B(x) = 1+x^2+x^4+\ldots \ ;$$

- La décomposition dite (abusivement) suturée, où $A = \{0, 1, 4, 5, 8, 9,\ldots\}$ et $B = \{0, 2\}$ fournit les facteurs suivants :

$$P_A(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{(1-x)(1+x^2)} \quad \text{et} \quad S_A(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1-x^2+x^4-x^6+\ldots) \ ;$$

$$P_B(x) = \frac{1-x^4}{1-x^2}, \quad S_B(x) = 1+x^2 \ ;$$

- La décomposition squelettique de type n , où $A = \{0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21,\ldots\}$ et $B = \{0, 2, 8, 10, 32, 34, 42,\ldots\}$ fournit les facteurs suivants (produits infinis) :

$$P_A(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdot \frac{1-x^{32}}{1-x^{16}} \ldots, \quad S_A(x) = (1+x)(1+x^4)(1+x^{16})\ldots(1+x^{4^k})\ldots$$

$$P_B(x) = \frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdot\frac{1-x^{64}}{1-x^{32}}\ldots,\quad S_B(x) = (1+x^2)(1+x^8)(1+x^{32})\ldots(1+x^{2.4^k})\ldots$$

Factorisations associées aux décompositions additives directes de $\mathbf{N}^2$.

Si la décomposition en cause est triviale (produit, ou somme si l'on veut) alors les deux facteurs de $\mathbf{N}^2$ ne font qu'introduire 2 variables, x et y et on voit immédiatement que :

$$P(x,y) = P(x).P(y) \;;\; P_A(x,y) = P_A(x).P_A(y) \;;\; S(x,y) = S(x).S(y) \;;\; S_B(x,y) = S_B(x).S_B(y)$$

Si la décomposition n'est pas triviale, on peut supposer , pour fixer les idées, que les suites de multiplicateurs sur les axes sont finies , et plus précisément :

$m_1, m_2, m_3,\ldots, m_{2k+1}$, pour l'axe des x, $b_0 = 1 \in A_x$ et $b_i = m_i.b_{i-1}$
$n_1, n_2, n_3,\ldots, n_{2\ell+1}$, pour l'axe des y, $c_0 = 1 \in A_y$ et $c_j = m_j.c_{j-1}$

$$P_A(x) = \frac{1-x^{b_1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{b_3}}{1-x^{b_2}}\cdot\frac{1-x^{b_5}}{1-x^{b_4}}\ldots\frac{1-x^{b_{2k+1}}}{1-x^{b_{2k}}}$$

$$P_B(x) = \frac{1-x^{b_2}}{1-x^{b_1}}\cdot\frac{1-x^{b_4}}{1-x^{b_3}}\cdot\frac{1-x^{b_6}}{1-x^{b_5}}\ldots\frac{1-x^{b_{2k}}}{1-x^{b_{2k-1}}}\cdot\frac{1}{1-x^{b_{2k+1}}}$$

$$P_A(y) = \frac{1-y^{c_1}}{1-y}\cdot\frac{1-y^{c_3}}{1-y^{c_2}}\cdot\frac{1-y^{c_5}}{1-y^{c_4}}\ldots\frac{1-y^{c_{2l+1}}}{1-y^{c_{2l}}}$$

$$P_B(y) = \frac{1-y^{c_2}}{1-y^{c_1}}\cdot\frac{1-y^{c_4}}{1-y^{c_3}}\cdot\frac{1-y^{c_6}}{1-y^{c_5}}\ldots\frac{1-y^{c_{2k}}}{1-y^{c_{2l-1}}}\cdot\frac{1}{1-y^{c_{2l+1}}}$$

et si (s,t) est le couple de paramètres entiers qui localisent le générateur d'irréductibilité α, on trouve que :

$P_A(x,y) = P_A(x).\, P_A(y).\, P_A(z)$ où $z = x^{s.b_{2k+1}}.y^{t.c_{2l+1}}$ et

$P_A(z) = \dfrac{1-z^{d_1}}{1-z}\cdot\dfrac{1-z^{d_3}}{1-z^{d_2}}\cdot\dfrac{1-z^{d_5}}{1-z^{d_4}}\ldots\dfrac{1-z^{d_{2r+1}}}{1-z^{d_{2r}}}\ldots,$ sans préjuger de la finitude de la suite des d_i

$$P_B(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)P_A(x)P_A(y)P_A(x^{s.b_{2k°1}}y^{t.c_{2l+1}})}$$

$$= \frac{1-x^{b_2}}{1-x^{b_1}}\cdot\cdot\frac{1-x^{b_{2k}}}{1-x^{b_{2k-1}}}\cdot\frac{1}{1-x^{b_{2k+1}}}\cdot\frac{1-y^{c_2}}{1-y^{c_1}}\cdot\cdot\frac{1-y^{c_{2l+1}}}{1-y^{c_{2l}}}\cdot\frac{1}{1-y^{c_{2l+1}}}\cdot\frac{1-z}{1-z^{d_1}}\cdot\frac{1-z^{d_2}}{1-z^{d_3}}\cdot\cdot\frac{1-z^{d_{2r+1}}}{1-z^{d_{2r}}}\ldots$$

Diverses présentations de ces développements peuvent être proposées, mais l'idée directrice est de fournir pour les développements en séries, des sommes d'éléments « simples ».

