DIAGRAMMES

MATTHIAS GERNER

Le lien entre la logique et la géométrie via les esquisses

Diagrammes, tome 63-64 (2010), p. 1-72

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2010__63-64__1_0>

© Université Paris 7, UER math., 2010, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THESE DE DOCTORAT DE MATHEMATIQUES

PRESENTEE

A

L'UNIVERSITE PARIS 7 DENIS DIDEROT

PAR

Matthias GERNER

pour obtenir le grade de Docteur en Mathématiques

SOUTENUE A PARIS LE 23 JUIN 1994

Sujet de la thèse:

LE LIEN ENTRE LA LOGIQUE ET LA GEOMETRIE VIA LES ESQUISSES

JURY :	**M. ZISMAN**	Université Paris 7	(Président de Jury)
	R. GUITART	Université Paris 7	(Directeur de Recherches)
	J. BENABOU	Université Paris Nord	(Rapporteur)
	M. MAKKAI	Mc Gill University (Montréal)	(Rapporteur)
	Y. DIERS	Université de Valenciennes	
	C. LAIR	Université Paris 7	
	G. SABBAGH	Université Paris 7	

אִם־יְהוָה לֹא־יִבְנֶה בַּיִת שָׁוְא עָמְלוּ בוֹנָיו בּוֹ
אִם־יְהוָה לֹא־יִשְׁמָר־עִיר שָׁוְא שָׁקַד שׁוֹמֵר׃

Si L'Eternel ne bâtit la maison,
Ceux qui la bâtissent travaillent en vain;
Si l'Eternel ne garde la ville,
Celui qui la garde veille en vain.

(*L'Ancien Testament: Psaume* 127,1)

καὶ ἰδοὺ ἐγὼ μεθ' ὑμῶν εἰμι πάσας τὰς
ἡμέρας ἕως τῆς συντελείας τοῦ αἰῶνος.

Jésus dit: et voici, je suis avec vous tous les jours,
jusqu'à la fin du monde.

(*Le Nouveau Testament: Matthieu* 28,20)

RESUME ET REMERCIEMENTS

Le chapitre 1 est une introduction à la théorie des esquisses et à son expressivité en tant que modélisation. Les logiques du premier ordre, par exemple, peuvent être codées par des esquisses. La théorie du diagramme localement libre fournit des systèmes de factorisation, des pro-objets libres. Les diagrammes localement libres sont un maillon nécessaire entre la logique et la géométrie, parce qu' ils servent à montrer que $Mod[S]$ a en fait un petit type d'homotopie.
Les chapitre 2 et 3 constituent le centre de la recherche. Le chapitre 2 présente une construction "effective" du diagramme localement libre, un ajout effectif à la démonstration de Guitart-Lair.
Dans le chapitre 3 nous étudions géométriquement (surtout le Π_0) la catégorie de modèles $Mod[S]$ de l'esquisse S. En 3.8 on trouvera dans le calcul des composantes connexes une inter-articulation riche entre la syntaxe (l'esquisse S) et la sémantique (les modèles $Mod[S]$).
Dans le chapitre 4 est présentée une illustration dans le cas de la logique du premier ordre et de la théorie des ensembles infinis.
En particulier, grâce à la construction "effective" du chapitre 2, on obtient un moyen effectif (pour une classe raisonnable d'esquisses S) pour calculer le nombre des composantes connexes de $T \downarrow Mod[S]$ où T est un foncteur de la catégorie sous-jacente de S vers les ensembles.

Je remercie très sincèrement **M.ZISMAN** d'avoir accepté d'être Président du Jury.

Je tiens vivement à remercier **R. GUITART**, mon directeur de recherches, pour sa sympathie, sa disponibilité et ses conseils intéressants et bien profitables pour l'avancement du travail. Pendant toutes ces heures passées ensemble j'ai pu apprendre et profiter beaucoup de son expérience. J'ai un très grand estime pour sa manière de communiquer les mathématiques qui, à travers de multiples interventions techniques décisives, a été déterminante dans la construction d'une intuition au sujet du diagramme localement libre comme outil mathématique adéquate pour traiter de l'ambiguité. Il m'a fait aimer ce lien passionnant entre la logique et la géométrie qu'est la théorie des esquisses.

Je remercie chaleureusement **J. BENABOU**, rapporteur, de son intérêt qui a été encourageant, ainsi que d'avoir lu scrupuleusement le manuscrit, d'avoir indiqué l'importance de l'expression des notions de *d.l.l.* (*d.l.l.r.f.*) en termes de foncteurs cofinaux (cofinaux et filtrants) et d'avoir suggéré de nombreuses améliorations de formes nécessaires.

Je suis reconnaissant à **M. MAKKAI**, rapporteur, d'avoir lu avec attention ce travail.

Je remercie aussi à **Y. DIERS** (qui a considéré le premier le Diagramme Localement Libre dans le cas discret) d'avoir accepté de faire partie du Jury.

J'exprime de même toute ma reconnaissance à **C. LAIR** (co-auteur du Théorème d'existence du Diagramme Localement Libre), en particulier, pour sa remarque sur l'explicitation, dans notre construction, de la notion de "filtrant".

Et enfin, je suis très heureux que **G. SABBAGH** ait, comme logicien, considéré cette thèse avec bienveillance.

Je suis également très redevable à M^{elle} **Christiane FOLY** et *M.* **Joël LACCRUCHE NZAMBE** pour la prise en charge typographique de haute qualité de cette thèse.

Table des matières

1 LES ESQUISSES **1**

1.1 LES ESQUISSES MIXTES 1

1.1.1 Un point d'histoire 1

1.1.2 Définitions 2

1.2 LES ESQUISSES DU PREMIER ORDRE 2

1.2.1 Langages et théories du premier ordre 2

1.2.2 Construction des esquisses du premier ordre 4

1.3 LES ESQUISSES CONCRETES 8

1.4 CATEGORIES FILTRANTES ET FONCTEURS COFINAUX 8

1.5 THEORIE DU DIAGRAMME LOCALEMENT LIBRE 9

1.5.1 Introduction 9

1.5.2 La définition du D.L.L. des Esquisses Mixtes 10

1.5.3 Raffinement : le D.L.L. relativement filtrant 11

1.5.4 La définition du D.L.L. des Esquisses concrètes 12

1.5.5 Exemples 13

2 LA CONSTRUCTION EFFECTIVE DU D.L.L. DES ESQUISSES MIXTES **17**

2.1 LE SQUELETTE DE LA CONSTRUCTION 17

2.2 LA CONSTRUCTION EFFECTIVE DU D.L.L. 20

2.2.1 Construction de l'ensemble des factorisations au-dessus de T 21

2.2.2 Des zig-zags pour combiner des modèles au-dessus de T 26

2.3 LA CONSTRUCTION DE 2.2 EST BIEN UN D.L.L. 30

2.3.1 L'existence d'une factorisation (première condition) 31

2.3.2 Les zig-zags entre les factorisations (deuxième condition) 40

2.4 LE D.L.L. EST RELATIVEMENT FILTRANT 41

3 LA GEOMETRIE DES ESQUISSES **45**

3.1 LA REALISATION GEOMETRIQUE DE MILNOR 45

3.2 LE THEOREME A DE QUILLEN 46

3.3 REALISATION GEOMETRIQUE ET ESQUISSES 46

3.4 LES FONCTEURS π_n ($n \in \mathbb{N}$) 48
3.5 LA COHOMOLOGIE D'ANDRE 48
3.6 CALCUL RELATIF DE Π_0 , Π_1, H^n ($n \in \mathbb{N}$) 49
3.6.1 Introduction 49
3.6.2 Le calcul relatif de Π_0 50
3.6.3 Le calcul relatif de Π_1 51
3.6.4 Le calcul relatif de H^n ($n \in \mathbb{N}$) 53
3.6.5 Résumé et conclusion 54
3.7 CONDITIONS SUFFISANTES POUR QUE $T \downarrow Mod[S]$ SOIT CONTRACTILE 55
3.7.1 Une hypothèse de départ pour l'esquisse S 55
3.7.2 La condition suffisante 55
3.8 LES COMPOSANTES CONNEXES DE $B(T \downarrow Mod[S])$ 57
3.8.1 Introduction 57
3.8.2 Quelques conventions d'appellation 59
3.8.3 Le calcul de $\Pi_0 B(T \downarrow Mod[S])$ 60
3.9 LE Π_1 ET LES H^n DES ESQUISSES MULTI-INITIALES 64
3.9.1 Le Π_1 des Esquisses multi-initiales 65
3.9.2 Les H^n des Esquisses multi-initiales 65

4 APPLICATION : GEOMETRIE ET LOGIQUE DU PREMIER ORDRE 67
4.1 REMARQUES 67
4.2 EXEMPLE : LES ENSEMBLES INFINIS 68

Chapitre 1

LES ESQUISSES

1.1 LES ESQUISSES MIXTES

1.1.1 Un point d'histoire

Les remarques suivantes de René Guitart[1] nous paraissent particulièrement intéressantes pour une introduction à la théorie des esquisses fondée par Ehresmann en 1966 (Ehresmann a défini les esquisses comme "graphes multiplicatifs" marqués de cônes) :
"Il n'existe pas du tout de lien avec les sites et catégories de faisceaux, car il faut dire que son point de vue est tout autre que celui de Grothendieck. En effet, Ehresmann n'aime pas travailler "hom par hom" avec l'outil fondamental qu'est le lemme de Yoneda et il préfère toujours les calculs et descriptions "dessinées" par de petits diagrammes bien visuels. Cela se rattache probablement à sa formation en topologie algébrique, et se voit jusque dans sa manière graphique de représenter les diagrammes dans les catégories.
Ainsi, pour lui une catégorie est d'abord un graphe orienté, plus une loi de composition des paires de flèches consécutives; vers 1965 cela fait une différence entre lui et les autres catégoriciens, différence conceptuelle, à laquelle s'ajoutent des différences de notations :
il emploie "(F, f, E)" pour "$f : E \longrightarrow F$" et α et β pour "dom" et "cod", "$e'.C.e$" pour "$HOM_C(e, e')$".
Avec parfois le choix d'une terminologie à l'apparence "provisoire" (comme le terme "quasi-quotient") pour des concepts au demeurant simples et excellents, cela a certainement contribué à une mauvaise diffusion des travaux d'Ehresmann, jusqu'en 1970 environ. Mais revenons aux esquisses. Il existe une esquisse S_{cat} (à savoir le début de la catégorie simpliciale) telle que la catégorie $CONT(S_{cat}, Ens)$ des foncteurs continus de S_{cat} vers Ens soit équivalente à Cat. Alors les catégories U-structurées, avec $U : C \longrightarrow Ens$, sont précisément les objets de $CONT(S_{cat}, Ens)$, et beaucoup de résultats à leur sujet sont encore valables si S_{cat} est remplacée par une autre esquisse S décrivant un autre type de structure. La définition d'Ehresmann de foncteur adjoint (comme "éjecteur") est moins agréable que celle de Kan; d'un autre côté, il travaille toujours sous la forme "locale" (= existence d'objet libre), ce qui est la manière naturelle de construire les adjoints. Travaillant avec des univers de Grothendieck emboités, il donne en particulier un théorème d'existence de structures libres dont la preuve est une imitation des constructions de compactifications ou complétions en topologie (avec $U : C \longrightarrow Ens$, la U-structure libre sur E est $\overline{im}(E \xrightarrow{cano} \prod_{E \to U(Y)})$). Dans le même esprit, il construit le "type" associé à une esquisse, diverses complétions de catégories et catégories stucturées, de foncteurs et foncteurs structurés.

[1] voir René Guitart, Sur les contributions de Charles Ehresmann à la théorie des catégories, paru dans la gazette des mathématiciens, S.M.F., n. 13, février 1980, pp. 37-43

Ces derniers résultats semblent maintenant intéresser beaucoup de gens, les catégoriciens allemands en particulier."

1.1.2 Définitions

Une *esquisse mixte*[2] $S = (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ est la donnée

- d'un graphe multiplicatif petit $\underline{C}$
- d'un ensemble de cônes inductifs distingués de bases petites

$$\mathbb{I} = \{I = (U_J^I \xrightarrow{\alpha_J^I} U^I)_{J \in \underline{I}^I} \text{ tel que } \underline{I}^I \text{ est une petite catégorie } \}$$

- d'un ensemble de cônes projectifs distingués de bases petites

$$\mathbb{P} = \{P = (V^P \xrightarrow{\beta_K^P} V_K^P)_{K \in \underline{K}^P} \text{ tel que } \underline{K}^P \text{ est une petite catégorie } \}$$

Nous allons supposer pour la suite que $\underline{C}$ est une petite catégorie.
Lorsque l'ensemble des cônes inductifs distingués $\mathbb{I}$ est vide, on dit qu'il s'agit d'une *esquisse projective*, tandis que si l'ensemble des cônes projectifs distingués $\mathbb{P}$ est vide, nous parlerons d'une *esquisse inductive*.
Enfin, une esquisse telle que $(\underline{C}, \emptyset, \emptyset)$ sera identifée à $\underline{C}$.
On dit que $f : (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\underline{C}', \mathbb{I}', \mathbb{P}')$ est un *morphisme d'esquisses mixtes* si et seulement si

- $f : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est un foncteur
- l'image par f de tout cône distingué de $(\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ est un cône distingué de $(\underline{C}', \mathbb{I}', \mathbb{P}')$

Esquisses et morphismes entre esquisses sont les objets et les morphismes de la *catégorie des esquisses* notée Esq.
Soit $S = (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ une esquisse. On appelle *réalisation* de S et l'on note $F : S \longrightarrow Ens$, tout foncteur $F : \underline{C} \longrightarrow Ens$ transformant les cônes distingués de S en des limites de Ens.
On note par $Ens^{\underline{C}}$ la catégorie des foncteurs de $\underline{C}$ dans Ens et par $Mod[S]$ la sous-catégorie pleine de $Ens^{\underline{C}}$ dont les objets sont les réalisations.
Une catégorie $\mathcal{D}$ sera dite *naturellement esquissable* si et seulement si il existe une petite esquisse $S = (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ telle que $\mathcal{D}$ soit équivalente à $Mod[S]$.

1.2 LES ESQUISSES DU PREMIER ORDRE

1.2.1 Langages et théories du premier ordre

Un *alphabet du premier ordre* est la donnée

- d'un ensemble infini dénombrable $V = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de variables
- de connecteurs logiques $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- de deux parenthèses $(,)$
- d'un quantificateur existentiel $\exists$ et d'un quantificateur universel $\forall$
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'un ensemble S_n de symboles de fonctions n-aire
(pour $n = 0$, un symbole de fonction 0-aire sera appelée symbole de constante)
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'un ensemble R_n de symboles de relation n-aire
(pour $n = 2$ on dispose dans R_2 d'un symbole d'égalité $=$).

[2] voir C. Ehresmann. Esquisses et type de structures algébriques. Bul. Instit. Polit. Iasi XIV (1968)

Les *termes du premier ordre* sont construits de la façon suivante :

- toute variable $x \in V$, tout symbole de constantes $c \in S_0$ sont des termes
- si $t_1, \ldots, t_k$ sont des termes et f dans S_k, alors $ft_1 \ldots t_k$ est un terme.

Les *formules atomiques du premier ordre* sont les suivantes :

si $t_1, \ldots, t_k$ sont des termes et R dans R_k, alors $Rt_1 \ldots t_k$ est une formule atomique.

Les *formules du premier ordre* se construisent par :

- les formules atomiques sont des formules
- si G et H sont des formules, alors $\neg G$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \Rightarrow H)$, $(G \Leftrightarrow H)$ sont des formules
- si G est une formule et $x \in V$ une variable, alors $\forall x G$ et $\exists x G$ sont des formules.

On appelle *langage du premier ordre* l'ensemble L des formules sur un alphabet du premier ordre. Une formule F est appelée *énoncé*, si pour toute occurrence d'une variable x dans F il y a une sous-formule G de F dans laquelle figure cette occurrence et telle que $\forall x G$ ou $\exists x G$ est une sous-formule de F.
Une *théorie du premier ordre* est un ensemble d'énoncés.
Soit L un langage du premier ordre. Une *L-structure* $\mathcal{M}$ est la donnée

- d'un ensemble M
- pour $f \in S_n$ d'une fonction $\overline{f}^{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow M$
- pour $R \in R_n$ d'une relation n-aire $\overline{R}^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$
- pour $c \in S_0$ d'une constante $\overline{c}^{\mathcal{M}} \in M$.

Une *valuation dans* $\mathcal{M}$ est une application $\beta : V \longrightarrow M$ de l'ensemble des variables dans M.
Si β est une valuation et $a \in M$ nous notons par β_x^a la valuation

$$\begin{array}{rccl} \beta_x^a : & V & \longrightarrow & M \\ & y & \longmapsto & \begin{cases} \beta(y) & \text{si } y \neq x \\ a & \text{si } y = x \end{cases} \end{array}$$

Une *interprétation des termes* est un couple $(\mathcal{M}, \beta)$ tel que

- $x \in V$ est interprété par $\beta(x)$ (on note donc $\overline{x}^{\mathcal{M}} = \beta(x)$)
- $c \in S_0$ est interprété par $\overline{c}^{\mathcal{M}}$
- $ft_1 \ldots t_k$ est interprété par $\overline{f}^{\mathcal{M}} \overline{t}_1^{\mathcal{M}} \ldots \overline{t}_k^{\mathcal{M}}$.

La relation "l'interprétation des termes $(\mathcal{M}, \beta)$ est un *modèle* d'une formule" (notée $(\mathcal{M}, \beta) \models F$) est définie de façon inductive

- $(\mathcal{M}, \beta) \models = t_1 t_2$ ssi $\overline{t}_1^{\mathcal{M}} = \overline{t}_2^{\mathcal{M}}$
- $(\mathcal{M}, \beta) \models Rt_1 \ldots t_k$ ssi $\overline{R}^{\mathcal{M}} \overline{t}_1^{\mathcal{M}} \ldots \overline{t}_k^{\mathcal{M}}$
- $(\mathcal{M}, \beta) \models \neg F$ ssi non $((\mathcal{M}, \beta) \models F)$
- $(\mathcal{M}, \beta) \models F \wedge G$ ssi $(\mathcal{M}, \beta) \models F$ et $(\mathcal{M}, \beta) \models G$
- $(\mathcal{M}, \beta) \models F \vee G$ ssi $(\mathcal{M}, \beta) \models F$ ou $(\mathcal{M}, \beta) \models G$
- $(\mathcal{M}, \beta) \models \forall x F$ ssi pour tout $a \in M : (\mathcal{M}, \beta_x^a) \models F$
- $(\mathcal{M}, \beta) \models \exists x F$ ssi il existe $a \in M$ avec $(\mathcal{M}, \beta_x^a) \models F$.

Soit Φ un ensemble de formules et F une formule, on écrit $\Phi \vdash F$ si et seulement si tout modèle de Φ est un modèle de F. Une formule F est dite sous *forme prénexe* si $F = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G$ avec $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ et si G est sans quantificateur. Toute formule est équivalente à une formule sous forme prénexe. Un *homomorphisme* entre deux L-structures $\mathcal{M} = (M, {}^{\cdot\mathcal{M}})$ et $\mathcal{N} = (N, {}^{\cdot\mathcal{N}})$ est une application $\pi : M \longrightarrow N$ telle que

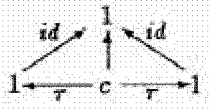
- pour $c \in S_0$ on ait $\pi(\overline{c}^{\mathcal{M}}) = \overline{c}^{\mathcal{N}}$
- pour $f \in S_k (k > 0)$ on ait $\pi(\overline{f}^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_k)) = \overline{f}^{\mathcal{N}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k))$
- pour $R \in R_k (k > 0)$ on ait $\overline{R}^{\mathcal{M}} a_1 \dots a_k$ ssi $\overline{R}^{\mathcal{N}} \pi(a_1) \dots \pi(a_k)$.

Si $\mathcal{T}$ est une théorie, nous notons par $Mod(\mathcal{T})$ la catégorie qui a comme objets les L-structures qui sont modèles de $\mathcal{T}$, et comme morphismes tous les homomorphismes entre ces objets.

1.2.2 Construction des esquisses du premier ordre

Dans cette sous-section nous allons associer à toute théorie $\mathcal{T}$ du premier ordre une esquisse $S = (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ qui sera appelée *esquisse du premier ordre déduite de* $\mathcal{T}$. Pour tout énoncé F de la théorie $\mathcal{T}$ soit $V(F)$ l'ensemble des variables qui figurent dans F. Nous allons construire l'esquisse S selon la structure inductive des formules de $\mathcal{T}$. C'est-à-dire soit S l'esquisse engendrée par les données suivantes :

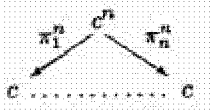
- des objets $c, 1$ dans $Ob\underline{C}$
- une flèche $\tau : c \longrightarrow 1$ dans $Fl\underline{C}$
- un cône distingué



$\in \mathbb{I}$

(pour exprimer que $\tau : c \longrightarrow 1$ est candidat pour une application surjective)
- un cône projectif distingué : $1 \in \mathbb{P}$
(pour dire que 1 est un candidat pour un objet terminal)
- pour tout énoncé F de $\mathcal{T}$ et $n = card V(F)$

  - un objet c^n dans $Ob\underline{C}$
  - des flèches $\pi_i^n : c^n \longrightarrow c$ dans $Fl\underline{C}$ pour $i = 1 \dots n$
  - un cône projectif distingué



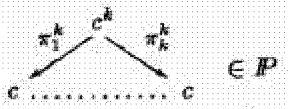
$\in \mathbb{P}$

(pour dire que c^n est candidat pour un produit)

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $R \in R_k$ un symbole de relation k-aire qui figure dans $\mathcal{T}$ nous avons :

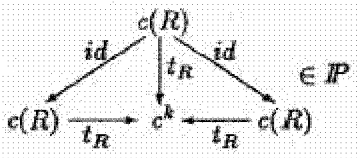
  - un objet c^k dans $Ob\underline{C}$

- des flèches $\pi_i^k : c^k \longrightarrow c$ dans $Fl\underline{C}$ pour $i = 1 \ldots n$
- un cône projectif distingué



(pour dire que c^k est candidat pour un produit)

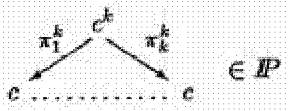
- un objet $c(R)$ dans $Ob\underline{C}$
- une flèche $t_R : c(R) \longrightarrow c^k$ dans $Fl\underline{C}$
- un cône projectif distingué



(pour dire que $t_R : c(R) \longrightarrow c^k$ est un candidat pour une application injective)

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $f \in S_k$ symbole de fonction k-aire qui figure dans $\mathcal{T}$ nous avons

- un objet c^k dans $Ob\underline{C}$
- des flèches $\pi_i^k : c^k \longrightarrow c$ dans $Fl\underline{C}$ pour $i = 1 \ldots n$
- un cône projectif distingué



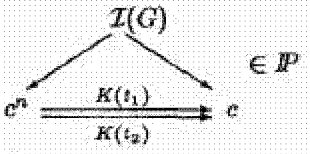
- une flèche $c(f) : c^k \longrightarrow c$ dans $Fl\underline{C}$

- pour tout symbole de constante $m \in S_0$ qui figure dans $\mathcal{T}$ nous avons une flèche $c(m) : 1 \longrightarrow c$ dans $Fl\underline{C}$
- pour tout énoncé F de $\mathcal{T}$ et $n = cardV(F)$, pour tout terme t qui figure dans F nous construisons une flèche $K(t) : c^n \longrightarrow c$ dans $Fl\underline{C}$ de la façon suivante :

- si $t = x_i$ (variable)
  nous prenons comme flèche $K(t)$ la projection $\pi_i^n : c^n \longrightarrow c$
- si $t = m$ (constante)
  nous définissons dans $Fl\underline{C}$ une flèche $c^n \longrightarrow 1$ et nous prenons comme flèche $K(t)$ le composé $c^n \longrightarrow 1 \xrightarrow{c(m)} c$
- si $t = ft_1 \ldots t_k$
  et si pour $i = 1, \ldots, k$ on a déjà défini $K(t_i) : c^n \longrightarrow c$, nous définissons dans $Fl\underline{C}$ une flèche $h : c^n \longrightarrow c^k$ à laquelle nous imposons les égalités $\pi_i^k \circ h = K(t_i)$ (pour $i = 1, \ldots, k$) et nous prenons comme flèche $K(t)$ le composé $c^n \xrightarrow{h} c^k \xrightarrow{c(f)} c$

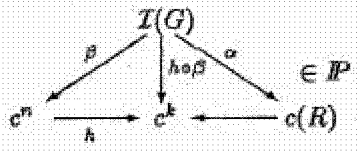
- pour tout énoncé F de T et $n = cardV(F)$, pour toute sous-formule G qui figure dans F nous construisons un candidat pour un monomorphisme $\mathcal{I}(G) \longrightarrow c^n$ dans $Fl\underline{C}$ de la façon suivante :

- si $G : t_1 = t_2$
  nous ajoutons un objet $\mathcal{I}(G)$ à $Ob\underline{C}$, une flèche $\mathcal{I}(G) \longrightarrow c^n$ à $Fl\underline{C}$ et un cône projectif distingué

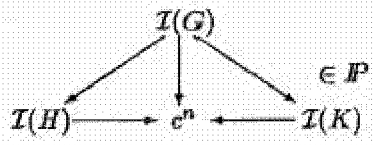


(pour dire que $\mathcal{I}(G)$ est candidat pour un égalisateur)

- si $G : Rt_1 \ldots t_k$
  nous définissons dans $Fl\underline{C}$ une flèche $h : c^n \longrightarrow c^k$ à laquelle nous imposons les égalités $\pi_i^k \circ h = K(t_i)$ (pour $i = 1, \ldots, k$) (c'est-à-dire que h est candidat pour le morphisme de la propriété universelle du produit). Nous ajoutons ensuite un objet $\mathcal{I}(G)$ à $Ob\underline{C}$, des flèches $\mathcal{I}(G) \xrightarrow{\alpha} c(R)$ et $\mathcal{I}(G) \xrightarrow{\beta} c^n$ à $Fl\underline{C}$ et un cône projectif distingué

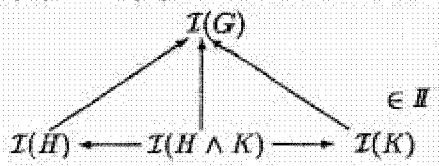


- si $G : H \wedge K$
  et si $\mathcal{I}(H) \longrightarrow c^n, \mathcal{I}(K) \longrightarrow c^n$ sont déjà définis, nous ajoutons à $Ob\underline{C}$ un objet $\mathcal{I}(G)$, trois flèches $\mathcal{I}(G) \longrightarrow c^n, \mathcal{I}(G) \longrightarrow \mathcal{I}(H), \mathcal{I}(G) \longrightarrow \mathcal{I}(K)$ à $Fl\underline{C}$ et un cône projectif distingué



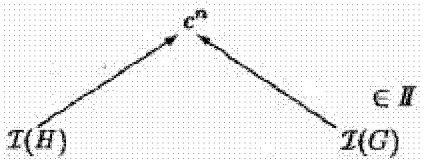
(pour dire que $\mathcal{I}(G)$ est un candidat pour une intersection)

- si $G : H \vee K$
  et si $\mathcal{I}(H) \longrightarrow c^n, \mathcal{I}(K) \longrightarrow c^n$ sont déjà définis, nous ajoutons à $\underline{C}$ $\mathcal{I}(H \wedge K) \longrightarrow c^n$ comme nous l'avons fait sous le point précédent, à $Ob\underline{C}$ un objet $\mathcal{I}(G)$, et à $Fl\underline{C}$ deux flèches $\mathcal{I}(H) \longrightarrow \mathcal{I}(G), \mathcal{I}(K) \longrightarrow \mathcal{I}(G)$ et à $\mathbb{I}$ un cône inductif distingué



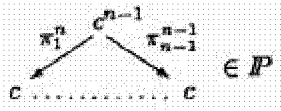
(pour dire que $\mathcal{I}(G)$ est un candidat pour une réunion).

- si $G : \neg H$
  et si $\mathcal{I}(H) \longrightarrow c^n$ est déjà défini, nous ajoutons à $Ob\underline{C}$ un objet $\mathcal{I}(G)$, à $Fl\underline{C}$ une flèche $\mathcal{I}(G) \longrightarrow c^n$ et à $\mathbb{I}$ un cône inductif distingué :

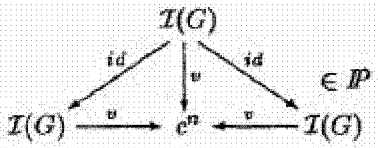


(pour dire que c^n est un candidat pour une somme).

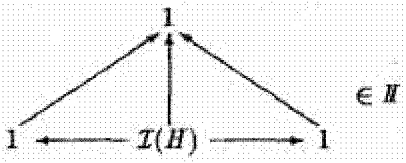
- Si $G : \exists x H$
  et si $\mathcal{I}(H) \longrightarrow c^n$ est déjà défini, nous devons envisager deux cas :
  a) la variable x ne figure pas dans H.
  Dans ce cas nous ajoutons à $Ob\underline{C}$ un objet $\mathcal{I}(G)$, à $Fl\underline{C}$ une flèche $\mathcal{I}(G) \longrightarrow \mathcal{I}(H)$ et à $\mathbb{I}$ et $\mathbb{P}$ des cônes qui expriment que $\mathcal{I}(G) \longrightarrow \mathcal{I}(H)$ est candidat pour un isomorphisme.
  b) la variable x figure dans H, c'est-à-dire $G : \exists x H(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Dans ce cas nous ajoutons à $Ob\underline{C}$ des objets c^{n-1} (sauf pour $n = 1$ où nous posons $c^0 = 1$), $\mathcal{I}(G)$ et à $Fl\underline{C}$ des flèches $\pi : c^n \longrightarrow c^{n-1}$, $\mathcal{I}(H) \longrightarrow 1$, $\mathcal{I}(H) \xrightarrow{u} \mathcal{I}(G)$ et $\mathcal{I}(G) \xrightarrow{v} c^{n-1}$.
  A $\mathbb{P}$ nous ajoutons des cônes (sauf pour $n = 1$)



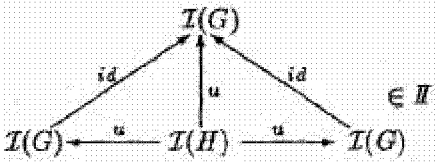
et



(pour dire que $\mathcal{I}(G) \xrightarrow{v} c^{n-1}$ est candidat pour une application injective.)
Comme cône inductif nous ajoutons à l'esquisse S :



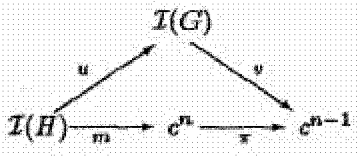
(pour dire que $\mathcal{I}(H) \longrightarrow 1$ est candidat pour une application surjective)



(pour dire que $\mathcal{I}(H) \xrightarrow{u} \mathcal{I}(G)$ est un candidat pour une application surjective)
Ces données seront soumises à des égalités suivantes

$$\pi_1^{n-1} \circ \pi = \pi_1^n, \ldots, \pi_{i-1}^{n-1} \circ \pi = \pi_{i-1}^n, \pi_i^{n-1} \circ \pi = \pi_{i+1}^n, \ldots, \pi_{n-1}^{n-1} \circ \pi = \pi_n^n$$

et $v \circ u = \pi \circ m$
où $m : \mathcal{I}(H) \rightarrowtail c^n$ pour exprimer que nous disposons d'une décomposition epi-mono



Ceci achève la construction de l' esquisse S. Malheureusement $Mod(\mathcal{I})$ n'est pas naturellement esquissé par S, c'est-à-dire nous n'avons pas en toute généralité une équivalence entre $Mod(\mathcal{I})$ et $Mod[S]$. Il existe, en revanche, sur le plan des objets un isomorphisme de classes : $ObMod(\mathcal{I}) \cong ObMod[S]$. C'est grâce à cette correspondance que nous parlerons donc des esquisses du premier ordre.

1.3 LES ESQUISSES CONCRETES

Appelons *esquisse concrète*[3] tout couple $(S, \mathbb{F})$ constitué d'une esquisse projective S et d'un ensemble $\mathbb{F}$ de cônes projectifs petits distingués dans $Mod[S]$. On appelle ***réalisation*** de $(S, \mathbb{F})$ toute réalisation F de S qui vérifie :

$$Hom(L, F) = \varinjlim_{K \in \underline{K}} Hom(L_K, F)$$

pour tout cône projectif $(L \longrightarrow L_K)_{K \in \underline{K}^{op}}$ appartenant à $\mathbb{F}$. On note alors $Mod[S, \mathbb{F}]$ la sous-catégorie pleine de $Mod[S]$ dont les objets sont les réalisations de cette esquisse concrète. A toute esquisse mixte $S = (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ on peut associer l'esquisse concrète $((\underline{C}, \mathbb{P}), Y(\mathbb{I}))$ où Y désigne le foncteur de Yoneda.
Il est facile de vérifier que $Mod[\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P}] = Mod[(\underline{C}, \mathbb{P}), Y(\mathbb{I})]$.
Inversement on montre[4] qu'à toute esquisse concrète $(\underline{C}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ est associée une esquisse mixte $S' = (\underline{C}', \mathbb{I}', \mathbb{P}')$ telle que les modèles de S' et de $(\underline{C}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ soient en bijection. On voit donc que les notions d'esquisse mixte et d'esquisse concrète se correspondent.

1.4 CATEGORIES FILTRANTES ET FONCTEURS COFINAUX

Nous rappelons ici quelques définitions et résultats des livres CWM[5] et SGA 4[6].
En théorie des ensembles on appelle *ensemble filtrant* tout ensemble muni d'un préordre dans lequel deux éléments admettent toujours un majorant. Cette notion peut être étendue aux catégories :
Une categorie $\underline{J}$ est *filtrante* si $\underline{J}$ est non-vide et

1. Pour tous objets $J, J' \in \underline{J}$ il existe $K \in \underline{J}$ et des flèches $J \longrightarrow K$, $J' \longrightarrow K$
2. Pour tout couple de flèches $u, v : J \longrightarrow J'$ il existe un objet $K \in \underline{J}$ et une flèche $w : J' \longrightarrow K$ avec $w \circ u = w \circ v$.

[3] voir R. Guitart et C. Lair, Existence de Diagrammes localement libres, Diagrammes, Vol. 6, Paris 1981
[4] voir R. Guitart et C. Lair, Calcul des formules internes, Diagrammes, Vol. 4, 1980
(en pp. G 26-27 se trouve une démonstration d'existence)
[5] voir S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag
[6] voir Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie,1963/64, Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas, S.L.N. 269

Autrement dit $\underline{J}$ est filtrante si et seulement si tout foncteur $\underline{I} \longrightarrow \underline{J}$ de source une catégorie finie $\underline{I}$ est base d'un cône inductif dans $\underline{J}$.
Une *limite inductive filtrante* est la limite d'un foncteur $F : \underline{J} \longrightarrow \underline{K}$ défini sur une catégorie filtrante $\underline{J}$.
Nous avons le théorème important :

Théorème : Soit $\underline{K}$ une catégorie finie et $\underline{J}$ une catégorie petite et filtrante. Alors pour tout bi-foncteur $F : \underline{K} \times \underline{J} \longrightarrow Ens$ le morphisme canonique

$$Colim_J Lim_K F(K, J) \longrightarrow Lim_K Colim_J F(K, J)$$

est un isomorphisme.

Démonstration : voir CWM, p.212

La notion de cofinalité que nous allons introduire maintenant servira dans la définition du diagramme localement libre à exprimer synthétiquement sa propriété de limite (voir section 1.5.2), comme J.Bénabou nous a signalé.
Un foncteur $F : \underline{J} \longrightarrow \underline{K}$ est appelé *cofinal* si pour tout $K \in \underline{K}$ la comma-catégorie $(K \downarrow F)$ qui a comme objets des morphismes $K \longrightarrow F(J)$ est non-vide et connexe. Une sous-catégorie est appelé cofinale si le foncteur inclusion est cofinal.
Pour $F : \underline{J} \longrightarrow \underline{K}$ et $L : \underline{K} \longrightarrow \underline{C}$ il existe un morphisme canonique $ColimL \circ F \longrightarrow ColimL$ qui est défini si les deux colimites existent. Nous avons le théorème suivant :

Théorème : Si $F : \underline{J} \longrightarrow \underline{K}$ est cofinal et si $L : \underline{K} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur tel que $ColimL \circ F$ existe, alors $ColimL$ existe et le morphisme canonique est un isomorphisme.

Démonstration : voir CWM, p.213-14

1.5 THEORIE DU DIAGRAMME LOCALEMENT LIBRE

1.5.1 Introduction

On sait construire effectivement les éléments du monoïde libre sur un alphabet A, à savoir comme les mots sur cet alphabet. Les structures algébriques libres générales peuvent aussi être décrites effectivement, en en représentant les éléments comme termes de la théorie comprenant comme constantes les éléments de l'ensemble générateur. Si un foncteur n'a pas d'adjoint mais est néanmoins mixtement esquissable, on a (Guitart-Lair[7]), à la place des structures libres, l'existence des diagrammes localement libres; et même dans certains cas plus particuliers, on a (Diers[8]) l'existence de multi-structures libres c'est-à-dire de diagrammes localement libres discrets. Nous indiquons ici, dans le cas où l'esquisse mixte considérée compte des cônes inductifs quelconques et des cônes projectifs *finis*, une méthode pour présenter effectivement les éléments des différents objets du diagramme localement libre. Ce résultat est une étape indispensable en vue d'élaborer un procédé calculant les invariants homotopiques et cohomologiques proposés par Guitart[9]. Pour simplifier nous écrirons *d.l.l.* au lieu de diagramme localement libre .