Evidemment, il est hors de question d'écrire une formule générale de factorisation, qui ne servirait pas à grand-chose. Cependant, nous allons passer en revue quelques-unes des factorisations associées aux graphes squelettiques types.

D'abord, le **squelette sain type d'ordre** 1, de base (finie) $X = \{x, y, z, \ldots\}$, $|X| = n > 1$, supposée dans B. Les éléments de A sont tous les multiples de $\alpha = (1, 1, 1, \ldots)$. On voit que :

$$P_A(x, y, z,\ldots) = \frac{1}{1 - x.y.z...}$$

$$P_B(x, y, z,\ldots) = \frac{1 - x.y.z...}{(1-x)(1-y)(1-z)...}$$

$$= (-1)^{n+1} \left\{ 1 - \sum_{x\in X} \frac{1}{1-x} + \sum_{x,y\in X, x\neq y} \frac{1}{(1-x)(1-y)} - \sum_{x,y,z\in X, x\neq y\neq z\neq z} \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)} + \ldots \right\}$$

en arrêtant les sommes aux produits de n-1 éléments simples de type $\frac{1}{1-x}$;

$$S_A(x, y, z,\ldots) = 1 + (x.y.z\ldots) + (x.y.z\ldots)^2 + \ldots + (x.y.z\ldots)^k + \ldots$$

$$S_B(x, y, z,\ldots) = \sum_{i,j,k,\ldots} x^i y^j z^k \ldots. ,$$

où, dans chaque monôme, l'un au moins des exposants i, j, k…est nul…

Ensuite, le **squelette suturé type d'ordre** 1, de base (finie) $X = \{x, y, z, \ldots\}$, $|X| = n > 1$, supposée dans B. Le seul point de suture, élément de A, est $\alpha = (1, 1, 1, \ldots.)$, les autres éléments de l'axe $\mathbf{N}.\alpha$ qui sont dans B sont de la forme 2α. On voit que :

$$P_A(x, y, z,\ldots) = 1 + x.y.z\ldots = S_A(x, y, z, \ldots)$$

$$P_B(x, y, z,\ldots) = \frac{1}{(1-x).(1-y).(1-z)...} \cdot \frac{1}{(1+x.y.z...)}$$

La décomposition en « éléments simples » de $P_B(x, y, z,\ldots)$ n'est pas « simple » à écrire . Par contre on peut donner de $S_B(x, y, z,\ldots)$ une description assez simple qui ne passe pas par la décomposition en éléments simples en question :

$$S_B(x, y, z,\ldots) = \sum_{n\,;\,i,\,j,\,k\ldots} (x.y.z...)^{2n} x^i.y^j.z^k...$$

où , dans chaque monôme, l'un au moins des exposants i, j, k, …est nul.

Enfin, le **squelette terminal type d'ordre** 1, de base (finie) $X = \{x, y, z, \ldots\}$, $|X| = n > 1$, supposée dans B. L'élément $\alpha = (1, 1, 1, \ldots.)$ est dans A, mais c'est un terminal , donc la décomposition de l'axe $\mathbf{N}.\alpha$ est le standard de type $_n$:

$$A = \{\ 0, \alpha, 4.\alpha, 5.\alpha, 16.\alpha, 17.\alpha, 20.\alpha, 21.\alpha, 64.\alpha, 65.\alpha, 68.\alpha, 69.\alpha, \ldots\}$$
$$B = \{\ 0, 2.\alpha, 8.\alpha, 10.\alpha, 32.\alpha, 34.\alpha, 40.\alpha, 42.\alpha, \ldots\}$$

$$P_A(x, y, z,\ldots) = \frac{1 - (x.y.z...)^2}{1 - x.y.z...} . \frac{1 - (x.y.z...)^8}{1 - (x.y.z...)^4} . \frac{1 - (x.y.z...)^{32}}{1 - (x.y.z...)^{16}} \ldots,$$

$$S_A(x, y, z,\ldots) = (1 + (x.y.z..)\ ).(1 + (x.y.z..)^4\ ).(1 + (x.y.z..)^{16}\ )..(\ 1 + (x.y.z..)^{4^k}\ )\ldots$$