[7] voir R. Guitart et C. Lair, Existence de Diagrammes Localement Libres, Diagrammes, Vol. 6, Paris 1981
[8] voir Y. Diers, Catégories localisables, Thèse, Paris, 1977
[9] voir R. Guitart, On the Geometry of Computations, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique, Vol. *XXVII* - 4 (1986)

1.5.2 La définition du D.L.L. des Esquisses Mixtes

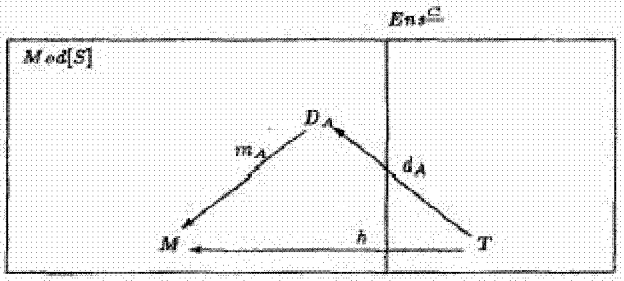
Soit $S = (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ une esquisse mixte. Considérons le foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ de la catégorie sous-jacente $\underline{C}$ vers les ensembles. Si T n'est pas un modèle, T est quand même susceptible d'engendrer un "spectre" de modèles. Le *d.l.l.* de T est ainsi la donnée :

- d'une *petite* catégorie $\underline{A}$,
- d'un diagramme de foncteurs $D : \underline{A} \longrightarrow Mod[S]$ et
- d'un cône projectif $d = (d_A : T \longrightarrow D_A)_{A \in \underline{A}}$ dans $Ens^{\underline{C}}$

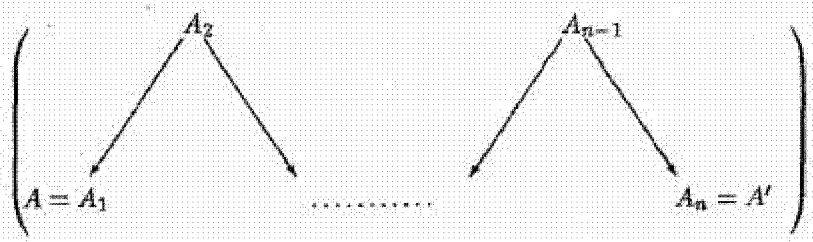
tels que pour tout modèle $M \in ObMod[S]$:

$$Hom_{Ens^{\underline{C}}}(T, M) \cong \varprojlim_{A \in \underline{A}} \; Hom_{Mod[S]}(D_A, M).$$

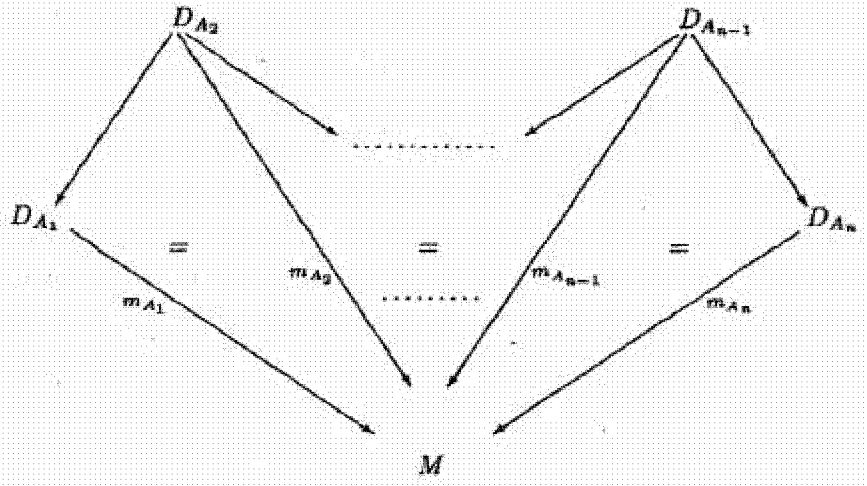
Autrement dit on demande que le foncteur $(D, d) : \underline{A} \longrightarrow (T \downarrow Mod[S])$ avec $A \longmapsto (d_A : T \longrightarrow D_A)$ soit cofinal (cf. section 3.3) i.e. tel que pour tout $h : T \longrightarrow M$ la catégorie $(D, d) \downarrow h$ soit non-vide et connexe.
Cette dernière condition peut être explicitée de la façon suivante :
Pour toute flèche $(T \xrightarrow{h} M) \in Hom_{Ens^{\underline{C}}}(T, M)$
1) $\exists A \in \underline{A}, \exists (D_A \xrightarrow{m_A} M) \in Hom_{Mod[S]}(D_A, M) : h = m_A \circ d_A$



2) Si (A, m_A) et $(A', m_{A'})$ satisfont la condition 1), alors il existe un zig-zag dans $\underline{A}$:



tel que le diagramme suivant est commutatif :

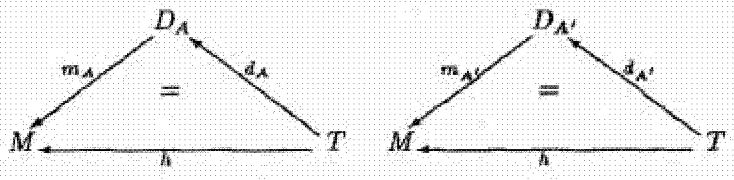


Guitart-Lair[10] ont donc établi l'existence des *d.l.l.* La démonstration se base sur une construction transfinie par saturation. Il y a donc un principe itératif, mais à chaque étape la construction n'est pas effective. Dans la perspective d'un calcul effectif d'invariants géométriques nous aurons besoin d'une construction plus effective. Pour cela nous avons effectué une autre démonstration qui est effective mais valable seulement pour les esquisses dont les cônes projectifs sont à bases finies. La finitude des bases des cônes projectives est donc une restriction par rapport au résultat de Guitart-Lair mais permet d'éviter une induction transfinie.

1.5.3 Raffinement : le D.L.L. relativement filtrant

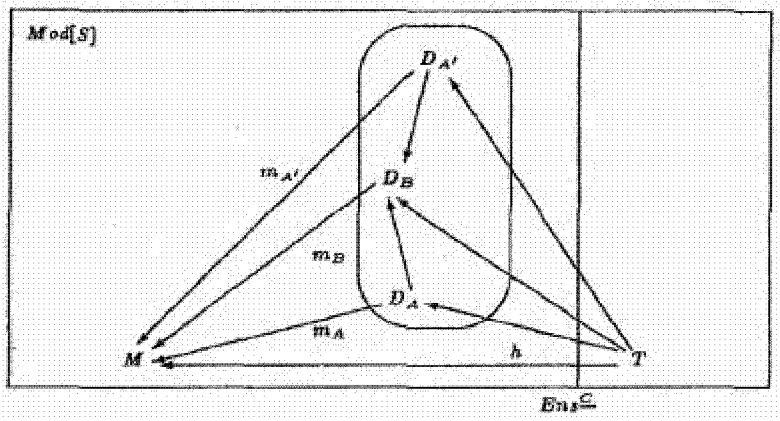
Pour des applications géométriques ultérieures nous aurons besoin d'une certaine "amélioration" de la notion du *d.l.l.* Soit de nouveau $S = (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ une esquisse mixte et $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ un foncteur. Un *d.l.l.* $(\underline{A}, D, d)$ de T est relativement filtrant (*d.l.l.r.f.*) si et seulement si pour tout $h : T \longrightarrow M$, la catégorie $(D, d) \downarrow h$, qui est connexe, est de plus filtrante. Soit explicitement :

1) Pour tout modèle $M \in Mod[S]$ et tout morphisme $(T \xrightarrow{h} M) \in Fl Ens^{\underline{C}}$, pour $A, A' \in Ob\underline{A}$, $m_A \in Hom_{Mod[S]}(D_A, M)$ et $m_{A'} \in Hom_{Mod[S]}(D_{A'}, M)$ tels que les diagrammes suivants commutent :

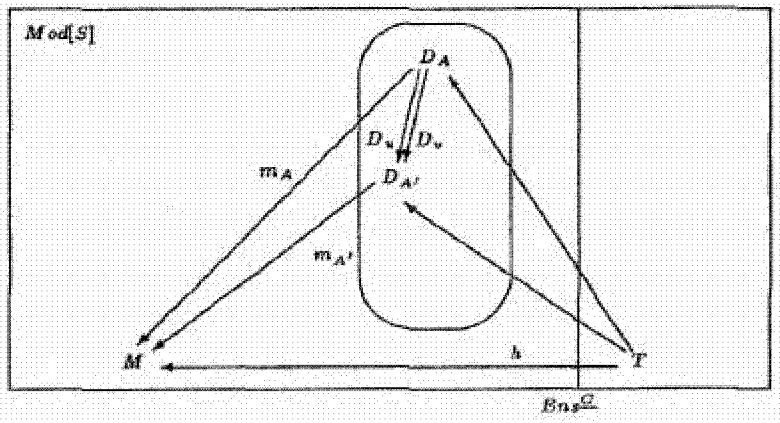


il existe $B \in Ob\underline{A}$ et $m_B \in Hom_{Mod[S]}(D_B, M)$ et $A \longrightarrow B \longleftarrow A$ dans $Fl\underline{A}$ tels que dans $Mod[S]$ on ait un diagramme commutatif :

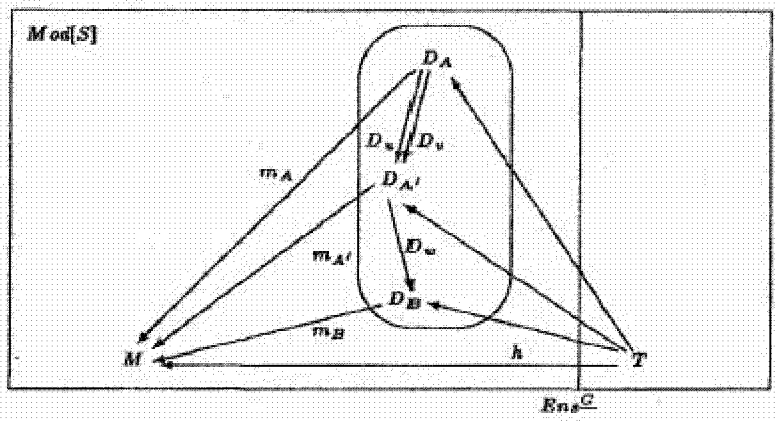
[10] voir R. Guitart et C. Lair, Existence de Diagrammes Localement Libres, Diagrammes, Vol. 6, Paris 1981



2) Pour tout modèle $M \in Mod[S]$ et tout morphisme $(T \xrightarrow{h} M) \in Fl Ens^{\underline{C}}$, pour $A, A' \in Ob\underline{A}$ et tout couple de flèches $u : A \longrightarrow A'$ et $v : A \longrightarrow A'$, pour $m_A \in Hom_{Mod[S]}(D_A, M)$ et pour $m_{A'} \in Hom_{Mod[S]}(D_{A'}, M)$ tels que le diagramme suivant commute :



il existe $B \in Ob\underline{A}$ et $m_B \in Hom_{Mod[S]}(D_B, M)$ et $w : A' \longrightarrow B$ dans $Fl\underline{A}$ tels que $w \circ u = w \circ v$ et tels que le diagramme suivant commute dans $Ens^{\underline{C}}$:



On reconnaît les deux étapes dans la définition d'une catégorie filtrante[11]. Le mot "relativement" se réfère au point de départ qui est le morphisme $h : T \longrightarrow M$.

1.5.4 La définition du D.L.L. des Esquisses concrètes

Soit $S = (\underline{C}, I\!P, I\!F)$ une esquisse concrète. Considérons le foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ de la catégorie sous-jacente de S vers les ensembles. Le *d.l.l.* de T est la donnée :

- d'une petite catégorie $\underline{A}$
- d'un diagramme de foncteurs $D : \underline{A} \longrightarrow Mod[(\underline{C}, I\!P), I\!F]$
- d'un cône projectif $d = (d_A : T \longrightarrow D_A)_{A \in \underline{A}}$ dans $Ens^{\underline{C}}$ tels que pour tout modèle $M \in ObMod[(\underline{C}, I\!P), I\!F]$:

$$Hom_{Ens^{\underline{C}}}(T, M) \cong \varprojlim_{A \in \underline{A}} Hom_{Mod[S]}(D_A, M).$$

La définition est donc tout à fait analogue au *d.l.l.* d'une esquisse mixte. Nous avons de nouveau l'existence du *d.l.l.*[12].

1.5.5 Exemples

Les deux exemples suivants ont été mis en évidence par Guitart[13] :

Le D.L.L. des sommes

On considère l'esquisse mixte $S \equiv a \xrightarrow{u} c \xleftarrow{v} b$ avec le cône inductif distingué $a \xrightarrow{u} c \xleftarrow{v} b$. Soit $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ un foncteur que l'on notera par $T = A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$.

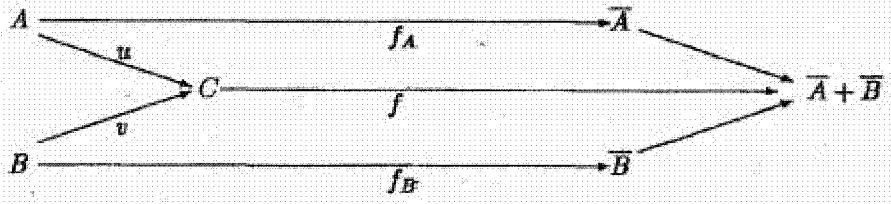
Premier cas : $u(A) \cap v(B) \neq \emptyset$

Il n'y a donc pas de morphisme de (u, v) vers un diagramme somme. Dans ce cas le *d.l.l.* est le diagramme vide.

[11] voir S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, p. 207
[12] voir R. Guitart et C. Lair, Existence de Diagrammes Localement Libres, Diagrammes, Vol. 6, Paris 1981
[13] voir R. Guitart, On the Geometry of Computation II, Cahier de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, Vol. XXIX-4 (1988), p. 322-323

Deuxième cas : $u(A) \cap v(B) = \emptyset$

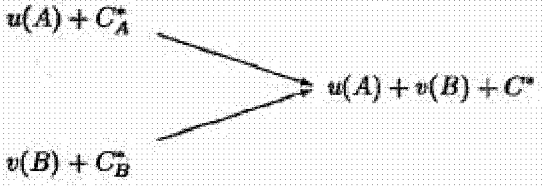
Soit donné un morphisme vers un diagramme somme :



Notons

$$\begin{aligned} C^* &= C\backslash[u(A) \cup v(B)] \\ C^*_A &= \{c \in C^* \mid f(c) \in \overline{A}\} \\ C^*_B &= \{c \in C^* \mid f(c) \in \overline{B}\} \end{aligned}$$

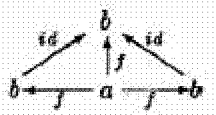
Pour cette raison



sera le diagramme somme qui factorise le morphisme (f_A, f, f_B). Le *d.l.l.* est donc discret et est indexé par l'ensemble des bipartitions de C^*.

Le D.L.L. des Epis

On considère l'esquisse mixte $S \equiv a \xrightarrow{f} b$ avec le cône inductif distingué :



(pour dire que $f : a \longrightarrow b$ est un candidat pour un épimorphisme).

Soit $T : S \longrightarrow Ens$ un foncteur que l'on notera $A \xrightarrow{f} B$. Soit ω la catégorie qui a comme objets les cardinaux finis et comme morphismes toutes les applications entre cardinaux finis. Le *d.l.l.* est défini de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} D: & \omega & \longrightarrow & Mod[S] \\ & n & \longmapsto & \begin{pmatrix} A+n(B\setminus f(A)) \\ \downarrow \\ B \end{pmatrix} \\ & (n \xrightarrow{t} m) & \longrightarrow & \begin{pmatrix} A+n(B\setminus f(A)) & \xrightarrow{D(t)(a)} & A+m(B\setminus f(A)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{D(t)(b)} & B \end{pmatrix} \end{array}$$

où $D(t)(b)$ est l'identité sur B, $D(t)(a)$ est l'identité sur A et envoie la $i^{ième}$ copie de $B - f(A)$ sur la $t(i)^{ième}$ copie de $B - f(A)$.
Le cône projectif du diagramme localement libre est donné par :

$$d_n : \quad \begin{array}{ccc} A & \rightarrowtail & A + n(B \setminus f(A)) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[id]{} & B \end{array} \qquad \text{pour } n \in \omega$$

Vérifions maintenant que ces données constituent un *d.l.l.* de $A \xrightarrow{f} B$. Pour cela considérons un morphisme de $A \xrightarrow{f} B$ vers un épi :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & K \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow[t]{} & L \end{array}$$

Il est facile de voir que tout $n \in \omega$ délivre une factorisation par $A + n(B - f(A)) \longrightarrow B$ mais que cette factorisation n'est pas unique en général. Considérons pour cela deux factorisations :

$$\begin{array}{ccc} A + n(B \setminus f(A)) & \xrightarrow{s_n} & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[t]{} & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A + m(B \setminus f(A)) & \xrightarrow{s_m} & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[t]{} & L \end{array}$$

Dans ω nous pouvons définir le zig-zag suivant :

$$\begin{array}{ccccc} n & \xrightarrow{u} & n+m & \xleftarrow{v} & m \\ i & \longmapsto & i & & j+n & \longmapsto & j \end{array}$$

d'où le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A + n(B \setminus f(A)) & \xrightarrow{u} & A + (n+m)(B \setminus f(A)) & \xleftarrow{v} & A + m(B \setminus f(A)) \\ \downarrow & & {\scriptstyle s_{n+m}}\downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{id} & B & \xleftarrow{id} & B \\ & & {\scriptstyle t}\downarrow & & \\ & {\scriptstyle s_n}\searrow & K & \swarrow{\scriptstyle s_m} & \\ & & \downarrow & & \\ & {\scriptstyle t}\searrow & L & \swarrow{\scriptstyle t} & \end{array}$$

avec s_{n+m} :

$$\begin{array}{lll} A + (n+m)(B \setminus f(A)) & \longrightarrow & K \\ x \in A & \longmapsto & s(x) \\ y \in (B \setminus f(A))_i \text{ avec } i \leq n & \longmapsto & s_n(x) \\ y \in (B \setminus f(A))_i \text{ avec } n < i \leq m & \longmapsto & s_m(x) \end{array}$$

Chapitre 2

LA CONSTRUCTION EFFECTIVE DU D.L.L. DES ESQUISSES MIXTES

Ce chapitre a été l'objet d'un exposé au $51^{ième}$ Paripatetic Seminar on Sheaves and Logic[1]. Pour le reste de ce chapitre, soit $S = (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ une esquisse mixte avec les notations de 1.1.2 . La construction effective du *d.l.l.* ne sera valable que si les cônes projectifs distingués de S sont à bases finies (Cette condition intervient dans la section 2.3.1.c), p.40).
Soit $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ un foncteur quelconque de la catégorie sous-jacente de l'esquisse S vers les ensembles. Le but de ce chapitre est de calculer de façon effective point par point le *d.l.l.* de T. Nous allons voir que la construction qui sera présentée n'est pas seulement un *d.l.l.*, mais aussi un *d.l.l.* relativement filtrant de T.

2.1 LE SQUELETTE DE LA CONSTRUCTION

Si T n'est pas un modèle de l'esquisse S, l'on peut se questionner au sujet des raisons qui font que T ne transporte pas les cônes distingués de S en des limites de Ens. Avant d'examiner cette question, faisons les rappels suivants sur les limites inductives et projectives :

Limites Inductives : Soit $F : \underline{J} \longrightarrow Ens$ un foncteur. Alors :

$$\varinjlim_{J \in \underline{J}} F(J) = \coprod_{J \in \underline{J}} F(J)/_{\simeq}$$

où $\simeq$ est la relation d'équivalence suivante :
$(x, J) \simeq (x', J')$ ssi il existe un zig-zag entre J et J' qui lie (x, J) à (x', J')

Limites Projectives : Soit $F : \underline{K} \longrightarrow Ens$ un foncteur.

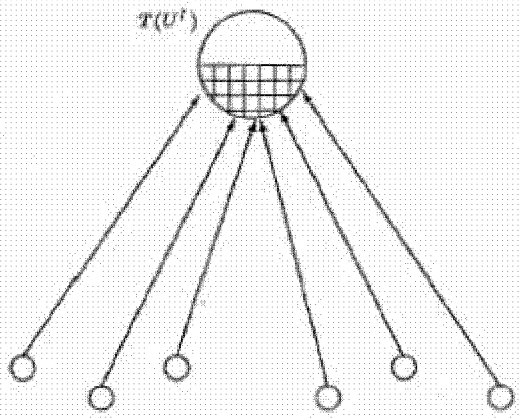
Alors :

$$\varprojlim_{K \in \underline{K}} F(K) = \{(x_K)_{K \in \underline{K}} \in \prod_{K \in \underline{K}} F(K) / \forall K, K' \in \underline{K}, \forall u : K \longrightarrow K' \in \underline{K} : F(u)(x_K) = x_{K'}\}$$

[1] $51^{ième}$ P.S.S.L, Valenciennes(France), 13-14 février 1993

Nous trouvons trois types d'"imperfections" qui empêchent T d'être un modèle (les deux premières concernent les limites inductives et la troisième les limites projectives) :

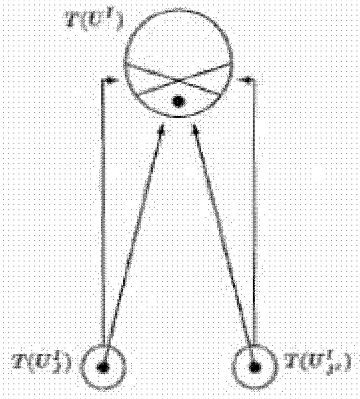
Erreur 1 Il se peut pour un cône inductif de S que l'image de son sommet par T ne soit pas entièrement "remplie" par la base. C'est-à-dire il existe $I = (U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I)_{J \in \underline{J}^I} \in \mathbb{I}$ tel que $\varinjlim_{J \in \underline{J}^I} T(U^I_J) \neq T(U^I)$ parce que la famille $T(\alpha^I_J)$ n'est pas *collectivement surjective*, i.e. $\bigcup_{J \in \underline{J}^I} T(\alpha^I_J)(T(U^I_J)) \subsetneq T(U^I)$



Les $T(U^I_J)$

Erreur 2 Il se peut pour un cône inductif distingué de S que dans l'image de son sommet par T deux points de la base s'identifient sans que dans la base il y ait un zig-zag qui les lie.

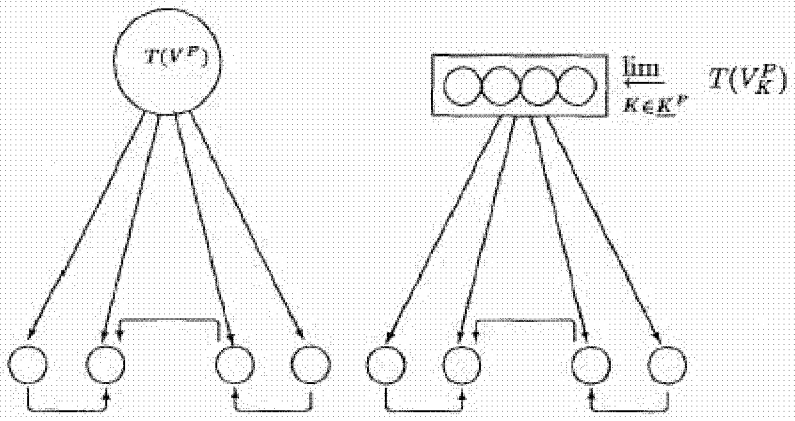
C'est-à-dire il existe $I = (U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I)_{J \in \underline{J}^I} \in \mathbb{I}$ tel que $\varinjlim_{J \in \underline{J}^I} T(U^I_J) \neq T(U^I)$ parce que $\exists J, J' \in \underline{J}^I$, $\exists x_J \in T(U^I_J)$, $\exists x_{J'} \in T(U^I_{J'})$ tels que $T(\alpha^I_J)(x_J) = T(\alpha^I_{J'})(x_{J'})$ mais il n'y a pas de zig-zag entre J et J' dans $\underline{J}^I$ qui lie x_J à $x_{J'}$.



Erreur 3 Il existe $P = (V^P \xrightarrow{\beta^P_K} V^P_K)_{K \in \underline{K}^P} \in \mathbb{P}$ tel que $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} T(V^P_K) \neq T(V^P)$, c'est-à-dire que

a) ou bien $T(V^P) \longrightarrow \varprojlim_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P)$ est non surjective.

b) ou bien $T(V^P) \longrightarrow \varprojlim_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P)$ est non injective.



Nous allons "réparer" ces trois types d'erreurs par saturation :

Erreur 1 Pour tout cône inductif $I \in \mathbb{I}$, nous allons départager la partie de $T(U^I)$ qui n'est pas "remplie" par la base et nous allons "verser" cette répartition sur la base : pour tout $I \in \mathbb{I}$ et $J \in \underline{J}^I$ nous ajouterons un ensemble $\lambda^I(J)$ à $T(U_J^I)$ tel que nous ayons $\bigcup_{J \in \underline{J}^I} \lambda^I(J) = T^I$ avec

$$T^I = T(U^I) \setminus [\bigcup_{J \in \underline{J}^I} T(\alpha_J^I)(T(U_J^I))].$$

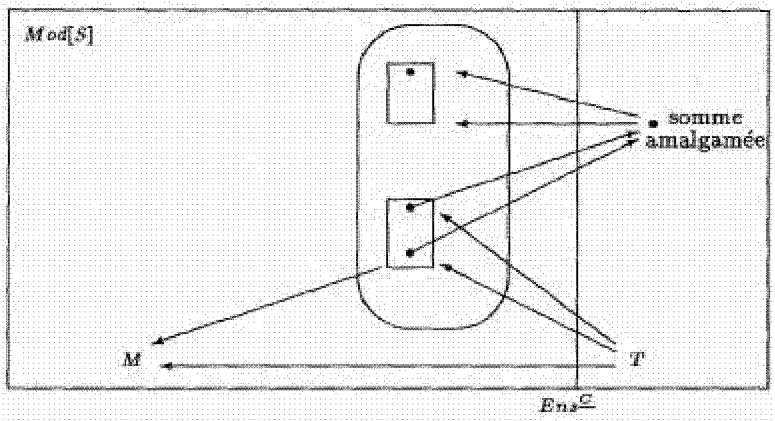
Comme le cône distingué I est plongé dans $\underline{C}$ dans un environnement, nous devons ajouter $\lambda^I(J)$ également à $T(W)$ pour toute flèche $U_J^I \longrightarrow W \in Fl\underline{C}$ et tout objet $W \in Ob\underline{C}$. Les $\lambda^I(J)$ sont donc le résultat d'une partition de T^I. Mais rien n'assure qu'il existe une sorte de répartition canonique unique. C'est-à-dire qu'il y aura une ambiguïté dans la détermination des $\lambda^I(J)$. La tâche de la construction effective du *d.l.l.* sera de mesurer cette ambiguïté.

Erreur 2 Cette erreur est due au fait que dans la base il y a "trop peu" de zig-zags susceptibles de combiner des points qui sont identifiés dans le sommet. Pour tout $I \in \mathbb{I}$ et $J \in \underline{J}^I$ nous ajoutons donc un ensemble $\vartheta^I(J)$ à $T(U_J^I)$ qui consiste en des "maillons manquants". Ces "maillons manquants" seront précisés plus tard. Comme pour l'erreur 1, nous devons ajouter $\vartheta^I(J)$ également à $T(W)$ pour toute flèche $U_J^I \longrightarrow W \in Fl\underline{C}$ et tout objet $W \in Ob\underline{C}$. Comme pour l'erreur 1, il y aura une ambiguïté dans la détermination des $\vartheta^I(J)$ ce que nous allons essayer de mesurer dans le *d.l.l.*

Erreur 3 Afin de réparer ce troisième type d'erreur, nous allons ajouter à $T(V^P)$ $(P \in \mathbb{P})$ une partie convenable $\psi^P \subseteq \prod_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P)$ qui sera précisée ultérieurement. Comme le cône distingué P est plongé dans $\underline{C}$ dans un environnement, nous devons ajouter ψ^P également à $T(W)$ pour toute flèche $V^P \longrightarrow W \in Fl\underline{C}$ et tout objet $W \in Ob\underline{C}$. En réalité, la réparation ne sera effectuée que par des ajouts (visant l'erreur 3 a)) et un passage au quotient ultérieur (visant l'erreur 3 b)).

Nous effectuons simultanément toutes ces saturations sur T. Mais comme les différents cônes distingués de S peuvent être entremêlés, il est possible qu'une saturation anéantisse les effets d'une autre. Le

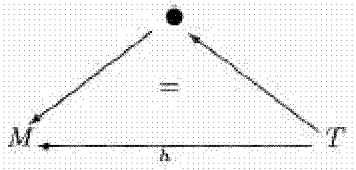
"nouveau" T est donc susceptible de contenir les erreurs 1, 2 et 3 à nouveau. Pour cela nous allons répéter la procédure de saturation pour "ce nouveau" T etc. Autrement dit nous allons répéter ce procédé à l'infini par induction. Nous obtenons ainsi les foncteurs T_n ($n \in \mathbb{N}$). Nous poserons ensuite $T_\infty = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ et quotienterons T_∞ par une relation d'équivalence convenable $\approx g$ qui fera de T_∞ un modèle. L'ensemble $Solmod(T) = \{T_\infty/_{\approx g}\}$ de tous ces modèles ne sera pas encore le *d.l.l.* de T, parce que l'ensemble $Solmod(T)$ ne permet pas de combiner les différents modèles par zig-zags. Afin d'obtenir ces zig-zags entre modèles, nous allons procéder de la manière suivante :
Nous considérons les éléments de $Solmod(T)$ par paires de deux. La somme amalgamée de deux modèles ne sera pas nécessairement un modèle, mais elle est susceptible d'engendrer un autre ensemble de modèles selon le procédé que nous venons de décrire. Nous allons assembler tous ces ensembles de modèles avec $Solmod(T)$ et nous allons définir des flèches formelles qui pointent à partir de deux éléments de $Solmod(T)$ en passant par leur somme amalgamée vers un point de l'ensemble de modèles de cette somme amalgamée.



Après avoir joint tous ces ensembles de modèles ensemble, nous allons recommencer cette procédure de formation de sommes amalgamées ainsi de suite. Autrement dit nous allons répéter ce procédé de formation de sommes amalgamées à l'infini par induction. Ceci nous conduira au *d.l.l.*.

2.2 LA CONSTRUCTION EFFECTIVE DU D.L.L.

La construction qui va suivre est effective, mais malheureusement peu intelligible quant à ses choix et ses définitions, parce que l'ordre qu'a pris l'intuition est différent de celui d'une représentation écrite. L'intuition est partie d'un morphisme $h : T \longrightarrow M$ de T vers un modèle M de S, afin de construire une factorisation - factorisation qui est obtenue à partir de T en réparant de façon itérée les erreurs 1, 2 et 3 :



Dans l'approche intuitive c'est seulement après la construction de cette factorisation que l'on essaie de décrire l'ensemble des factorisations possibles, tandis que dans la représentation écrite on introduit brutalement dès le début des ensembles (qui semblent être arbitraires et peu intelligibles) pour montrer ensuite qu'ils fournissent des factorisations.
A cause de ces considérations nous proposons au lecteur d'admettre la construction du *d.l.l.*, de se rapporter directement à la section 2.3 et de revenir successivement à la section 2.2 . C'est dans ce "va-

et-vient" que la lecture du chapitre 2 nous semble être la plus profitable.
J.Bénabou nous a signalé que le lemme suivant permet en théorie d'éliminer le foncteur T :

Lemme : Soit $S = (\underline{C}, I\!I, I\!P)$ une esquisse mixte et $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ un foncteur. Alors il existe une esquisse $S[T]$ telle que $Mod[S[T]] \cong T \downarrow Mod[S]$

En effet, la recherche d'un petit *d.l.i.* sur T se ramène alors à la recherche d'un foncteur cofinal $\underline{A} \longrightarrow Mod[S[T]]$ de source une petite catégorie $\underline{A}$.
Dans ce qui suit, quitte à remplacer S par $S[T]$, le lecteur pourrait, du moins dans la première étape de la construction (passage de T à T_1), raisonner comme si l'on avait $T = \emptyset$.

2.2.1 Construction de l'ensemble des factorisations au-dessus de T

La construction de cette sous-section concerne la première condition du *d.l.i.* Pour tout $n \in I\!N$ construisons par récurrence des foncteurs $T_n : \underline{C} \longrightarrow Ens$ réparant sur T les erreurs 1, 2 et 3 et des ensembles Γ_n, Δ_n qui mesurent l'ambiguïté de ces réparations.

La première étape de la récurrence

Pour $n = 0$ Posons $T_0 = T$. Indiquons ensuite les définitions qui sont essentielles pour la réparation des "erreurs 1, 2 et 3".

Erreur 1 Pour $I \in I\!I$ soit $T_0^I = T_0(U^I) \setminus [\bigcup_{J \in \underline{J}^I} T_0(\alpha_J^I)(T_0(U_J^I))]$ et

$\Lambda(\underline{J}^I, T_0^I) = \{\lambda_0^I : Ob\underline{J}^I \longrightarrow \mathcal{P}(T_0^I) / \lambda_0^I \text{est une application et } \bigcup_{J \in \underline{J}^I} \lambda_0^I(J) = T_0^I\}$

$\Lambda(\underline{J}^I, T_0^I)$ décrit l'ensemble des distributions de T_0^I.

Erreur 2 Pour cette erreur il s'agit donc de compléter les "zig-zags manquants". Sans nuire à la généralité nous pouvons nous restreindre à deux types de zig-zags dans $Fl\underline{J}^I$ (pour tout cône inductif I de $I\!I$) :

$$\begin{array}{ccccc} J' & \xleftarrow{\gamma} & J & \xrightarrow{\delta} & J'' \\ J' & \longrightarrow & J & \longleftarrow & J'' \end{array}$$

Le deuxième zig-zag ne présente pas de problème de "maillon manquant", comme nous allons voir dans la section 2.3. Pour réparer l'erreur 2 nous allons donc surtout nous occuper des zig-zags du type $J' \xleftarrow{\gamma} J \xrightarrow{\delta} J''$. Définissons :

$$\Theta_0^{\gamma,\delta}(J) = \{(x_{J'}, x_{J''}) \in T_0(U_{J'}^I) \times T_0(U_{J''}^I) / \forall x_J \in T_0(U_J^I) : T_0(\gamma)(x_J) \neq x_{J'} \text{ et } T_0(\delta)(x_J) \neq x_{J''}\}$$

$$\Theta_0^I(J) = \coprod_{\gamma,\delta} \Theta_0^{\gamma,\delta}(J) \quad \text{et} \quad \Theta_0^I = \coprod_{J \in \underline{J}^I} \Theta_0^I(J).$$

Nous pouvons mesurer l'effort de réparer l'erreur 2 par l'ensemble suivant :
$\Theta(\underline{J}^I, T_0) = \{\vartheta_0^I : Ob\underline{J}^I \longrightarrow \mathcal{P}(\Theta_0^I); / \vartheta_0^I \text{ est une application et } \forall J \in \underline{J}^I : \vartheta_0^I(J) \subseteq \Theta_0^I(J)\}$

Erreur 3 La mesure de la correction de l'erreur 3 peut être définie par

$$\Psi(\underline{K}^P, T_0) = \mathcal{P}(\prod_{K \in \underline{K}^P} T_0(V_K^P))$$

En rassemblant tous ces ensembles, nous pouvons définir

$$\Delta_0 = \Gamma_0 = \coprod_{I \in I\!I} \Lambda(\underline{J}^I, T_0^I) \times \prod_{I \in I\!I} \Theta(\underline{J}^I, T_0) \times \prod_{P \in I\!P} \Psi(\underline{K}^P, T_0).$$

Pour $n = 1$ Choisissons $(\lambda_0, \vartheta_0, \psi_0) = ((\lambda_0^I)_{I\in\mathbb{I}}, (\vartheta_0^I)_{I\in\mathbb{I}}, (\psi_0^P)_{P\in\mathbb{P}}) \in \Gamma_0 = \Delta_0$.
Nous pouvons ainsi définir le foncteur $T_1 = T_1(\lambda_0, \vartheta_0, \psi_0)$ de la façon suivante :

$$
\begin{array}{lcll}
T_1(\lambda_0,\vartheta_0,\psi_0): & \underline{C} & \longrightarrow & Ens \\
& Ob\underline{C} & \longrightarrow & ObEns \\
& W & \longmapsto & T_0(W) + \coprod_{I\in\mathbb{I}} \coprod_{J\in\underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \lambda_0^I(J) \qquad (erreur1) \\
& & & \quad + \coprod_{I\in\mathbb{I}} \coprod_{J\in\underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \vartheta_0^I(J) \qquad (erreur2) \\
& & & \quad + \coprod_{P\in\mathbb{P}} Hom_{\underline{C}}(V^P, W) \times \psi_0^P \qquad (erreur3) \\
& Fl\underline{C} & \longrightarrow & FlEns \\
& (W \xrightarrow{\varepsilon} W') & \longmapsto & (T_1(\lambda_0,\vartheta_0,\psi_0)(W) \xrightarrow{T_1(\varepsilon)} T_1(\lambda_0,\vartheta_0,\psi_0)(W'))
\end{array}
$$

$T_1(\varepsilon)$est défini par morceaux :

$$
\begin{array}{ccc}
T_0(W) & \xrightarrow{T_0(\varepsilon)} & T_0(W') \\
Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \lambda_0^I(J) & \longrightarrow & Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W') \times \lambda_0^I(J) \\
(U_J^I \xrightarrow{\theta} W, x) & \longmapsto & (U_J^I \xrightarrow{\theta} W \xrightarrow{\varepsilon} W', x) \\
Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \vartheta_0^I(J) & \longrightarrow & Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W') \times \vartheta_0^I(J) \\
(U_J^I \xrightarrow{\theta} W, x) & \longmapsto & (U_J^I \xrightarrow{\theta} W \xrightarrow{\varepsilon} W', x) \\
Hom_{\underline{C}}(V^P, W) \times \psi_0^P & \longrightarrow & Hom_{\underline{C}}(V^P, W') \times \psi_0^P \\
(V^P \xrightarrow{\theta} W, x) & \longmapsto & (V^P \xrightarrow{\theta} W \xrightarrow{\varepsilon} W', x)
\end{array}
$$

Il est facile de voir que T_1 est un foncteur. Malheureusement T_1 peut contenir de nouveau les erreurs 1,2 et 3. Pour cela recommençons la procédure :

Erreur 1 Pour tout $I \in \mathbb{I}$ soit $T_1^I = T_1(U_J^I) \setminus [\bigcup_{J\in\underline{J}^I} T_1(\alpha_J^I)(T_1(U_J^I))]$ et

$$\Lambda(\underline{J}^I, T_1^I) = \{\lambda_1^I : Ob\underline{J}^I \longrightarrow \mathcal{P}(T_1^I)/\lambda_1^I \text{ est une application et } \bigcup_{J\in\underline{J}^I} \lambda_1^I(J) = T_1^I\}$$

Erreur 2 Pour tout $I \in \mathbb{I}$ et $J \in \underline{J}^I$ nous considérons dans $Fl\underline{J}^I$ le zig-zag $J' \xleftarrow{\gamma} J \xrightarrow{\delta} J''$
Définissons :

$$\Theta_1^{\gamma,\delta}(J) = \{(x_{J'}, x_{J''}) \in T_1(U_{J'}^I) \times T_1(U_{J''}^I)/\forall x_J \in T_1(U_J^I) : T_1(\gamma)(x_J) \neq x_{J'} \text{ et } T_1(\delta)(x_J) \neq x_{J''}\}$$

$$\Theta_1^I(J) = \coprod_{\gamma,\delta} \Theta_1^{\gamma,\delta}(J) \text{ et } \Theta_1^I = \coprod_{J\in\underline{J}^I} \Theta_1^I(J).$$

Comme pour l'étape précédente nous définissons
$\Theta(\underline{J}^I, T_1) = \{\vartheta_1^I : Ob\underline{J}^I \longrightarrow \mathcal{P}(\Theta_1^I)/\vartheta_1^I \text{ est une application et } \forall J \in \underline{J}^I : \vartheta_1^I(J) \subseteq \Theta_1^I(J)\}$.

Erreur 3 Pour tout cône projectif distingué $P \in \mathbb{P}$ nous définissons :

$$\Psi(\underline{K}^P, T_1) = \mathcal{P}(\prod_{K\in\underline{K}^P} T_1(V_K^P)).$$

En rassemblant tous ces ensembles nous obtenons comme une mesure de l'ambiguïté :

$$\Gamma_1 = \Gamma_1(\lambda_0, \vartheta_0, \psi_0) = \prod_{I\in\mathbb{I}} \Lambda(\underline{J}^I, T_1^I) \times \prod_{I\in\mathbb{I}} \Theta(\underline{J}^I, T_1) \times \prod_{P\in\mathbb{P}} \Psi(\underline{K}^P, T_1) \text{ et}$$

$$\Delta_1 = \coprod_{(\lambda_0,\vartheta_0,\psi_0)\in\Delta_0} \Gamma_1(\lambda_0, \vartheta_0, \psi_0).$$

L'hypothèse de la récurrence

Supposons que $\Delta_0, \ldots, \Delta_n$; $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$ et les foncteurs $T_0, \ldots, T_n$ sont déjà définis tels que

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \coprod_{(\lambda_{n-1},\vartheta_{n-1},\psi_{n-1})\in\Delta_{n-1}} \Gamma_n(\lambda_{n-1},\vartheta_{n-1},\psi_{n-1}),\\
\Gamma_n &= \Gamma_n(\lambda_{n-1},\vartheta_{n-1},\psi_{n-1}) = \prod_{I\in\mathbb{I}} \Lambda(\underline{J}^I, T_n^I) \times \prod_{I\in\mathbb{I}} \Theta(\underline{J}^I, T_n) \times \prod_{P\in\mathbb{P}} \Psi(\underline{K}^P, T_n),\\
\Psi(\underline{K}^P, T_n) &= \mathcal{P}(\coprod_{K\in\underline{K}^P} T_n(V_K^P)),\\
\Theta(\underline{J}^I, T_n) &= \{\vartheta_n^I : \underline{J}^I \longrightarrow \mathcal{P}(\Theta_n^I)/\vartheta_n^I \text{ est une application et } \forall J\in\underline{J}^I : \vartheta_n^I(J)\subseteq\Theta_n^I(J)\}
\end{aligned}$$

avec $\Theta_n^I(J) = \coprod_{\gamma,\delta}\Theta_n^{\gamma,\delta}(J)$ et $\Theta_n^I = \bigcup_{J\in\underline{J}^I}\Theta_n^I(J)$ et

$$\Theta_n^{\gamma,\delta}(J) = \{(x_{J'}, x_{J''})\in T_n(U_{J''}^I)/\forall x_J\in T_n(U_J^I) : T_n(\gamma)(x_J)\neq x_{J'} \text{ et } T_n(\gamma)(x_J)\neq x''_J\}.$$

Pour tout $J' \xleftarrow{\gamma} J \xrightarrow{\delta} J''$ et tout $J\in\underline{J}^I$:

$$\Lambda(\underline{J}^I, T_n^I) = \{\lambda_n^I : Ob\underline{J}^I \longrightarrow \mathcal{P}(T_n^I)/\lambda_n^I \text{ est une application et } \bigcup_{J\in\underline{J}^I}\lambda_n^I(J) = T_n^I\} \text{ avec}$$

$$T_n^I = T_n^I(\lambda_{n-1},\vartheta_{n-1},\psi_{n-1}) = T_n(U^I)\setminus[\bigcup_{J\in\underline{J}^I} T_n(\alpha_J^I)(T_n(U_J^I))].$$

Finalement le foncteur $T_n = T_n(\lambda_{n-1},\vartheta_{n-1},\psi_{n-1})$ dépend du choix de l'élément $(\lambda_{n-1},\vartheta_{n-1},\psi_{n-1})\in\Delta_{n-1}$.