$$P_B(x, y, z,..) = \frac{1}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)...} . \frac{1 - x.y.z...}{1 - (x.y.z...)^2} . \frac{1 - (x.y.z...)^4}{1 - (x.y.z...)^8} . \frac{1 - (x.y.z...)^{16}}{1 - (x.y.z...)^{32}} \ldots,$$
$$= \frac{1}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)...} . \frac{1}{1 + x.y.z...} . \frac{1}{1 + (x.y.z...)^4} . \frac{1}{1 + (x.y.z...)^{16}} \ldots,$$

$$S_B\ (x, y, z,\ldots) =$$
$$\left(\sum_{i,\, j,\, k...} x^i.y^j.z^k...\right) . (1 + (x.y.z..)^2\ ).(1 + (x.y.z..)^8\ ).(1 + (x.y.z..)^{32}\ )...(\ 1 + (x.y.z..)^{2.4^k}\ )\ldots$$

où chaque monôme $x^i.y^j.z^k..$ de la première somme a au moins un exposant i, j, k…nul.

On retiendra essentiellement les choses suivantes :

- l'agrandissement de la base X correspond à une introduction de nouvelles variables ;

- chaque objet de $X^{(1)} \setminus X$ correspond à un certain monôme $x^a.y^b\ldots.w^f$ en les variables de sa base x, y, …w, le uple (a, b, …f) étant celui des coordonnées entières de l'objet en question ;

- la progression dans les ordres des dérivés correspond à des opérations de substitution : en reprenant les notations de l'alinéa précédent, on peut dire qu'il y a introduction d'une « variable » t à la quelle on doit substituer le monôme $x^a.y^b\ldots.w^f$.

Pour un squelette (général) connexe, de base $X = \{x, y, z,\ldots\}$, d'ordre ≥ 2, il n'est guère possible de fournir en quelques lignes les méthodes conduisant à décrire la décomposition associée en produit de 2 séries de la série générale :

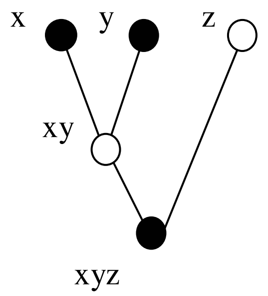
$$P(x, y, z,\ldots) = \frac{1}{1 - x} . \frac{1}{1 - y} . \frac{1}{1 - z} \ldots$$
$$S(x, y, z,\ldots) = \sum_{i,\, j,\, k...} x^i.y^j.z^k...$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots).(1 + y + y^2 +\ldots).(1 + z + z^2 + \ldots)\ldots$$

Nous allons seulement donner quelques exemples simples pour montrer qu'on n'évite pas le problème de décrire les facteurs de décomposition A et B en termes de réunion et (ou) sommes d'objets géométriques précis.

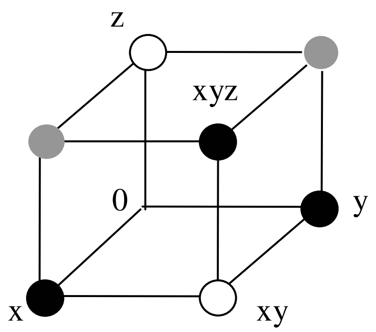
Quant à la décomposition en produit de fractions rationnelles, elle est encore possible, mais ce n'est plus du tout en termes d'éléments simples (çà contredirait la connexité supposée du squelette !).

Commençons par ce squelette sain d'ordre 2 en dimension 3 (qui est le plus « petit » imaginable d'ordre 2) :



Squelette de *type (iii)*

(trace sur le cube)



$B=\{0x\}\cup\{0xy\}$ $\quad$ $A = (\{0y\}\cup\{0z\})\oplus\{0xyz\}$

$$(i,j,k) = (i\text{-}v,j\text{-}v,k)_A + (v,v,0)_B \quad [u = k]$$
$$(i,j,k) = (i,j,u)_A + (0,0,k\text{-}u)_B + [u \neq k]$$

$$[u=\inf(i,j,k)] \qquad [v=\inf(i\text{-}u,j\text{-}u)]$$

Nous avons sciemment modifié les notations, car ici les composantes d'un point de $\mathbf{N}^3$ sont les exposants des variables x, y, z (il y a l'exponentielle derrière cela).