Le pas de la récurrence

Choisissons $(\lambda_n,\vartheta_n,\psi_n) = ((\lambda_n^I)_{I\in\mathbb{I}}, (\vartheta_n^I)_{I\in\mathbb{I}}, (\psi_n^P)_{P\in\mathbb{P}})\in\Delta_n$, c'est-à-dire nous choisissons $(\lambda_{n-1},\vartheta_{n-1},\psi_{n-1})\in\Delta_{n-1}$ et $(\lambda_n,\vartheta_n,\psi_n)\in\Delta_n$.
Nous pouvons définir de façon analogue un foncteur $T_{n+1} = T_{n+1}(\lambda_n,\vartheta_n,\psi_n)$:

$$\begin{array}{rccll}
T_{n+1} : & \underline{C} & \longrightarrow & Ens & \\
 & Ob\underline{C} & \longrightarrow & ObEns & \\
 & W & \longmapsto & T_n(W) + \coprod_{I\in\mathbb{I}}\coprod_{J\in\underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W)\times\lambda_n^I(J) & (erreur1)\\
 & & & \quad + \coprod_{I\in\mathbb{I}}\coprod_{J\in\underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W)\times\vartheta_n^I(J) & (erreur2)\\
 & & & \quad + \coprod_{P\in\mathbb{P}} Hom_{\underline{C}}(V^P, W)\times\psi_n^P & (erreur3)\\
 & Fl\underline{C} & \longrightarrow & FlEns & \\
 & (W\xrightarrow{\varepsilon}W') & \longmapsto & (T_{n+1}(\lambda_n,\vartheta_n,\psi_n)(W) \xrightarrow{T_{n+1}(\varepsilon)} T_{n+1}(\lambda_n,\vartheta_n,\psi_n)(W')) &
\end{array}$$

$T_{n+1}(\varepsilon)$ est défini par morceau de façon analogue que $T_1(\varepsilon)$. De nouveau il est facile de montrer que T_{n+1} est un foncteur.

Erreur 1 Pour tout $I\in\mathbb{I}$ soit $T_{n+1}^I = T_{n+1}(U^I)\setminus[\bigcup_{J\in\underline{J}^I} T_{n+1}(\alpha_J^I)(T_{n+1}(U_J^I))]$ et

$$\Lambda(\underline{J}^I, T_{n+1}^I) = \{\lambda_{n+1}^I : Ob\underline{J}^I \longrightarrow \mathcal{P}(T_{n+1}^I)/\lambda_{n+1}^I \text{ est une application et } \bigcup_{J\in\underline{J}^I}\lambda_{n+1}^I(J) = T_{n+1}^I\}$$

Erreur 2 Pour tout $I\in\mathbb{I}$ et $J\in\underline{J}^I$ nous considérons dans $Fl\underline{J}^I$ le zig-zag $J' \xleftarrow{\gamma} J \xrightarrow{\delta} J''$
Définissons :

$$\Theta^{\gamma,\delta}_{n+1}(J) = \{(x_{J'}, x_{J''}) \in T_{n+1}(U^I_{J'}) \times T_{n+1}(U^I_{J''})/\ \forall x_J \in T_{n+1}(U^I_J) : T_{n+1}(\gamma)(x_J) \neq x_{J'} \quad \text{et} \quad T_{n+1}(\delta)(x_J) \neq x_{J''}\}$$

$$\Theta^I_{n+1}(J) = \coprod_{\gamma,\delta} \Theta^{\gamma,\delta}_{n+1}(J) \quad \text{et} \quad \Theta^I_{n+1} = \coprod_{J \in \underline{J}^I} \Theta^I_{n+1}(J).$$

Comme pour l'étape précédente nous définissons
$\Theta(\underline{J}^I, T_{n+1}) = \{\vartheta^I_{n+1} : Ob\underline{J}^I \longrightarrow \mathcal{P}(\Theta^I_{n+1})/\ \vartheta^I_{n+1}$ est une application et $\forall J \in \underline{J}^I : \vartheta^I_{n+1}(J) \subseteq \Theta^I_{n+1}(J)\}$.

Erreur 3 Pour tout cône projectif distingué $P \in \mathbb{P}$ nous définissons :

$$\Psi(\underline{K}^P, T_{n+1}) = \mathcal{P}(\coprod_{K \in \underline{K}^P} T_{n+1}(V^P_K)).$$

En rassemblant tous ces ensembles nous obtenons comme une mesure de l'ambiguïté :

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_{n+1}(\lambda_n, \vartheta_n, \psi_n) = \prod_{I \in \mathbb{I}} \Lambda(\underline{J}^I, T^I_{n+1}) \times \prod_{I \in \mathbb{I}} \Theta(\underline{J}^I, T_{n+1}) \times \prod_{P \in \mathbb{P}} \Psi(\underline{K}^P, T_{n+1}) \quad \text{et}$$

$$\Delta_{n+1} = \coprod_{(\lambda_n, \vartheta_n, \psi_n) \in \Delta_n} \Gamma_{n+1}(\lambda_n, \vartheta_n, \psi_n).$$

C'est ici que finit la construction par récurrence.

Vers l'ensemble des factorisations au-dessus de T

Afin de construire une mesure globale d'ambiguïté, définissons :
$\Delta_\infty \stackrel{def}{=} \{\text{applications } \rho : \mathbb{N} \longrightarrow \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n / \ \forall n \in \mathbb{N} : \rho(n) \in \Delta_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* : \rho(n) \in \Gamma_n(\rho(n-1))\}$.
Cette définition de Δ_∞ est préférable à $\coprod_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$, parce que définir Δ_∞ comme $\coprod_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ ne prend pas en compte le fait que chaque Δ_{n+1} dépend de Δ_n. Ensuite nous devons construire un foncteur T_∞ qui unifie les T_n $(n \in \mathbb{N})$. Pour tout $\rho \in \Delta_\infty$ nous posons :

$$T_\infty = T_\infty(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} T_0 + \coprod_{n \in \mathbb{N}^*} T_n(\rho(n-1)).$$

Nous disposons d'une transformation naturelle canonique $T = T_0 \rightarrowtail T_\infty(\rho)$.
Le foncteur T_∞ n'est pas nécessairement un modèle. Nous allons essayer de quotienter T_∞ par une relation d'équivalence convenable. Pour cela nous devons établir quelques considérations sur les relations d'équivalence. Soit H un foncteur $\underline{C} \longrightarrow Ens$. Nous pouvons définir deux types de relations d'équivalence :

1. Pour tout foncteur $H' \in ObEns^{\underline{C}}$, toute transformation naturelle $g : H \longrightarrow H' \in Fl Ens^{\underline{C}}$ et tout objet $W \in Ob\underline{C}$ nous avons une relation d'équivalence sur $H(W)$:

$$\forall x, y \in H(W) : \quad x \approx_{g(W)} y \ \underline{\text{ssi}}\ g(W)(x) = g(W)(y)$$

2. Nous pouvons ensuite construire une relation d'équivalence sur la classe suivante :

$$Hom_{Ens^{\underline{C}}}(H, -) = \{g : H \longrightarrow H'/H' \in ObEns^{\underline{C}}, g \in Hom_{Ens^{\underline{C}}}(H, H')\}$$

Deux transformations naturelles $g_1 : H \longrightarrow H_1$ et $g_2 : H \longrightarrow H_2$ sont équivalentes (notons $g_1 \approx g_2$) <u>si et seulement si</u> pour tout $W \in \underline{C}$, pour tout $x, y \in H(W)$:

$$g_1(W)(x) = g_1(W)(y) \Leftrightarrow g_2(W)(x) = g_2(W)(y).$$

Pour une transformation naturelle $g : H \longrightarrow H'$ le premier type de relation d'équivalence fournit en particulier le foncteur suivant :

$$\begin{array}{rccl} H/_{\approx g} : & \underline{C} & \longrightarrow & Ens \\ & Ob\underline{C} & \longrightarrow & ObEns \\ & W & \longmapsto & H(W)/_{\approx g(W)} \\ & Fl\underline{C} & \longrightarrow & FlEns \\ & (W \xrightarrow{\varepsilon} W') & \longmapsto & (H(W)/_{\approx g(W)} \longrightarrow H(W')/_{\approx g(W')}) \\ & & & x/_{\approx g(W)} \longmapsto H(\varepsilon)(x)/_{\approx g(W')} \end{array}$$

Il est facile de voir que $H/_{\approx g}$ est un foncteur, c'est-à-dire que l'implication suivante est valable :

$$g(W)(x) = g(W)(y) \Longrightarrow g(W')(H(\varepsilon)(x)) = g(W')(H(\varepsilon)(y)).$$

Ces considérations serviront à trouver des relations d'équivalence convenables qui transforment T_∞ en un modèle. Pour $\rho \in \Delta_\infty$ définissons la classe :

$$\begin{aligned} \Sigma = \Sigma(\rho) = \Sigma(T,\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \{\ g : T_\infty(\rho) \longrightarrow H/ \quad & H \in ObMod[S], \\ \text{pour tout } I \in \mathbb{I} : \varinjlim_{J \in \underline{J}^I} & T_\infty(U^I_J)/_{\approx g(U^I_J)} = T_\infty(U^I)/_{\approx g(U^I)}, \\ \text{pour tout } P \in \mathbb{P} : \varprojlim_{K \in \underline{K}^P} & T_\infty(V^P_K)/_{\approx g(U^P_K)} = T_\infty(V^P)/_{\approx g(V^P)}\} \end{aligned}$$

Dans cette classe nous trouvons toutes les transformations naturelles de $T_\infty(\rho)$ vers un modèle H de S qui fournissent une relation d'équivalence transformant T_∞ en un modèle de S. La classe Σ devient un ensemble si nous la quotientons par la relation d'équivalence "$\approx$"(voir plus haut) :

$$\Omega = \Omega(\rho) = \Omega(T,\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma(T,\rho)/_{\approx}$$

($\Sigma(T,\rho)$ est une sous-classe de la classe $Hom_{Ens^{\underline{C}}}(T_\infty(\rho), -)$).
Ω est un ensemble parce que $\Omega \simeq \{\text{vrai}, \text{faux}\}^Q$, où Q est l'ensemble des triplets (W, x, y) avec $W \in \underline{C}$, $x, y \in T_\infty(\rho)(W)$. Maintenant nous pouvons définir "l'ensemble des factorisations" de T par :

$$\{T_\infty(\rho)/_{\approx g} \in Mod[S] \mid (\rho, g/_{\approx}) \in \Xi(T)\}$$

$$\text{avec l'ensemble subordonné } \Xi(T) \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_{\rho \in \Delta_\infty} \Omega(T,\rho).$$

Il y a donc un foncteur (ou plutôt une application) :

$$\begin{array}{rccl} D : & \Xi(T) & \longrightarrow & Mod[S] \\ & (\rho, g/_{\approx}) & \longmapsto & T_\infty(\rho)/_{\approx g} \end{array}$$

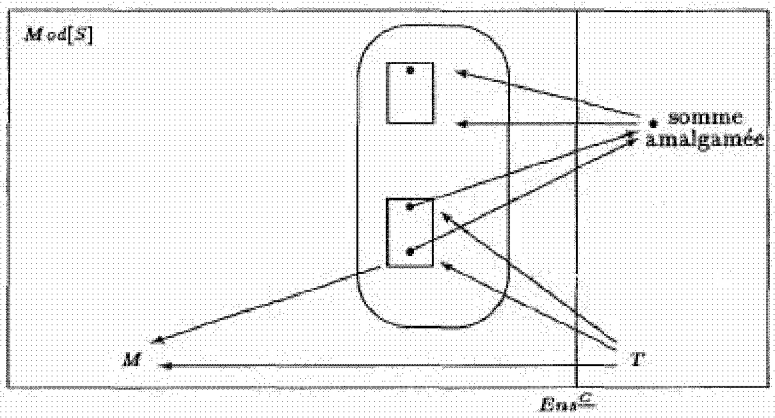
et de plus un cône projectif dans $Ens^{\underline{C}}$:

$$d = (d_{(\rho, g/_{\approx})} : T \rightarrowtail T_\infty(\rho) \longrightarrow T_\infty(\rho)/_{\approx g})_{(\rho, g/_{\approx}) \in \Xi(T)}.$$

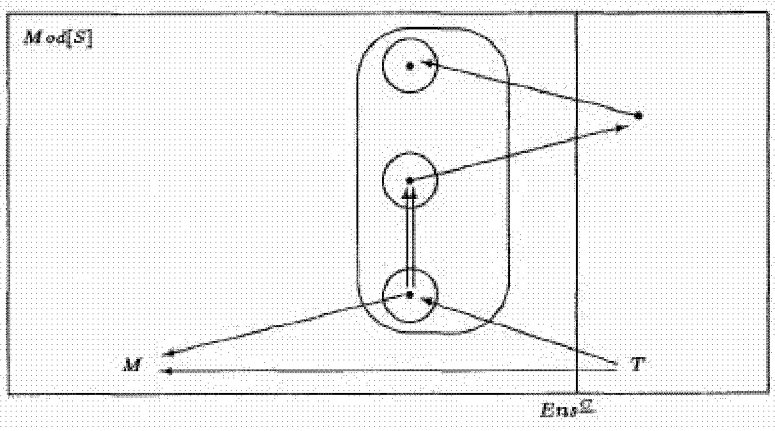
Comme il a été suggéré dans la section 2.1, $(\Xi(T), D, d)$ ne fournit pas encore un *d.l.l.* de T, parce que la "deuxième condition" d'un *d.l.l.* n'est pas encore satisfaite, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de possibilité de combiner les $T_\infty(\rho)/_{\approx g}$ par des zig-zags. A ce stade $(\Xi(T), D, d)$ est seulement un "ensemble de solutions"(solution set).

2.2.2 Des zig-zags pour combiner des modèles au-dessus de T

Afin d'obtenir des zig-zags entre modèles, nous pouvons procéder de la façon suivante (voir aussi section 2.1). Nous allons considérer les éléments de "l'ensemble des factorisations" de T par paires de deux. La somme amalgamée de deux modèles ne sera pas nécessairement un modèle, mais elle est susceptible d'engendrer un autre "ensemble de factorisations". Nous ajouterons tous ces "ensembles de factorisations" avec $\{T_\infty(\rho)/_{\approx_g} \in Mod[S] \mid (\rho, g/_\approx) \in \Xi(T)\}$ et nous considérerons comme premières flèches celles qui pointent à partir de deux éléments de $\{T_\infty(\rho)/_{\approx_g} \in Mod[S] \mid (\rho, g/_\approx) \in \Xi(T)\}$ en passant par leur somme amalgamée vers un élément de "l'ensemble des factorisations" de cette somme amalgamée.



Après avoir joint tous ces ensembles de factorisations dans un "grand" ensemble, nous allons recommencer cette procédure de formation de sommes amalgamées etc. Autrement dit nous répéterons ce procédé de formation de sommes amalgamées à l'infini par induction. Ceci nous conduit au *d.l.l.*. Mais nous souhaitons non seulement construire un *d.l.l.*, mais aussi un *d.l.l.r.f.* L'idée qui s'impose est d'introduire parallèlement à la formation des sommes amalgamées une construction de coégalisateurs. Cette idée est résumée dans la figure suivante :



Ceci nous conduira au *d.l.l.r.f.* Pour cette raison nous développons un procédé par récurrence qui traite à chaque étape :

- la saturation par "sommes amalgamées"
- la saturation par "coégalisateurs"

- la construction de "la catégorie librement engendrée"[2]
  (pour tout $n \in \mathbb{N}$ on construit des n-concaténations sur les flèches qui sont dégagées par les sommes amalgamées et les coégalisateurs.)

Pour cela nous allons construire par récurrence

- des graphes $\mathcal{M}_n$ et $\mathcal{R}_n$ $(n \in \mathbb{N})$
- des morphismes de graphes $D_n : \mathcal{M}_n \longrightarrow Mod[S]$ $(n \in \mathbb{N})$
- des cônes projectifs dans $Ens^{\underline{C}}$ $d_n = (d^n_\tau : T \longrightarrow D_n(\tau))_{\tau \in Ob\mathcal{M}_n}$.

Mais avant d'amorcer la construction, simplifions les notations :
Pour tout foncteur $H : \underline{C} \longrightarrow Ens$ et tout $\sigma = (\rho, g/_\approx) \in \Xi(H)$ (où $\Xi(H)$ est l'ensemble subordonné de l'ensemble des factorisations de H) nous posons $H[\sigma] \stackrel{\text{def}}{=} H_\infty(\rho)/_{\approx g}$ (si $\Xi(H) = \emptyset$, alors $H[\sigma]$ n'est pas défini bien sûr).

Les graphes $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$

Pour $n = 0$. Définissons les graphes $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(T) = \mathcal{M}_0(T, S)$ et $\mathcal{R}_0$ par :

$Ob\mathcal{R}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(T)$
$Ob\mathcal{M}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(T)$
$Fl\mathcal{R}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$
$Fl\mathcal{M}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\prec \tau \succ /\tau \in \Xi(T), \prec \tau \succ$ est un chemin de longueur $0\}$,
le morphisme de graphes D_0 par :

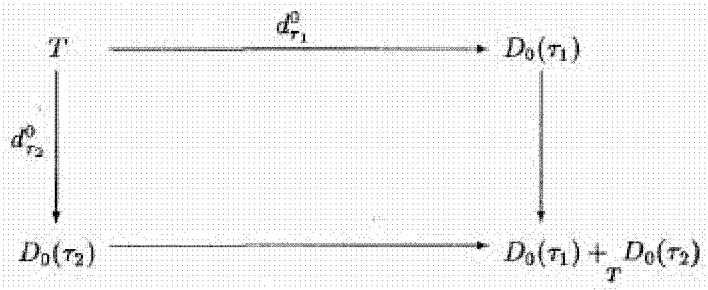
$$\begin{array}{rccc} D_0 : & \mathcal{M}_0 & \longrightarrow & Mod[S] \\ & \tau = (\rho, g/_\approx) & \longmapsto & T[\tau] = T_\infty(\rho)/_{\approx g} \\ & \prec \tau \succ & \longmapsto & (T[\tau] \xrightarrow{id} T[\tau]) \end{array}$$

et le cône projectif d_0 dans $Ens^{\underline{C}}$ par :

$$d_0 : (d^0_\tau : T \longrightarrow D_0(\tau) = T[\tau])_{\tau \in Ob\mathcal{M}_0}.$$

Définissons encore une composition sur $Fl\mathcal{M}_0$ qui consiste à concaténer $\prec \tau \succ$ et $\prec \sigma \succ$ lorsque $\tau = \sigma$.