Voici les séries S_A et S_B correspondantes:

$S_A(x,y,z) = \sum_{(i,j,k)\in A} x^i.y^j.z^k$ qu'on peut encore écrire sous la forme suivante :

$$S_A(x,y,z) = \sum_{i\ >j} y^i(x.z)^j + \sum_{i\ >j} x^i(y.z)^j + \sum_k (x.y.z)^k$$

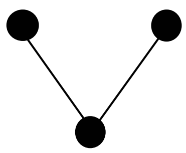
$$S_B(x,y,z) = (1 + z + z^2 + z^3 \ldots + xy + x^2y^2 + x^3y^3 +\ldots)$$

Pour se convaincre que les deux formes données de $S_A(x,y,z)$ sont égales, le plus simple est d'indiquer comment chaque monôme $x^i.y^j.z^k$ se décompose (d'unique façon) en produit d'un monôme de S_A et d'un monôme de S_B :

1° monôme facteur : **1** : $y^i(x.z)^j$ $[i > j \geq 0]$; **2** : $x^i(y.z)^j$ $[i > j \geq 0]$; **3** : $(x.y.z)^k$ $[k \geq 0]$;
2° monôme facteur : **1** : 1; **2** : z^k $[k \geq 1]$; **3** : $(xy)^i$ $[i \geq 1]$;

1) $i < (j,k)$:	$x^i.y^j.z^k = [(x.z)^i y^j]_A.[z^{k-i}]_B$		**1** × **2**
2) $j < (k,i)$:	$x^i.y^j.z^k = [x^i(y.z)^j]_A.[z^{k-j}]_B$		**2** × **2**
3) $k < i \leq j$:	$x^i.y^j.z^k = [(x.z)^k.y^{k+j-i}]_A.[(x.y)^{i-k}]_B$		**1** × **3** (et **3** × **3**)
4) $k \leq j < i$:	$x^i.y^j.z^k = [(y.z)^k.x^{k+i-j}]_A.[(x.y)^{j-k}]_B$		**2** × **3** (et **2** × **1**)
5) $i = j < k$:	$x^i.y^j.z^k = [(x.y.z)^i]_A.[z^{k-i}]_B$		**3** × **2**
6) $i = k \leq j$:	$x^i.y^j.z^k = [(x.z)^i y^j]_A$		**1** × **1** (et **3** × **1**)

Pour le squelette suturé le plus élémentaire, nous avons:



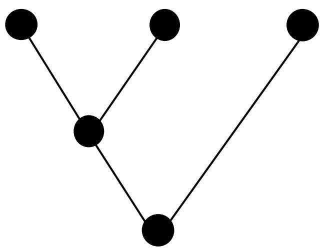
$$P_A(x, y) = \frac{1}{(1-x).(1-y)} \cdot \frac{1}{(1+x.y)}$$

$$P_B(x, y) = S_B(x, y) = 1 + x.y$$

La décomposition en « éléments simples » de $P_A(x, y)$ n'est pas « simple » à écrire . Par contre on peut donner de $S_A(x, y)$ une description assez simple qui ne passe pas par la décomposition en éléments simples en question. La voici :

$$S_A(x, y) = \sum_{n\,;\,i,j} (x.y)^{2n}(x^i + y^j)$$

Pour le squelette suturé d'ordre 2 le plus élémentaire, nous avons:



$$P_A(x, y, z) = \frac{1}{(1-x).(1-y)(1-z)} \cdot \frac{1}{(1+x.y).(1+(x.y)^2.z)}.$$

$$P_B(x, y, z) = S_B(x, y, z) = (1+x.y).(1+(x.y)^2.z)$$

$$S_A(x, y, z) =$$

$$\sum_{\substack{q \geq 0,\, \ell > 2q \\ u,v > 0}} (1+x^u+y^v).(x.y)^{4q}.z^{\ell} + \sum_{\substack{q > 0,\, t \leq q \\ u,v > 0}} (1+x^u+y^v).((x.y)^{4q}.z^{2t})$$

$$+ \sum_{\substack{q > 0,\, t \leq q \\ u,v > 0}} (1+x^u+y^v).((x.y)^{4q+2}.z^{2t})$$

Pour se convaincre que les deux formes données de $S_A(x,y,z)$ sont égales, le plus simple est d'indiquer comment chaque monôme $x^i.y^j.z^k$ se décompose (d'unique façon) en produit d'un monôme de S_A et d'un monôme de S_B :

1° monôme facteur : (S_A)

1×1: $(x.y)^{4q}.z^{\ell}$ **1×2**: $x^u.(x.y)^{4q}.z^{\ell}$ **1×3**: $y^v.(x.y)^{4q}.z^{\ell}$ $[u, v > 0\ ;\ q \geq 0\ ;\ \ell > 2q]$;

2×1 : $(x.y)^{4q}.z^{2t}$ **2×2** : $x^u.(x.y)^{4q}.z^{2t}$ **2×3**: $y^v.(x.y)^{4q}.z^{2t}$ $[u, v > 0\ ;\ q \geq 0\ ;\ 2t \leq 2q]$;