Pour $n = 1$. Choisissons ensuite $\tau_1, \tau_2 \in Ob\mathcal{M}_0$. Nous pouvons construire la somme amalgamée suivante dans



[2] voir S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, p. 50

$D_0(\tau_1)+_T D_0(\tau_2)$ n'est pas forcément un modèle de S, mais nous pouvons considérer "l'ensemble des factorisations" $\Xi(D_0(\tau_1)+_T D_0(\tau_2))$. De même nous pouvons construire dans $Ens^{\mathcal{C}}$ le coégalisateur :

$$D_0(\tau) \underset{id_{D_0(\tau)}}{\overset{id_{D_0(\tau)}}{\rightrightarrows}} D_0(\tau) \longrightarrow Coeq(id_{D_0(\tau)}, id_{D_0(\tau)}).$$

$Coeq(id_{D_0(\tau)}, id_{D_0(\tau)})$ est bien sûr isomorphe à $D_0(\tau)$ (nous mentionnons ce cas quand-même pour des raisons formelles).
Définissons maintenant les graphes $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{R}_1$:

$$\begin{array}{lcl} Ob\mathcal{M}_1 & \overset{\text{def}}{=} & Ob\mathcal{M}_0 \;+\; Ob\mathcal{R}_1 \text{ avec} \\ Ob\mathcal{R}_1 & \overset{\text{def}}{=} & \coprod_{(\tau_1,\tau_2)\in Ob\mathcal{M}_0\times Ob\mathcal{M}_0} \Xi(D_0(\tau_1)+_T D_0(\tau_2)) \\ & & + \coprod_{\tau\in Ob\mathcal{M}_0} \Xi(Coeq(id_{D_0(\tau)}, id_{D_0(\tau)})) \end{array}$$

Pour définir $Fl\mathcal{M}_1$ posons d'abord :

$$\begin{array}{rll} Fl\mathcal{R}_1 = \{\prec \tau_1, \tau_2 \succ / & \text{si 1.} & \tau_1 \in Ob\mathcal{M}_0 \text{ et } \exists\sigma \in Ob\mathcal{M}_0 \text{ tel que} \\ & & \tau_2 \in \Xi(D_0(\tau_1)+_T D_0(\sigma)) = \Xi(D_0(\sigma)+_T D_0(\tau_1)) \\ & \text{ou 2.} & \tau_1 \in Ob\mathcal{M}_0 \text{ et } \tau_2 \in \Xi(Coeq(id_{D_0(\tau_1)}, id_{D_0(\tau_1)}))\} \end{array}$$

Sur $Fl\mathcal{R}_1$ qui ne contient que des flèches de longueur 1, on construit l'ensemble des chemins de longueur ≤ 1. Nous appelons cet ensemble $Fl\mathcal{M}_1$. Il existe dans $Fl\mathcal{M}_1$ une manière évidente de concaténer les chemins.
Après ceci nous serons capables de définir le morphisme de graphe D_1 :

$$\begin{array}{rcl} D_1 : \mathcal{M}_1 & \longrightarrow & Mod[S] \\ Ob\mathcal{M}_1 & \longrightarrow & ObMod[S] \\ \tau \in Ob\mathcal{M}_0 & \longmapsto & D_0(\tau) \\ \left.\begin{array}{l}(\tau_1,\tau_2;\tau) \text{ tel que} \\ \tau_1,\tau_2\in Ob\mathcal{M}_0 \text{ et} \\ \tau\in\Xi(D_0(\tau_1)+_T D_0(\tau_2))\end{array}\right) & \longmapsto & (D_0(\tau_1)+_T D_0(\tau_2))[\tau] \\ \left.\begin{array}{l}(\tau_1,\tau_1) \quad \text{tel que} \\ \tau_1\in Ob\mathcal{M}_0 \text{ et} \\ \tau_2\in\Xi(Coeq(id_{D_0(\tau_1)}, id_{D_0(\tau_1)}))\end{array}\right) & \longmapsto & Coeq(id_{D_0(\tau_1)}, id_{D_0(\tau_1)})[\tau_2] \\ Fl\mathcal{M}_1 & \longrightarrow & FlMod[S] \\ (\tau_1 \longrightarrow \tau_2) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} (D_1(\tau_1) & \longrightarrow & D_1(\tau_2)) \\ \| & & \| \\ D_0(\tau_1) & \to D_0(\tau_1)+_T D_0(\sigma) \to & (D_0(\tau_1)+_T D_0(\sigma))[\tau_2] \end{array}\right. \\ & & \text{où } \sigma \in Ob\mathcal{M}_0 \text{ tel que } \tau_2 \in \Xi(D_0(\tau_1)+_T D_0(\sigma)) \\ (\tau_1 \longrightarrow \tau_2) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} (D_1(\tau_1) & \longrightarrow & D_1(\tau_2)) \\ \| & & \| \\ D_0(\tau_1) & \to Coeq(id,id) \to & Coeq(id_{D_0(\tau_1)}, id_{D_0(\tau_1)})[\tau_2] \end{array}\right. \\ & & \text{où } \tau_1 \in Ob\mathcal{M}_0 \text{ et } \tau_2 \in \Xi(Coeq(id_{D_0(\tau_1)}, id_{D_0(\tau_1)})) \end{array}$$

Nous avons aussi un cône projectif dans $Ens^{\underline{\mathcal{C}}}$:

$$d_1 : \begin{cases} (d^1_\tau = d^0_\tau : \quad T \longrightarrow D_0(\tau))_{\tau \in Ob\mathcal{M}_0} \\ (d^1_{\tau_1,\tau_2,\tau} : \quad T \longrightarrow D_0(\tau_1) +_T D_0(\tau_2) \to (D_0(\tau_1) +_T D_0(\tau_2))[\tau]) \quad \begin{matrix} \tau_1,\tau_2 \in Ob\mathcal{M}_0 \\ \tau \in \Xi(D_0(\tau_1) +_T D_0(\tau_2)) \end{matrix} \\ (d^1_{\tau_1,\tau_2} : \quad T \longrightarrow Coeq(id,id) \to Coeq(id_{D_0(\tau_1)}, id_{D_0(\tau_1)})[\tau_2]) \quad \begin{matrix} \tau_1 \in Ob\mathcal{M}_0 \\ \tau_1 \in \Xi(Coeq(id_{D_0(\tau_1)}, id_{D_0(\tau_1)})) \end{matrix} \end{cases}$$

Hypothèse et pas d'induction

Supposons que $\mathcal{R}_0, \ldots, \mathcal{R}_n$; $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_n$; $D_0, \ldots, D_n$ et $d_0, \ldots, d_n$ sont définis.
De façon similaire à la définition de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{M}_1$, D_1 et d_1 nous pouvons poser :

$$\begin{array}{lll} Ob\mathcal{M}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} Ob\mathcal{M}_n + Ob\mathcal{R}_{n+1} \text{ avec} & & \\ Ob\mathcal{R}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} & \coprod_{(\tau_1,\tau_2) \in Ob\mathcal{M}_n \times Ob\mathcal{M}_n} \Xi(D_n(\tau_1) +_T D_n(\tau_2)) & \\ & + \coprod_{\substack{(f_1,f_2) \in Fl\mathcal{M}_n \times Fl\mathcal{M}_n \\ \text{tels que } f_1 \text{ et } f_2 \text{ parallèles}}} \Xi(Coeq(f_1,f_2)) & \end{array}$$

Pour définir $Fl\mathcal{M}_{n+1}$ posons d'abord :

$$\begin{aligned} Fl\mathcal{R}_{n+1} = \coprod_{i \in \{0,\ldots,n\}} Fl\mathcal{R}_i \quad + & \\ \{\prec \tau_1, \tau_2 \succ / \quad \text{si 1.} \quad & \tau_1 \in Ob\mathcal{M}_n \text{ et } \exists \sigma \in Ob\mathcal{M}_n \text{ tel que} \\ & \tau_2 \in \Xi(D_n(\tau_1) +_T D_n(\sigma)) = \Xi(D_n(\sigma) +_T D_n(\tau_1)) \\ \text{ou 2.} \quad & \tau_1 \in Ob\mathcal{M}_n \text{ et } \exists f_1, f_2 \in Fl\mathcal{M}_n \text{ tels que } f_1 \text{ et } f_2 \text{ parallèles et} \\ & \tau_2 \in \Xi(Coeq(D_n(f_1), D_n(f_2))) \text{ ou } \tau_2 \in \Xi(Coeq(D_n(f_2), D_n(f_1)))\} \end{aligned}$$

Sur $Fl\mathcal{R}_{n+1}$ qui ne contient que des flèches de longueur 1, on construit l'ensemble des chemins de longueur $\leq n+1$. Nous appelons cet ensemble $Fl\mathcal{M}_{n+1}$. Il existe dans $Fl\mathcal{M}_{n+1}$ une manière évidente de concaténer les chemins. Ajoutons de plus à $Fl\mathcal{M}_{n+1}$, chaque fois où le cas se présente, l'égalité $\prec \tau_1, \tau_2 \succ \circ f_1 = \prec \tau_1, \tau_2 \succ \circ f_2$.
Après ceci nous serons capables de définir le morphisme de graphe D_{n+1} :

$$
\begin{array}{rcl}
D_{n+1} : \quad \mathcal{M}_{n+1} & \longrightarrow & Mod[S] \\
Ob\mathcal{M}_{n+1} & \longrightarrow & ObMod[S] \\
\tau \in Ob\mathcal{M}_n & \longmapsto & D_n(\tau) \\
\left.\begin{array}{l}(\tau_1,\tau_2;\tau) \text{ tel que} \\ \tau_1,\tau_2 \in Ob\mathcal{M}_n \text{ et} \\ \tau \in \Xi(D_n(\tau_1) +_T D_n(\tau_2))\end{array}\right. & \longmapsto & (D_n(\tau_1) +_T D_n(\tau_2))[\tau] \\
\left.\begin{array}{l}(\tau_1,\tau_2) \text{ tel que} \\ \tau_1 \in Ob\mathcal{M}_0 \text{ et} \\ f_1, f_2 \in Fl\mathcal{M}_n \text{ tel que} \\ \text{tel que } f_1, f_2 \text{ parallèles et} \\ \tau_2 \in \Xi(Coeq(D_n(f_1), D_n(f_2)))\end{array}\right. & \longmapsto & Coeq(D_n(f_1), D_n(f_2))[\tau_2] \\
Fl\mathcal{M}_{n+1} & \longrightarrow & FlMod[S] \\
(\tau_1 \longrightarrow \tau_2) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} (D_{n+1}(\tau_1 & \longrightarrow & D_{n+1}(\tau_2)) \\ \| & & \| \\ D_n(\tau_1) & \xrightarrow{D_n(\tau_1) +_T D_n(\sigma)} & (D_n(\tau_1) +_T D_n(\sigma))[\tau_2] \end{array}\right) \\
 & & \text{où } \sigma \in Ob\mathcal{M}_n \text{ tel que } \tau_2 \in \Xi(D_n(\tau_1) +_T D_n(\sigma)) \\
(\tau_1 \longrightarrow \tau_2) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} (D_{n+1}(\tau_1 & \longrightarrow & D_{n+1}(\tau_2)) \\ \| & & \| \\ D_n(\tau_1) & \xrightarrow{Coeq(D_n(f_1), D_n(f_2))} & Coeq(D_n(f_1), D_n(f_2))[\tau_2] \end{array}\right) \\
 & & \text{où } \tau_1 \in Ob\mathcal{M}_n, \ f_1 \text{ et } f_2 \in Fl\mathcal{M}_n \text{ parallèles et} \\
 & & \quad \tau_2 \in \Xi(Coeq(D_n(f_1), D_n(f_2)))
\end{array}
$$

Nous avons aussi un cône projectif dans $Ens^{\underline{\mathcal{C}}}$:

$$
d_{n+1} : \left\{\begin{array}{lcll}
(d^{n+1}_\tau = d^n_\tau : & T & \longrightarrow & D_n(\tau))_{\tau \in Ob\mathcal{M}_n} \\
(d^{n+1}_{\tau_1,\tau_2,\tau} : & T & \longrightarrow & D_n(\tau_1) +_T D_n(\tau_2) \to (D_n(\tau_1) +_T D_n(\tau_2))[\tau]) \quad \begin{array}{l}\tau_1,\tau_2 \in Ob\mathcal{M}_n \\ \tau \in \Xi(D_n(\tau_1) +_T D_n(\tau_2))\end{array} \\
(d^{n+1}_{\tau_1,\tau_2} : & T & \longrightarrow & Coeq(D_n(f_1),D_n(f_2)) \to Coeq(D_n(f_1), D_n(f_2))[\tau_2]) \quad \begin{array}{l}\tau_1 \in Ob\mathcal{M}_n \\ f_1, f_2 \in Fl\mathcal{M}_n \\ \text{tel que } f_1, f_2 \text{ parallèles et} \\ \tau_2 \in \Xi(Coeq(D_n(f_1),D_n(f_2)))\end{array}
\end{array}\right.
$$

Ceci met fin à la construction par induction. Maintenant est venu le moment de définir le diagramme localement libre de T.
Soit $\mathcal{M}_\infty$ le graphe qui réunit les $\mathcal{M}_n$ (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$
\begin{array}{ll}
Ob\mathcal{M}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Ob\mathcal{M}_n & \text{nous avons } Ob\mathcal{M}_n \subseteq Ob\mathcal{M}_{n+1} \\
Fl\mathcal{M}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Fl\mathcal{M}_n & \text{nous avons } Fl\mathcal{M}_n \subseteq Fl\mathcal{M}_{n+1}
\end{array}
$$

Il est parfaitement clair que $\mathcal{M}_\infty$ est une catégorie. La prochaine étape consistera à définir le morphisme de graphe :

$$
\begin{array}{rcl}
D_\infty : \quad \mathcal{M}_\infty & \longrightarrow & Mod[S] \\
Ob\mathcal{M}_\infty & \longrightarrow & ObMod[S] \\
(\tau, n) \in Ob\mathcal{M}_\infty & \longmapsto & D_n(\tau) \\
Fl\mathcal{M}_\infty & \longrightarrow & FlMod[S] \\
(\tau_1 \to \tau_2, n) \in Fl\mathcal{M}_\infty & \longmapsto & (D_n(\tau_1) \to D_n(\tau_2))
\end{array}
$$

Il est facile de voir que D_∞ est bien un foncteur.
De même nous pouvons définir un cône projectif dans $Ens^{\underline{\mathcal{C}}}$:

$$
d_\infty : (d^\infty_{\tau,n} : T \longrightarrow D_n(\tau))_{(\tau,n) \in Ob\mathcal{M}_\infty}
$$

Soit maintenant :

- $\underline{A} = \underline{A}(T, S)$ la catégorie $\mathcal{M}_\infty$
- $D = D(T, S) : \underline{A} \longrightarrow Mod[S]$ le foncteur $D_\infty : \mathcal{M}_\infty \longrightarrow Mod[S]$
- soit $d = d(T, S) \stackrel{\text{def}}{=} d_\infty$

Ceci met fin à la construction du diagramme localement libre. Il reste à prouver que $(\underline{A}, D, d)$ est en effet un diagramme localement libre.

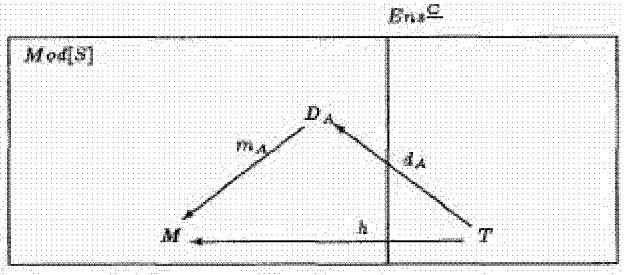
2.3 LA CONSTRUCTION DE 2.2 EST BIEN UN D.L.L.

Nous allons intégralement reprendre les notions de la section 2.2. La section 2.3 est entièrement consacrée à la démonstration du théorème suivant :

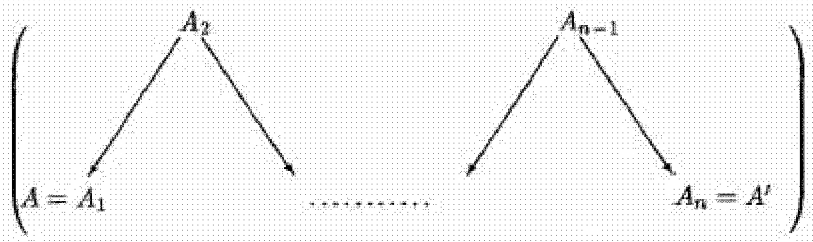
Théorème 2.3 : $(\underline{A}, D, d)$ est un *d.l.l.* du foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$.

Démonstration : Nous devons montrer les deux conditions d'un *d.l.l.* :

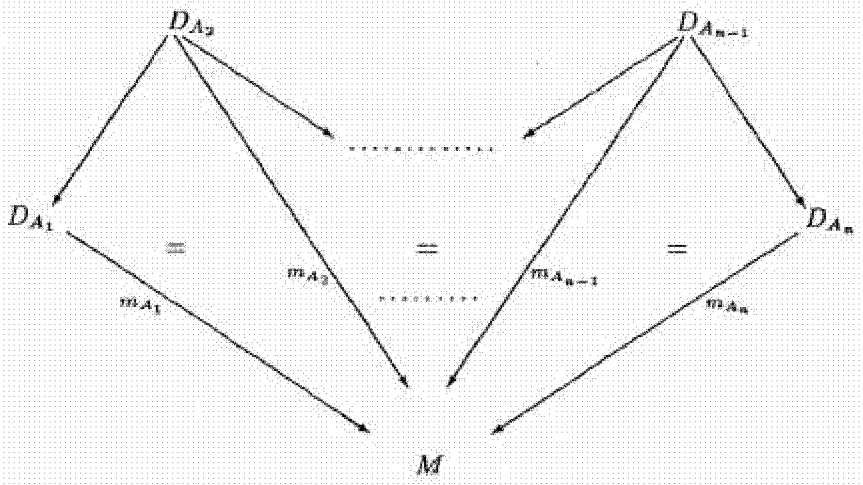
Pour toute flèche $(T \xrightarrow{h} M) \in Hom_{Ens^{\underline{C}}}(T, M)$
1) $\exists A \in \underline{A}, \exists (D_A \xrightarrow{m_A} M) \in Hom_{Mod[S]}(D_A, M) : h = m_A \circ d_A$



2) Si (A, m_A) et $(A', m_{A'})$ satisfont la condition 1), alors il existe un zig-zag dans $\underline{A}$:

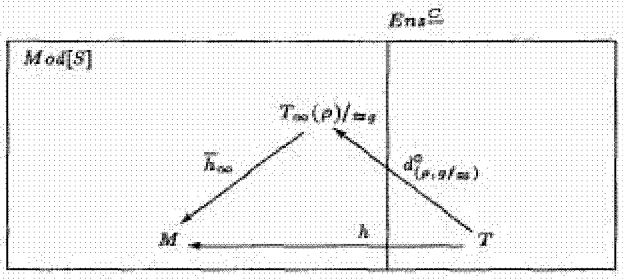


tel que le diagramme suivant est commutatif :



2.3.1 L'existence d'une factorisation (première condition)

A ce propos nous allons montrer qu'il existe $(\rho, g/_{\approx}) \in \Xi(T) = Ob\mathcal{M}_0 \subseteq Ob\underline{A}$ et $h_\infty : T_\infty(\rho) \longrightarrow M \in FIEns^{\underline{C}}$ (respectivement $\overline{h}_\infty : T_\infty(\rho)/_{\approx_g} \longrightarrow M \in FIMod[S]$) tels que le diagramme suivant commute :



Afin de trouver un tel $(\rho, g/_{\approx})$, nous construisons par récurrence des foncteurs T_n et des transformations naturelles $h_n : T_n \longrightarrow M$.