3×1 : $(x.y)^{4q+2}.z^{2t}$ **3×2**: $x^u.(x.y)^{4q+2}.z^{2t}$ **3×3**: $y^v.(x.y)^{4q+2}.z^{2t}$ $[u, v > 0\ ;\ q > 0\ ;\ 2t \leq 2q]$;

2° monôme facteur : (S_B)

0: 1 ; **1**: $x.y$; **2**: $(xy)^2.z$; **3**: $(xy)^3.z$;

Facteur commun **0** : 1 (c'est aussi le monôme **2×1** avec $q = t = 0$)

1) $i = j = 4q + r\ ;\quad r = 1, 2, 3\ ;\quad k-1 > 2q \geq 0$;

r = 3 $\quad x^i.y^j.z^k = [(xy)^{4q}z^{k-1}].[(xy)^3z]$ [**1×1**]×[**3**] ,

r = 2 $\quad = [(xy)^{4q}z^{k-1}].[(xy)^2z]$ [**1×1**]×[**2**] ,

r = 1 $\quad = [(xy)^{4q}z^{k}].[xy]$ [**1×1**]×[**1**] ,

2) $i = j = 4q + r\ ;\quad r = 1, 2, 3\ ;\quad q > 0\ ;\quad k - 1 \leq 2q\ ;\quad k = 2t + \varepsilon\ ;\quad \varepsilon = 0, 1$

r = 3 $(\varepsilon = 1)$ $\quad x^i.y^j.z^k = [(xy)^{4q}z^{2t}].[(xy)^3z]$ [**2×1**]×[**3**] ,

$(\varepsilon = 0)$ $\quad = [(xy)^{4q+2}z^{2t}].[xy]$ [**3×1**]×[**1**] ,

r = 2 $(\varepsilon = 1)$ $\quad = [(xy)^{4q}z^{2t}].[(xy)^2z]$ [**2×1**]×[**2**] ,

$(\varepsilon = 0)$ $\quad = [(xy)^{4q+2}z^{2t}]$ [**3×1**]×[**0**] ,

r = 1 $(\varepsilon = 1)\ (t < q)$ $\quad = [(xy)^{4q-2}z^{2t}].[(xy)^3z]$ [**3×1**]×[**3**] ,

$(\varepsilon = 1)\ (t = q)$ $\quad = [(xy)^{4q}z^{2q+1}].[xy]$ [**1×1**]×[**1**] ,

$(\varepsilon = 0)$ $\quad = [(xy)^{4q}z^{2t}].[xy]$ [**2×1**]×[**1**] ,

3) $i = j = 4q > 0\ ;\quad k = 2t + \varepsilon\ ;\quad \varepsilon = 0, 1$

$(k > 2q)$ $\quad x^i.y^j.z^k = [(xy)^{4q}z^k]$ [**1×1**]×[**0**] ,

$(k \leq 2q\ ;\ \varepsilon = 0)$ $\quad = [(xy)^{4q}z^{2t}]$ [**2×1**]×[**0**] ,

$(k \leq 2q\ ;\ \varepsilon = 1)$ $\quad = [(xy)^{4q-2}z^{2t}].[(xy)^2z]$ [**3×1**]×[**2**] ,

4) $\underline{i > j ;\quad i - j = u > 0 ;\quad j = 4q + r ;\quad r = 1, 2, 3 \quad ; \quad k - 1 > 2q \geq 0}$

$r = 3$	$x^i.y^j.z^k = [x^u\,(xy)^{4q}z^{k-1}].[(xy)^3z]$	$[\mathbf{1}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{3}]$,
$r = 2$	$= [x^u\,(xy)^{4q}z^{k-1}].[(xy)^2z]$	$[\mathbf{1}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{2}]$,
$r = 1$	$= [x^u\,(xy)^{4q}z^{k}].[xy]$	$[\mathbf{1}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{1}]$,

5) $\underline{i > j ;\quad i - j = u ;\quad j = 4q + r ;\ q > 0 ;\quad r = 1, 2, 3 \quad k - 1 \leq 2q ;\quad k = 2t + \varepsilon ;\quad \varepsilon = 0, 1}$