Début de la récurrence

Définissons $T_0 \stackrel{\text{def}}{=} T$ et $h_0 \stackrel{\text{def}}{=} h$. Le but ici est de définir

$$(\lambda_0, \vartheta_0, \psi_0) = ((\lambda_0^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\vartheta_0^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\psi_0^P)_{P \in \mathbb{P}}) \in \Delta_0.$$

Erreur 1 Nous donnons ici la définition de λ_0 qui "mesure" l'erreur 1.

Soit $I \in \mathbb{I}$. Nous rappelons que $T_0^I = T_0(U^I) \setminus [\bigcup_{J \in \underline{J}^I} T_0(\alpha_J^I)(T_0(U_J^I))]$.

Pour $J \in \underline{J}^I$ définissons $\lambda_0^I(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in T_0^I / \exists x_J \in M(U_J^I) : M(\alpha_J^I)(x_J) = h_0(U^I)(x)\}$.

Nous tirons alors bénéfice du fait que M est modèle : Nous envoyons les points non atteints de $T(U^I)$ via $h_0(U^I)$ dans $M(U^I)$ et dans $M(U^I)$ l'image de ces points est répartie dans la base $(M(U^I_J))_{J\in\underline{J}^I}$, puisque M est un modèle. Par conséquent nous pouvons définir une application

$$\begin{array}{rccc} \lambda^I_0 : & Ob\underline{J}^I & \longrightarrow & \mathcal{P}(T^I_0) \\ & J & \longrightarrow & \lambda^I_0(J) \end{array}$$

qui vérifie $\bigcup_{J\in\underline{J}^I} \lambda^I_0(J) = T^I_0$. Donc $\lambda^I_0 \in \Lambda(\underline{J}^I, T^I_0)$. D'où $\lambda_0 = (\lambda^I_0)_{I\in\mathbb{I}}$ est une famille bien définie.

Erreur 2 Pour l'erreur 2 nous allons donner la définition de ϑ_0. Pour $I \in \mathbb{I}$ et $J \in \underline{J}^I$ considérons dans $Fl\underline{J}^I$ le zig-zag $J' \xleftarrow{\gamma} J \xrightarrow{\delta} J'' \in Fl\underline{J}^I$. Posons

$$\begin{aligned} \theta^{\gamma,\delta}_0(J) \overset{\text{def}}{=} \{&(x_{J'}, x_{J''}) \in T_0(U^I_{J'}) \times T_0(U^I_{J''})/ \\ &h_0(U^I)(T_0(\alpha^I_{J'})(x_{J'})) = h_0(U^I)(T_0(\alpha^I_{J''})(x_{J''})), \\ &\forall x_J \in T_0(U^I_J) : T_0(\gamma)(x_J) \neq x_{J'} \text{ et } T_0(\delta)(x_J) \neq x_{J''}, \\ &\exists y_J \in M(U^I_J) : M(\gamma)(y_J) = h_0(U^I_{J'})(x_{J'}) \text{ et } M(\delta)(y_J) = h_0(U^I_{J''})(x_{J''})\} \end{aligned}$$

Comme nous allons voir plus tard, $\theta^{\gamma,\delta}_0$ fournira les zig-zags manquants.

Nous posons ensuite : $\vartheta^I_0(J) \overset{\text{def}}{=} \coprod_{\gamma,\delta} \theta^{\gamma,\delta}_0(J)$.

C'est-à-dire que nous avons $\vartheta^I_0(J) \subseteq \Theta^I_0(J)$ et l'application :

$$\begin{array}{rccc} \vartheta^I_0 : & Ob\underline{J}^I & \longrightarrow & \mathcal{P}(\Theta^I_0) \\ & J & \longrightarrow & \vartheta^I_0(J) \text{ est bien définie .} \end{array}$$

Pour cela ϑ^I_0 est un élément dans $\Theta(\underline{J}^I, T_0)$ et en posant $\vartheta_0 = (\vartheta^I_0)_{I\in\mathbb{I}}$ la définition de ϑ_0 est achevée.

Erreur 3 Quant à la définition de la famille $\psi_0 = (\psi^P_0)_{P\in\mathbb{P}}$ nous allons définir pour tout cône projectif distingué P dans $\mathbb{P}$:

$$\psi^P_0 = \{(x_K)_{K\in\underline{K}^P} \in \prod_{K\in\underline{K}^P} T_0(V^P_K)/(h_0(V^P_K)(x_K))_{K\in\underline{K}^P} \in M(V^P) = \varprojlim_{K\in\underline{K}^P} M(V^P_K)\}$$

On a bien $\psi^P_0 \in \Psi(\underline{K}^P, T_0) = \mathcal{P}(\prod_{K\in\underline{K}^P} T_0(V^P_K))$.

D'où la définition $\psi_0 = (\psi^P_0)_{P\in\mathbb{P}}$.

Le triplet $(\lambda_0, \vartheta_0, \psi_0) = ((\lambda^I_0)_{I\in\mathbb{I}}, (\vartheta^I_0)_{I\in\mathbb{I}}, (\psi^P_0)_{P\in\mathbb{P}})$ définit un foncteur $T_1 = T_1(\lambda_0, \vartheta_0, \psi_0)$ (voir section 2.2).

Définissons maintenant la transformation naturelle h_1 :

Pour $I \in \mathbb{I}$, $J \in \underline{J}^I$ et $x \in \lambda^I_0(J)$ il existe $y_J \in M(U^I_J)$ tel que $M(\alpha^I_J)(y_J) = h_0(U^I)(x)$ (d'après la définition de $\lambda^I_0(J)$). Nous pouvons donc choisir une fonction

$$\begin{array}{rccc} \zeta^I_0 : & \lambda^I_0(J) & \longrightarrow & M(U^I_J) \\ & x & \longmapsto & y_J \end{array}$$

(il y a éventuellement plusieurs fonctions).

Egalement pour $(x_{J'}, x_{J''}) \in \theta^{\gamma,\delta}_0(J)$ il existe $y_J \in M(U^I_J)$ tel que $M(\gamma)(y_J) = h_0(U^I_{J'})(x_{J'})$ et $M(\delta)(y_J) = h_0(U^I_{J''})(x_{J''})$. Pour cela, choisissons une fonction

$$\begin{array}{rccc} \mu^{\gamma,\delta}_0(J) : & \theta^{\gamma,\delta}_0 & \longrightarrow & M(U^I_J) \\ & (x_{J'}, x_{J''}) & \longmapsto & y_J \end{array}$$

(De nouveau il y a plusieurs fonctions).

Ce choix fournit une fonction

$$\mu_0^I(J) = \coprod_{\gamma,\delta} \mu_0^{\gamma,\delta}(J) : \vartheta_0^I(J) \longrightarrow M(U_J^I)$$

Ensuite nous avons l'application canonique ($P \in \mathbb{P}$) :

$$\begin{array}{rccl} \nu_0^P : & \psi_0^P & \longrightarrow & M(V^P) \\ & (x_K)_{K \in \underline{K}^P} & \longmapsto & (h_0(V_K^P)(x_K))_{K \in \underline{K}^P} \end{array}$$

Maintenant nous disposons de tous les éléments pour définir h_1 :

$$\begin{array}{rccl} h_1 : & T_1 & \longrightarrow & M \\ & Ob\underline{C} & \longrightarrow & Fl Ens \\ & W & \longmapsto & [(T_0(W) + \coprod_{I \in \mathbb{I}} \coprod_{J \in \underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \lambda_0^I(J) \\ & & & \quad + \coprod_{I \in \mathbb{I}} \coprod_{J \in \underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \vartheta_0^I(J) \\ & & & \quad + \coprod_{P \in \mathbb{P}} Hom_{\underline{C}}(V^P, W) \times \psi_0^P) \longrightarrow M(W)] \end{array}$$

$h_1(W)$est défini par morceaux : $h_1(W)/_{T_0(W)=h_0(W)}$

$$\begin{array}{lcl} T_0(W) & \longrightarrow & M(W) \\ Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \lambda_0^I(J) & \longrightarrow & M(W) \\ (U_J^I \xrightarrow{\varepsilon} W; x) & \longmapsto & M(\varepsilon)(\zeta_0^I(J)(x)) \\ Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \vartheta_0^I(J) & \longrightarrow & M(W) \\ (U_J^I \xrightarrow{\varepsilon} W; (x_{J'}, x_{J''})) & \longmapsto & M(\varepsilon)(\mu_0^{\gamma,\delta}(x_{J'}, x_{J''})) \\ Hom_{\underline{C}}(V^P, W) \times \psi_0^P & \longrightarrow & M(W) \\ (V^P \xrightarrow{\varepsilon} W; x) & \longmapsto & M(\varepsilon)(\nu_0^P(x)) \end{array}$$

Il est facile de voir que h_1 est une transformation naturelle.

Hypothèse et pas de récurrence

Nous supposons que le foncteur T_n et la transformation naturelle $h_n : T_n \longrightarrow M$ sont déjà définis.
Le but est de définir $(\lambda_n, \vartheta_n, \psi_n) = ((\lambda_n^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\vartheta_n^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\psi_n^P)_{P \in \mathbb{P}}) \in \Delta_n$.

Erreur 1 Nous donnons ici la définition de λ_n qui concerne l'erreur 1.

Soit $I \in \mathbb{I}$. Nous rappelons que

$$T_n^I = T_n(U^I) \setminus [\bigcup_{J \in \underline{J}^I} T_n(\alpha_J^I)(T_n(U_J^I))].$$

Pour $J \in \underline{J}^I$ définissons $\lambda_n^I(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in T_n^I / \exists x_J \in M(U_J^I) : M(\alpha_J^I)(x_J) = h_n(U^I)(x)\}$. Nous profitons de nouveau du fait que M est un modèle de la façon suivante :
Nous envoyons les points non atteints de $T_n(U^I)$ via $h_n(U^I)$ dans $M(U^I)$ et dans $M(U^I)$ l'image de ces points est répartie dans la base $(M(U_J^I))_{J \in \underline{J}^I}$, puisque M est un modèle. Par conséquent nous pouvons définir une application

$$\begin{array}{rccl} \lambda_n^I : & Ob\underline{J}^I & \longrightarrow & \mathcal{P}(T_n^I) \\ & J & \longrightarrow & \lambda_n^I(J) \end{array}$$

qui vérifie $\bigcup_{J\in\underline{J}^I}\lambda_n^I(J)=T_n^I$. Donc $\lambda_n^I\in\Lambda(\underline{J}^I,T_n^I)$. D'où $\lambda_n=(\lambda_n^I)_{I\in\mathbb{I}}$ est une famille bien définie.

Erreur 2 Pour l'erreur 2 nous allons donner la définition de ϑ_n. Pour $I\in\mathbb{I}$ et $J\in\underline{J}^I$ considérons de nouveau dans $Fl\underline{J}^I$ le zig-zag $J'\xleftarrow{\gamma}J\xrightarrow{\delta}J''\in Fl\underline{J}^I$. Posons

$$\begin{aligned}\theta_n^{\gamma,\delta}(J)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{&(x_{J'},x_{J''})\in T_n(U_{J'}^I)\times T_n(U_{J''}^I)/\\ &h_n(U^I)(T_n(\alpha_{J'}^I)(x_{J'}))=h_n(U^I)(T_n(\alpha_{J''}^I)(x_{J''})),\\ &\forall x_J\in T_n(U_J^I):T_n(\gamma)(x_J)\neq x_{J'}\ \text{ et }\ T_n(\delta)(x_J)\neq x_{J''},\\ &\exists y_J\in M(U_J^I):M(\gamma)(y_J)=h_n(U_{J'}^I)(x_{J'})\ \text{ et }\ M(\delta)(y_J)=h_n(U_{J''}^I)(x_{J''})\}\end{aligned}$$

Comme nous allons voir plus tard, $\theta_n^{\gamma,\delta}$ fournira les zig-zags manquants.

Nous posons ensuite : $\vartheta_n^I(J)\stackrel{\text{def}}{=}\coprod_{\gamma,\delta}\theta_n^{\gamma,\delta}(J)$

C'est-à-dire que nous avons $\vartheta_n^I(J)\subseteq\Theta_n^I(J)$ et l'application

$$\begin{array}{rccc}\vartheta_n^I: & Ob\underline{J}^I & \longrightarrow & \mathcal{P}(\Theta_n^I)\\ & J & \longrightarrow & \vartheta_n^I(J)\ \text{ est bien définie .}\end{array}$$

Pour cela ϑ_n^I est un élément dans $\Theta(\underline{J}^I,T_n)$ et en posant $\vartheta_n=(\vartheta_n^I)_{I\in\mathbb{I}}$ la définition de ϑ_n est achevée.

Erreur 3 Quant à la définition de la famille $\psi_n=(\psi_n^P)_{P\in\mathbb{P}}$ nous allons définir pour tout cône projectif distingué P dans $\mathbb{P}$:

$$\psi_n^P\stackrel{\text{def}}{=}\{(x_K)_{K\in\underline{K}^P}\in\prod_{K\in\underline{K}^P}T_n(V_K^P)/(h_n(V_K^P)(x_K))_{K\in\underline{K}^P}\in M(V^P)=\varprojlim_{K\in\underline{K}^P}M(V_K^P)\}$$

On a bien $\psi_n^P\in\Psi(\underline{K}^P,T_n)=\mathcal{P}(\prod_{K\in\underline{K}^P}T_n(V_K^P))$.

D'où la définition $\psi_n=(\psi_n^P)_{P\in\mathbb{P}}$.

Le triplet $(\lambda_n,\vartheta_n,\psi_n)=((\lambda_n^I)_{I\in\mathbb{I}},(\vartheta_n^I)_{I\in\mathbb{I}},(\psi_n^P)_{P\in\mathbb{P}})$ définit un foncteur $T_{n+1}=T_{n+1}(\lambda_n,\vartheta_n,\psi_n)$ (voir section 2.2).

Définissons maintenant h_{n+1} :

Pour $I\in\mathbb{I}$, $J\in\underline{J}^I$ et $x\in\lambda_n^I(J)$ il existe $y_J\in M(U_J^I)$ tel que $M(\alpha_J^I)(y_J)=h_n(U^I)(x)$ (d'après la définition de $\lambda_n^I(J)$).

Nous pouvons donc choisir une fonction

$$\begin{array}{rccc}\zeta_n^I: & \lambda_n^I(J) & \longrightarrow & M(U_J^I)\\ & x & \longmapsto & y_J\end{array}$$

(il y a éventuellement plusieurs fonctions).

Egalement pour $(x_{J'},x_{J''})\in\theta_n^{\gamma,\delta}(J)$ il existe $y_J\in M(U_J^I)$ tel que $M(\gamma)(y_J)=h_n(U_{J'}^I)(x_{J'})$ et $M(\delta)(y_J)=h_n(U_{J''}^I)(x_{J''})$. Pour cela choisissons une fonction

$$\begin{array}{rccc}\mu_n^{\gamma,\delta}(J): & \theta_n^{\gamma,\delta} & \longrightarrow & M(U_J^I)\\ & (x_{J'},x_{J''}) & \longmapsto & y_J\end{array}$$

(De nouveau il y a plusieurs fonctions). Ce choix fournit une fonction :

$$\mu_n^I(J)=\prod_{\gamma,\delta}\mu_n^{\gamma,\delta}(J):\vartheta_n^I(J)\longrightarrow M(U_J^I).$$

Ensuite nous avons l'application canonique ($P \in \mathbb{P}$) :

$$\begin{array}{rccl} \nu_n^P : & \psi_n^P & \longrightarrow & M(V^P) \\ & (x_K)_{K \in \underline{K}^P} & \longmapsto & (h_n(V_K^P)(x_K))_{K \in \underline{K}^P} \end{array}$$

Maintenant nous disposons de tous les éléments pour définir h_{n+1} :

$$\begin{array}{rccl} h_{n+1} : & T_{n+1} & \longrightarrow & M \\ & Ob\underline{C} & \longrightarrow & FIEns \\ & W & \longmapsto & [(T_n(W) + \coprod_{I \in \mathbb{I}} \coprod_{J \in \underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times F_n^I(J) \\ & & & \quad + \coprod_{I \in \mathbb{I}} \coprod_{J \in \underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times N_n^I(J) \\ & & & \quad + \coprod_{P \in \mathbb{P}} Hom_{\underline{C}}(V^P, W) \times \psi_n^P) \longrightarrow M(W)] \end{array}$$

$h_{n+1}(W)$est défini par morceaux :

$$\begin{array}{lcl} & \overset{h_{n+1}(W)/_{T_n(W)} = h_n(W)}{\longrightarrow} & \\ T_n(W) & & M(W) \\ Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \lambda_n^I(J) & \longrightarrow & M(W) \\ (U_J^I \xrightarrow{\varepsilon} W; x) & \longmapsto & M(\varepsilon)(\zeta_n^I(J)(x)) \\ Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \vartheta_n^I(J) & \longrightarrow & M(W) \\ (U_J^I \xrightarrow{\varepsilon} W; (x_{J'}, x_{J''})) & \longmapsto & M(\varepsilon)(\mu_n^{\gamma,\delta}(x_{J'}, x_{J''})) \\ Hom_{\underline{C}}(V^P, W) \times \psi_n^P & \longrightarrow & M(W) \\ (V^P \xrightarrow{\varepsilon} W; x) & \longmapsto & M(\varepsilon)(\nu_n^P(x)) \end{array}$$

Il est facile de voir que h_{n+1} est une transformation naturelle.
Ceci achève la construction par récurrence de la famille

$$(\lambda_n, \vartheta_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\lambda_n^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\vartheta_n^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\psi_n^P)_{P \in \mathbb{P}})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Cette famille nous fournira un $(\rho, g/_{\approx}) \in \Xi(T)$ et de là une factorisation du morphisme $T \xrightarrow{h} M$.
Définissons donc $(\rho, g/_{\approx}) \in \Xi(T) = Ob\mathcal{M}_0$:

$$\begin{array}{rccl} \rho : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \\ & n & \longmapsto & ((\lambda_n^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\vartheta_n^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\psi_n^P)_{P \in \mathbb{P}}) \end{array}$$

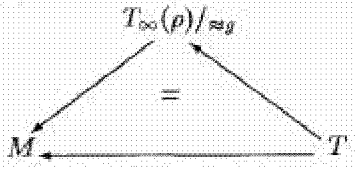
Il est manifeste que $\rho \in \Delta_\infty$ à cause de $((\lambda_n^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\vartheta_n^I)_{I \in \mathbb{I}}, (\psi_n^P)_{P \in \mathbb{P}})_{n \in \mathbb{N}} \in \Delta_\infty$. L'application ρ nous fournit immédiatement le foncteur $T_\infty(\rho)$. Posons ensuite :

$$h_\infty = \coprod_{n \in \mathbb{N}} h_n : T_\infty(\rho) \longrightarrow M.$$

Pour $g = h_\infty$ nous avons

$$g/_{\approx} \in Hom_{Ens^{\underline{C}}}(T_\infty(\rho), M)/_{\approx}$$

Il s'ensuit la factorisation :



Vérification de la propriété de modèle

Il nous reste à montrer que $T_\infty(\rho)/_{\approx_g}$ est un modèle.
Nous devons montrer que pour tout $I \in \mathbb{I}$:

$$\boxed{\varinjlim_{J \in \underline{J}^I} T_\infty(\rho)(U^I_J)/_{\approx_g(U^I_J)} = T_\infty(\rho)(U^I)/_{\approx_g(U^I)}}$$

a) Démontrons d'abord que

$$T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(U^I) = \bigcup_{J \in \underline{J}^I} [T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(\alpha^I_J)(T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(U^I_J))].$$

Soit

$$x \in T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(U^I) = \coprod_{n \in \mathbb{N}} T_n(U^I)/_{\approx_g(U^I)}.$$

C'est-à-dire $\exists n \in \mathbb{N}$ et $\exists x_n \in T_n(U^I) : x = x_n/_{\approx_g(U^I)}$

Premier cas : $x_n \in \bigcup_{J \in \underline{J}^I} T_n(\alpha^I_J)(T_n(U^I_J))$.

Donc il y a $J \in \underline{J}^I$ tel que $x_n \in T_n(\alpha^I_J)(T_n(U^I_J))$ et ainsi $x_n \in T_\infty(\rho)(\alpha^I_J)(T_\infty(\rho)(U^I_J))$.
Nous pouvons en déduire que

$$x = x_n/_{\approx_g(U^I)} \in \bigcup_{J \in \underline{J}^I} [T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(\alpha^I_J)(T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(U^I_J))]$$

Deuxième cas : $x_n \in T^I_n$.