$r = 3$	$(\varepsilon = 1)$	$x^i.y^j.z^k = [x^u\,(xy)^{4q}z^{2t}].[(xy)^3z]$	$[\mathbf{2}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{3}]$,
	$(\varepsilon = 0)$	$= [x^u\,(xy)^{4q+2}z^{2t}].[xy]$	$[\mathbf{3}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{1}]$,
$r = 2$	$(\varepsilon = 1)$	$= [x^u\,(xy)^{4q}z^{2t}].[(xy)^2z]$	$[\mathbf{2}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{2}]$,
	$(\varepsilon = 0)$	$= [x^u\,(xy)^{4q+2}z^{2t}]$	$[\mathbf{3}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{0}]$,
$r = 1$	$(\varepsilon = 1)\ (t < q)$	$= [x^u\,(xy)^{4q-2}z^{2t}].[(xy)^3z]$	$[\mathbf{3}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{3}]$,
	$(\varepsilon = 1)\ (t = q)$	$= [x^u\,(xy)^{4q}z^{2q+1}].[xy]$	$[\mathbf{1}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{1}]$,
	$(\varepsilon = 0)$	$= [x^u\,(xy)^{4q}z^{2t}].[xy]$	$[\mathbf{2}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{1}]$,

6) $\underline{i > j = 4q > 0 ;\quad k = 2t + \varepsilon ;\quad \varepsilon = 0, 1}$

$(k > 2q)$	$x^i.y^j.z^k = [\,x^u(xy)^{4q}z^k]$	$[\mathbf{1}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{0}]$,
$(k \leq 2q ;\ \varepsilon = 0)$	$= [\,x^u(xy)^{4q}z^{2t}]$	$[\mathbf{2}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{0}]$,
$(k \leq 2q ;\ \varepsilon = 1)$	$= [x^u\,(xy)^{4q-2}z^{2t}].[(xy)^2z]$	$[\mathbf{3}\times\mathbf{2}]\times[\mathbf{2}]$,

7) $\underline{j > i ;\quad j - i = v > 0 ;\quad i = 4q + r ;\quad r = 1, 2, 3 \quad ; \quad k - 1 > 2q \geq 0}$

$r = 3$	$x^i.y^j.z^k = [y^v\,(xy)^{4q}z^{k-1}].[(xy)^3z]$	$[\mathbf{1}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{3}]$,
$r = 2$	$= [y^v\,(xy)^{4q}z^{k-1}].[(xy)^2z]$	$[\mathbf{1}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{2}]$,
$r = 1$	$= [y^v\,(xy)^{4q}z^{k}].[xy]$	$[\mathbf{1}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{1}]$,

8) $\underline{j > i ;\ j - i = v > 0 ;\ i = 4q + r ;\ q > 0 ;\quad r = 1, 2, 3 \quad k - 1 \leq 2q ;\quad k = 2t + \varepsilon ;\quad \varepsilon = 0, 1}$

$r = 3$	$(\varepsilon = 1)$	$x^i.y^j.z^k = [y^v\,(xy)^{4q}z^{2t}].[(xy)^3z]$	$[\mathbf{2}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{3}]$,
	$(\varepsilon = 0)$	$= [y^v\,(xy)^{4q+2}z^{2t}].[xy]$	$[\mathbf{3}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{1}]$,
$r = 2$	$(\varepsilon = 1)$	$= [y^v\,(xy)^{4q}z^{2t}].[(xy)^2z]$	$[\mathbf{2}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{2}]$,
	$(\varepsilon = 0)$	$= [y^v\,(xy)^{4q+2}z^{2t}]$	$[\mathbf{3}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{0}]$,
$r = 1$	$(\varepsilon = 1)\ (t < q)$	$= [y^v\,(xy)^{4q-2}z^{2t}].[(xy)^3z]$	$[\mathbf{3}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{3}]$,

$(\varepsilon = 1)\ (t = q) \qquad = [y^v\,(xy)^{4q} z^{2q+1}].[xy] \qquad [\mathbf{1}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{1}]$,

$(\varepsilon = 0) \qquad = [y^v\,(xy)^{4q} z^{2t}].[xy] \qquad [\mathbf{2}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{1}]$,

9) $\underline{i > j = 4q > 0\ ;\quad k = 2t + \varepsilon\ ;\quad \varepsilon = 0, 1}$

$(k > 2q) \qquad x^i.y^j.z^k = [\,y^v(xy)^{4q} z^k] \qquad [\mathbf{1}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{0}]$,

$(k \leq 2q\ ;\ \varepsilon = 0) \qquad = [\,y^v(xy)^{4q} z^{2t}] \qquad [\mathbf{2}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{0}]$,

$(k \leq 2q\ ;\ \varepsilon = 1) \qquad = [y^v\,(xy)^{4q-2} z^{2t}].[(xy)^2 z] \quad [\mathbf{3}\times\mathbf{3}]\times[\mathbf{2}]$,

Au total on trouve une fois et une seule chaque combinaison de produit de monômes de types A et B, soit $4 \times 9 = 36$ ($= 3 \times 12$).

Cchacun des trois groupes (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) contient apparemment 13 combinaisons ; en fait ils n'en contiennent bien que 12, puisque l'une d'entre elle est comptée deux fois, puisqu'elle figure à 2 titres, avec la classification indiciaire choisie (lignes 3 et 9 de chaque groupe).

En fait on peut montrer qu'il n'est pas possible d'échapper à de telles redondances, dans une classification indiciaire qui se veut « générale », ce fait étant intimement lié à la structure du squelette doublement suturé envisagé.

Nous arrêtons ici ce petit dictionnaire entre graphes squelettiques et séries décomposées, car on peut déjà imaginer la difficulté à écrire explicitement le cas général, qui ressort de tout ce qui a été dit jusqu'ici, ni plus ni moins, mais on devine aussi sur les exemples précédents qu'une description « simpliciale » des squelettes serait de grande utitlité. Nous n'abordons pas ce sujet, qui bien que relativement facile, nécessite encore « beaucoup de pages »…

Fonctions L de Dirichlet et décompositions multiplicatives directes de $\mathbf{N}^*$.

Soit $L(\mathbf{a},z)$ une série de Dirichlet, où $\mathbf{a}$ est une fonction à valeurs complexes strictement multiplicative. $L(\mathbf{a},z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a(n)}{n^z}$ **.**

Soit (A,B) une décomposition multiplicative de $\mathbf{N}^*$; alors $L(\mathbf{a},z)$ se décompose en produit de deux séries de Dirichlet $L(\mathbf{a}_A ,z)$ et $L(\mathbf{a}_B ,z)$:

$$.\ L(\mathbf{a}_A ,z) = \sum_{n\in A} \frac{a_A(n)}{n^z} \quad \text{et} \quad L(\mathbf{a}_B ,z) = \sum_{n\in B} \frac{a_B(n)}{n^z} \ .$$

où l'on a posé :

$\mathbf{a}_A(n) = \mathbf{a}(n)$ si $n \in A$, $\mathbf{a}_A(n) = 0$ autrement

$\mathbf{a}_B(n) = \mathbf{a}(n)$ si $n \in B$, $\mathbf{a}_B(n) = 0$ autrement.

Bien évidemment, les fonctions $\mathbf{a}_A$ et $\mathbf{a}_B$ ne sont plus en général strictement multiplicatives, ni même multiplicatives.

Par exemple, à toute décomposition multiplicative (A,B) de $\mathbf{N}^*$ correspond une décomposition naturelle de la fonction $\zeta = L(\mathbf{1},z)$ en $\zeta_A.\zeta_B$ où on a posé $\zeta_A = L(\mathbf{1}_A ,z)$ et $\zeta_B = L(\mathbf{1}_B ,z)$; les décompositions « connues » de ζ correspondent à des décompositions (A,B) de $\mathbf{N}^*$ vraiment triviales.

Par exemple, à toute partition de $\mathbf{P}$ en deux : $\mathbf{P} = \mathbf{P}_A \cup \mathbf{P}_B$, correspond la décomposition triviale suivante, donnée en termes de facteurs eulériens :

$$\zeta(z) = \zeta_A(z).\,\zeta_B(z) \quad \text{avec} \quad \zeta_A(z) = \prod_{p\in P_A} \frac{1}{1-\frac{1}{p^z}} \quad \text{et} \quad \zeta_B(z) = \prod_{p\in P_B} \frac{1}{1-\frac{1}{p^z}}$$

Ici, dans le cas de partitions de $\mathbf{P}$, la généralisation à plus de 2 facteurs est évidente.

Citons encore les décompositions suivantes:
donnons nous une fonction $\varphi : \mathbf{P} \to \mathbf{N}$ telle que $\varphi(p) > 1$; on lui associe la décomposition directe multiplicative suivante:

$$A_\varphi = \{ n \in \mathbf{N}^* \mid \forall\, p\in\mathbf{P},\ \upsilon_p(n) < \varphi(p)\}$$
$$B_\varphi. = \{ n \in \mathbf{N}^* \mid \forall\, p\in\mathbf{P},\ \upsilon_p(n) \in \varphi(p).\mathbf{N} \}$$

Sur chaque axe $\mathbf{N}$.p, cette décomposition induit la division euclidienne par $\varphi(p)$, et (A_φ, B_φ) est la somme directe infinie de ces décompositions.

La décomposition de $\zeta(z)$ en produit de séries associée est la suivante :

$$\zeta_{A\varphi}(z) = \sum_{\upsilon_p(n)<\varphi(p)} \frac{1}{n^z} \quad \text{et} \quad \zeta_{B\varphi}(z) = \sum_{\upsilon_p(n)\geq\varphi(p)} \frac{1}{n^z}$$

qu'on peut encore écrire :

$$\zeta_{A\varphi}(z) = \sum_{n\,\geq\,0} \frac{1}{n_A^{\,z}} \quad \text{et} \quad \zeta_{B\varphi}(z) = \sum_{n\,\geq\,0} \frac{1}{n_B^{\,z}}$$

où, pour $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i = \lambda_i .\varphi(p_i) + r_i$, $r_i < \varphi(p_i)$, on a posé :

$$n_A = p_1^{r_1}.p_2^{r_2}...p_k^{r_k}\,,\ n_B = p_1^{\lambda_1\varphi(p_1)}.p_2^{\lambda_2\varphi(p_2)}\ ...p_k^{\lambda_k\varphi(p_k)}$$

Les séries $\zeta_{B\varphi}$ sont évidemment convergentes pour $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$.

Si $\varphi(n) = c$ est constante , on a :

$$\zeta_{A\varphi}(z) = \sum_{\upsilon_p(n) < \varphi(p)} \frac{1}{n^z} = \sum_{\upsilon_p(n) < c} \frac{1}{n^z} = \zeta_c(z)$$

$$\zeta_{B\varphi}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n_B^{\ z}} = \sum_{p_i \in P \ ; \ \lambda_i \in N} \frac{1}{(p_1^{\lambda_1}.p_2^{\lambda_2}...p_k^{\lambda_k})^{c.z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^{c.z}} = \zeta(c.z)$$

$$\zeta(z) = \zeta_c(z).\zeta(c.z) = \zeta_c(z).\zeta_c(c.z).\zeta(c^2.z) = \ldots = \zeta_c(z).\zeta_c(c.z).\zeta(c^2.z)\ldots\zeta(c^{2n-1}.z).\zeta(c^n.z)$$

et on peut préciser que la somme $\zeta(c.z)$ n'est pas nulle dans la région du plan où $1/c < \mathrm{Re}(z)$, de sorte que la fonction ζ_c admet un prolongement analytique dans la région $1/c \leq \mathrm{Re}(z$, qui a les mêmes zéros que ζ (on utilise ici le théorème de La Vallée Poussin). On retrouve aussi la valeur de ζ à l'infini. Etc…

Notons encore ceci : pour deux entiers c et d, on a :

$$\zeta(z) = \zeta_c(z).\zeta(c.z) = \zeta_c(z).\zeta_d(c.z).\zeta(c.d.z) = \zeta_{c.d}(z).\zeta(c.d.z)$$

et donc :

$$\zeta_{c.d}(z) = \zeta_c(z).\zeta_d(c.z)$$

formule qui se « cache » derrière une décomposition directe additive triviale du prémonoïde $[0, c.d]^{(N)}$ et qui n'est autre que la version relative (ou bornée) de $\zeta(z) = \zeta_c(z).\zeta(c.z)$.
On a aussi :

$$\zeta_{c.d}(z) = \zeta_{d.c}(z) = \zeta_d(z).\zeta_c(d.z),$$

qui conduit à la formule d'échange:

$$\zeta_c(z).\zeta_d(c.z) = \zeta_d(z).\zeta_c(d.z),$$

laquelle ne fait que rendre compte de l'échange entre A et B dans la décomposition additive $[0, c.d]^{(N)}$ associée.
Le cas $c = 2$ donne tout son intérêt à la considération des squelettes sains, parfaitement déterminés par leurs traces sur tous les hypercubes !...

En guise de conclusion…

Les exemples évoqués (et / ou mixtures simples entre eux), ne conduisent pas à des résultats nouveaux concernant les fonctions L mais il faut bien souligner que dans tous ces cas les décompositions directes multiplicatives de $\mathbf{N}^*$ en cause sont vraiment triviales…

Par contre, dès qu'on dispose d'une décomposition directe multiplicative non triviale, il ne lui correspond pas, comme on a pu le voir sur un simple exemple ci-dessus, une décomposition « élémentaire » multiplicative eulérienne ! Mais, il y a une décomposition additive précise des séries associées, qui peut être fort utile pour l'étude des fonctions L.

Parmi les décompositions intéressantes, il y a celle qui présentent une infinité de sutures, d'ordres non bornés, celles qui présentent une infinité d'objets non terminaux, et plus généralement, celles dont le foncteur associé admet une infinité de dérivés non triviaux…Et, selon qu'on cherche à infirmer ou non l'hypothèse de Riemann, les unes ou les autres ouvrent une voie possible d'investigation.

Nous ne développons pas le sujet ici, tout en sachant qu'une porte est ainsi largement ouverte sur ces questions qui ont déjà fait couler beaucoup d'encre…