De la définition de T^I_n il s'ensuit qu'il existe $J \in \underline{J}^I$ tel que $x_n \in \lambda^I_n(J)$. D'où

$$(U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I, x_n) \in Hom_{\underline{C}}(U^I_J, U^I) \times \lambda^I_n(J).$$

A cause de $Hom_{\underline{C}}(U^I_J, U^I) \times \lambda^I_n(J) \subseteq T_{n+1}(U^I)$ nous avons $(U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I, x_n) \in T_{n+1}(U^I)$.
D'un autre côté nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\alpha^I_J)(U^I_J \xrightarrow{id} U^I_J, x_n) &= (U^I_J \xrightarrow{id} U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I, x_n) \\ &= (U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I, x_n). \end{aligned}$$

Donc $(U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I, x_n) \in \bigcup_{J \in \underline{J}^I} T_\infty(\rho)(\alpha^I_J)(T_\infty(\rho)(U^I_J))$.

Il s'ensuit que $h_\infty(U^I)(x_n) = h_\infty(U^I)(U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I, x_n)$ à cause de

$$\begin{aligned} h_\infty(U^I)(U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I, x_n) &= M(\alpha^I_J)(\lambda^I_n(J)(x_n)) \\ &= h_\infty(U^I)(x_n). \end{aligned}$$

Pour cela nous avons également $g(U^I)(x_n) = g(U^I)(U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I, x_n)$.
D'où $x = x_n/_{\approx_g(U^I)} \in \bigcup_{J \in \underline{J}^I} [T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(\alpha^I_J)(T_\infty(\rho)(U^I_J)/_{\approx_g(U^I_J)})]$.

b) Démontrons maintenant que

$$\varinjlim_{J \in \underline{J}^I} T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(U^I_J) = T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(U^I).$$

Soit $t/_{\approx_g(U^I)} \in T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(U^I)$.
Supposons qu'il y ait $J, J' \in \underline{J}^I$ et $x_J \in T_\infty(\rho)(U^I_J)$, $x_{J'} \in T_\infty(\rho)(U^I_{J'})$ tels que

$$T_\infty(\rho)(\alpha^I_J)(x_J)/_{\approx_g(U^I)} = t/_{\approx_g(U^I)} = T_\infty(\rho)(\alpha^I_{J'})(x_{J'})/_{\approx_g(U^I)}$$

Il s'en suit que $h_\infty(U^I)(T_\infty(\rho)(\alpha^I_J)(x_J)) = h_\infty(U^I)(T_\infty(\rho)(\alpha^I_{J'})(x_{J'}))$ et

$$\begin{aligned} M(\alpha^I_J)(h_\infty(U^I_J)(x_J)) &= h_\infty(U^I)(T_\infty(\rho)(\alpha^I_J)(x_J)) \\ &= h_\infty(U^I)(T_\infty(\rho)(\alpha^I_{J'})(x_{J'})) \\ &= M(\alpha^I_{J'})(h_\infty(U^I_{J'})(x_{J'})), \end{aligned}$$

parce que h_∞ est une transformation naturelle. Comme M est un modèle, il existe un zig-zag entre J et J' qui combine $h_\infty(U^I_J)(x_J)$ et $h_\infty(U^I_{J'})(x_{J'})$ dans M. Sans nuire à la généralité nous allons examiner seulement les deux cas suivants :

Premier cas : Si $J \xrightarrow{\gamma} J'' \xleftarrow{\delta} J'$ est un zig-zag dans $\underline{J}^I$ qui combine $h_\infty(U^I_J)(x_J)$ et $h_\infty(U^I_{J'})(x_{J'})$ dans M, alors nous avons : $M(\gamma)(h_\infty(U^I_J)(x_J)) = M(\delta)(h_\infty(U^I_{J'})(x_{J'}))$. D'où les égalités

$$\begin{aligned} h_\infty(U^I_J)(T_\infty(\rho)(\gamma)(x_J)) &= M(\gamma)(h_\infty(U^I_J)(x_J)) \\ &= M(\delta)(h_\infty(U^I_{J'})(x_{J'})) \\ &= h_\infty(U^I_{J'})(T_\infty(\rho)(\delta)(x_{J'})). \end{aligned}$$

Comme $g = h_\infty$ nous avons :

$$T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(\gamma)(x_J/_{\approx_g(U^I_J)}) = T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(\delta)(x_{J'}/_{\approx_g(U^I_{J'})}).$$

Il existe donc pour le premier cas un zig-zag entre J et J' qui combine $x_J/_{\approx_g(U^I_J)}$ et $x_{J'}/_{\approx_g(U^I_{J'})}$ dans $T_\infty/_{\approx_g}$.

Deuxième cas : Soit $J \xleftarrow{\gamma} J'' \xrightarrow{\delta} J'$ un zig-zag dans $\underline{J}^I$ qui combine $h_\infty(U^I_J)(x_J)$ et $h_\infty(U^I_{J'})(x_{J'})$ dans M.
Puisque l'on considère x_J et $x_{J'}$ modulo $\approx_g$, et vue la construction de $g = h_\infty$ à partir de h, on peut supposer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_J \in T_n(U^I_J)$ et $x_{J'} \in T_n(U^I_{J'})$.
Nous devons envisager deux possibilités :

(i) $\exists x_{J''} \in T_n(U^I_{J''})$ tel que $T_n(\gamma)(x_{J''}) = x_J$ et $T_n(\delta)(x_{J''}) = x_{J'}$.
Le zig-zag $J \xleftarrow{\gamma} J'' \xrightarrow{\delta} J'$ combine donc $x_J/_{\approx_g(U^I_J)}$ et $x_{J'}/_{\approx_g(U^I_J)}$ à l'intérieur de $T_\infty(\rho)$ à cause de

$$T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(\gamma)(x_{J''}/_{\approx_g(U^I_{J''})}) = x_J/_{\approx_g(U^I_J)}$$

et

$$T_\infty(\rho)/_{\approx_g}(\delta)(x_{J''}/_{\approx_g(U^I_{J''})}) = x_{J'}/_{\approx_g(U^I_J)}.$$

(ii) $\forall x_{J''} \in T_n(U^I_{J''}) : T_n(\gamma)(x_{J''}) \neq x_J$ ou $T_n(\delta)(x_{J''}) \neq x_{J'}$.
Conformément à l'hypothèse du deuxième cas il existe $y_{J''} \in M(U^I_{J''})$ tel que $M(\gamma)(y_{J''}) = h_\infty(U^I_J)(x_J)$ et $M(\delta)(y_{J''}) = h_\infty(U^I_{J'})(x_{J'})$, c'est-à-dire que

$(x_J, x_{J'}) \in \theta_n^{\gamma,\delta}(J'') \subseteq \vartheta_n^I(J'')$; D'où $(U^I_{J''} \xrightarrow{id} U^I_{J''}; (x_J, x_{J'})) \in T_\infty(\rho)(U^I_{J''})$.
Conformément à la définition de $\vartheta_n^I(J'')$ et de $\mu_n^I(J'')$ il s'en suit que :

$$\begin{aligned} h_\infty(U^I_J)(U^I_{J''} \xrightarrow{\gamma} U^I_J; (x_J, x_{J'})) &= M(\gamma)(\mu_n^{\gamma,\delta}(J'')(x_J, x_{J'})) \\ &= h_\infty(U^I_J)(x_J) \end{aligned}$$

Nous avons également

$$\begin{aligned} h_\infty(U^I_{J'})(U^I_{J''} \xrightarrow{\delta} U^I_{J'}; (x_J, x_{J'})) &= M(\gamma)(\mu_n^{\gamma,\delta}(J'')(x_J, x_{J'})) \\ &= h_\infty(U^I_{J'})(x_{J'}). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré que

$$\begin{aligned} g(U^I_J)(U^I_{J''} \xrightarrow{\gamma} U^I_J; (x_J, x_{J'})) &= g(U^I_J)(x_J) \text{ et} \\ g(U^I_J)(U^I_{J''} \xrightarrow{\delta} U^I_{J'}; (x_J, x_{J'})) &= g(U^I_{J'})(x_{J'}). \end{aligned}$$

Ceci signifie qu'il existe $x_{J''} = (U^I_{J''} \xrightarrow{id} U^I_{J''}; (x_J, x_{J'})) \in T_\infty(\rho)(U^I_{J''})$ tel que

$$\begin{aligned} T_\infty(\rho)/_{\approx g}(\gamma)(x_{J''}/_{\approx g(U^I_{J''})}) &= x_J/_{\approx g(U^I_J)} \text{ et} \\ T_\infty(\rho)/_{\approx g}(\delta)(x_{J''}/_{\approx g(U^I_{J''})}) &= x_{J'}/_{\approx g(U^I_{J'})}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que le zig-zag $J \xleftarrow{\gamma} J'' \xrightarrow{\delta} J'$ combine $x_J/_{\approx g(U^I_J)}$ et $x_{J'}/_{\approx g(U^I_{J'})}$. Pour cette raison nous avons finalement montré que

$$\varinjlim_{J \in \underline{J}^I} T_\infty(\rho)/_{\approx g}(U^I_J) = T_\infty(\rho)/_{\approx g}(U^I).$$

Nous devons également montrer que pour tout cône projectif distingué $P \in \mathbb{P}$:

$$\boxed{\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} [T_\infty(\rho)(V^P_K)/_{\approx g(V^P_K)}] = T_\infty(\rho)(V^P)/_{\approx g(V^P)}}$$

Pour faciliter les notations nous remplaçons g par h_∞, c'est-à-dire nous montrons que :

$$\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} [T_\infty(\rho)(V^P_K)/_{\approx h_\infty(V^P_K)}] = T_\infty(\rho)(V^P)/_{\approx h_\infty(V^P)}.$$

Pour cette raison nous allons montrer que l'application suivante est une bijection :

$$f : \coprod_{n \in \mathbb{N}} T_n(V^P)/_{\approx h_\infty(V^P)} \longrightarrow \varprojlim_{K \in \underline{K}^P} [\coprod_{n \in \mathbb{N}} T_n(V^P_K)/_{\approx h_\infty(V^P_K)}]$$

$$x_n/_{\approx h_\infty(V^P)} \longmapsto (T_n(\beta^P_K)(x_n)/_{\approx h_\infty(V^P_K)})_{K \in \underline{K}^P}$$

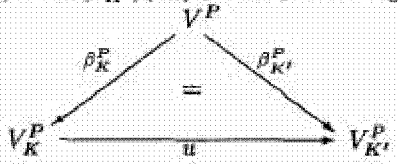
La condition de départ à savoir la finitude des bases de cônes projectifs intervient à cet endroit pour prouver que f est surjective. Il faut donc vérifier les propriétés suivantes :

a) f est bien définie
Nous allons vérifier deux points :

- pour $x_n \in T_n(V^P)$ nous allons montrer que

$$(T_n(\beta_K^P)(x_n)/_{\approx h_\infty(V_K^P)})_{K \in \underline{K}^P} \in \varprojlim_{K \in \underline{K}^P} [\coprod_{n \in \mathbb{N}} T_n(V_K^P)/_{\approx h_\infty(V_K^P)}].$$

Considérons pour cela K, K' et $u : K \longrightarrow K' \in \underline{K}^P$. Nous avons:
$T_n(u)(T_n(\beta_K^P)(x_n)) = T_n(\beta_{K'}^P)(x_n)$ parce que le diagramme suivant est commutatif :



D'où

$$(T_n(\beta_K^P)(x_n)/_{\approx h_\infty(V_K^P)})_{K \in \underline{K}^P} \in \varprojlim_{K \in \underline{K}^P} [\coprod_{n \in \mathbb{N}} T_n(V_K^P)/_{\approx h_\infty(V_K^P)}]$$

- Comme point suivant nous montrons que pour $x_n, x'_n \in T_n(V^P)$ vérifiant $x_n/_{\approx h_\infty(V^P)} = x'_n/_{\approx h_\infty(V^P)}$, nous avons $T_n(\beta_K^P)(x_n)/_{\approx h_\infty(V_K^P)} = T_n(\beta_K^P)(x'_n)/_{\approx h_\infty(V_K^P)}$ pour tout $K \in \underline{K}^P$. Choisissons pour cela $x_n, x'_n \in T_n(V^P)$ avec $h_\infty(V^P)(x_n) = h_\infty(V^P)(x'_n)$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} h_\infty(V_K^P)(T_n(\beta_K^P)(x_n)) &= M(\beta_K^P)(h_\infty(V^P)(x_n)) \\ &= M(\beta_K^P)(h_\infty(V^P)(x'_n)) \\ &= h_\infty(V_K^P)(T_n(\beta_K^P)(x'_n)) \end{aligned}$$

et finalement $T_n(\beta_K^P)(x_n)/_{\approx h_\infty(V_K^P)} = T_n(\beta_K^P)(x'_n)/_{\approx h_\infty(V_K^P)}$.

b) f est mono

Supposons que $(T_n(\beta_K^P)(x_n)/_{\approx h_\infty(V_K^P)})_{K \in \underline{K}^P} = (T_m(\beta_K^P)(y_m)/_{\approx h_\infty(V_K^P)})_{K \in \underline{K}^P}$.
Sans nuire à la généralité nous admettons que $n = m$.
Pour tout $K \in \underline{K}^P$ nous avons $h_\infty(V_K^P)(T_n(\beta_K^P)(x_n)) = h_\infty(V_K^P)(T_n(\beta_K^P)(y_n))$.
Il s'en suit que

$$\begin{aligned} M(\beta_K^P)(h_\infty(V^P)(x_n)) &= h_\infty(V_K^P)(T_n(\beta_K^P)(x_n)) \\ &= h_\infty(V^P)(T_n(\beta_K^P)(y_n)) \\ &= M(\beta_K^P)(h_\infty(V^P)(y_n)). \end{aligned}$$

Comme $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} M(V_K^P) = M(V^P)$, il est vrai que

$$\begin{aligned} h_\infty(V^P)(x_n) = (M(\beta_K^P)(h_\infty(V^P)(x_n)))_{K \in \underline{K}^P} &= (M(\beta_K^P)(h_\infty(V^P)(y_n)))_{K \in \underline{K}^P} \\ &= h_\infty(V^P)(y_n) \end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire directement que $x_n/_{\approx h_\infty(V^P)} = y_n/_{\approx h_\infty(V^P)}$, donc que f est mono.

c) f est épi

Soit

$$(x_{n_K}/_{\approx h_\infty(V_K^P)})_{K \in \underline{K}^P} \in \varprojlim_{K \in \underline{K}^P} [\coprod_{n \in \mathbb{N}} T_n(V_K^P)/_{\approx h_\infty(V_K^P)}]$$

vérifiant $x_{n_K} \in T_{n_K}(V_K^P)$. Et c'est ici que nous utilisons maintenant le fait que les bases projectives de l'esquisse S sont finies. Comme $\underline{K}^P$ est donc supposé fini nous pouvons poser $n \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n_k/_{K \in \underline{K}^P}\}$. Sans nuire à la généralité nous admettons que $x_{n_K} \in T_{n_K}(V_K^P)$. Pour

tous $K, K' \in \underline{K}^P$ et tout $u : K \longrightarrow K' \in Fl\underline{K}^P$ nous avons :
$h_n(V^P_{K'})(T_n(u)(x_{n_K})) = h_n(V^P_{K'})(x_{n_{K'}})$ et ainsi

$$\begin{aligned} M(u)(h_n(V^P_K)(x_{n_K})) &= h_n(V^P_{K'})(T_n(u)(x_{n_K})) \\ &= h_n(V^P_{K'})(x_{n_{K'}}). \end{aligned}$$

Pour cela

$$(h_n(V^P_K)(x_{n_K}))_{K\in\underline{K}^P} \in \varprojlim_{K\in\underline{K}^P} M(V^P_K) = M(V^P)$$

Conformément à la définition de ψ^P_n nous avons $(x_{n_K})_{K\in\underline{K}^P} \in \psi^P_n$. La définition de T_{n+1} fournit

$$x = (V^P \xrightarrow{id} V^P, (x_{n_K})_{K\in\underline{K}^P}) \in T_{n+1}(V^P)$$

qui vérifie

$$\begin{aligned} f(x/_{\approx h_\infty(V^P)}) &= (T_{n+1}(\beta^P_K)(x)/_{\approx h_\infty(V^P_K)})_{K\in\underline{K}^P} \\ &= ((V^P \xrightarrow{\beta^P_K} V^P_K; (x_{n_K})_{K\in\underline{K}^P})/_{\approx h_\infty(V^P_K)})_{K\in\underline{K}^P} \end{aligned}$$

Et nous avons

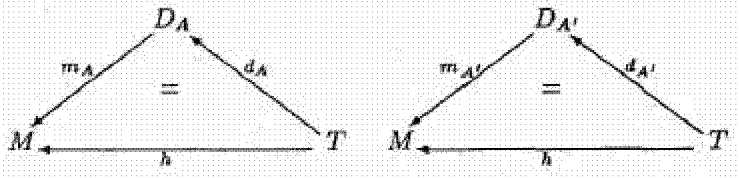
$$\begin{aligned} &h_\infty(V^P_K)(V^P \xrightarrow{\beta^P_K} V^P_K; (x_{n_K})_{K\in\underline{K}^P}) = \\ &M(\beta^P_K)(h_n(V^P_K)(x_{n_K})_{K\in\underline{K}^P}) = \\ &h_n(V^P_K)(x_{n_K}) = h_\infty(V^P_K)(x_{n_K}) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $f(x/_{h_\infty(V^P)}) = (x_{n_K}/_{\approx h_\infty(V^P_K)})_{K\in\underline{K}^P}$. Donc f est bien épi et pour cela une bijection.

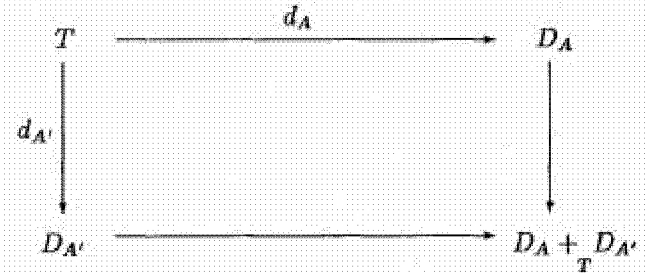
Ceci achève la preuve de l'existence d'un modèle factorisant (Première condition).

2.3.2 Les zig-zags entre les factorisations (deuxième condition)

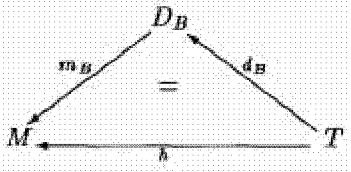
Dans cette sous-section nous allons vérifier la deuxième condition du *d.l.l.*
Soient $A, A' \in Ob\underline{A}$; $m_A \in Hom_{Mod[S]}(D_A, M)$ et $m_{A'} \in Hom_{Mod[S]}(D_{A'}, M)$ tels que (A, m_A) et $(A', m_{A'})$ satisfassent la première condition :



Alors il existe $n, n' \in \mathbb{N}$ avec $A \in Ob\mathcal{M}_n$ et $A' \in Ob\mathcal{M}_{n'}$. Nous avons par exemple $n' \leq n$. Comme $Ob\mathcal{M}_{n'} \subseteq Ob\mathcal{M}_n$, nous pouvons former la "somme amalgamée" suivante :



La propriété universelle de la somme amalgamée fournit un morphisme unique $m : D_A +_T D_{A'} \longrightarrow M$, qui est induit par le couple $(m_A, m_{A'})$. Comme il existe un morphisme de $D_A +_T D_{A'}$ vers un modèle, alors $\Xi(D_A +_T D_{A'}) \neq \emptyset$. Choisissons $B \in \Xi(D_A +_T D_{A'})$ $(\subseteq Ob\mathcal{M}_{n+1} \subseteq Ob\underline{A})$ tel qu'il existe $m_B : D_B \longrightarrow M$ rendant commutatif le diagramme suivant :



D'après la définition de $Fl\mathcal{M}_{n+1}$ nous disposons de flèches

$$A' \longrightarrow B \longleftarrow A.$$

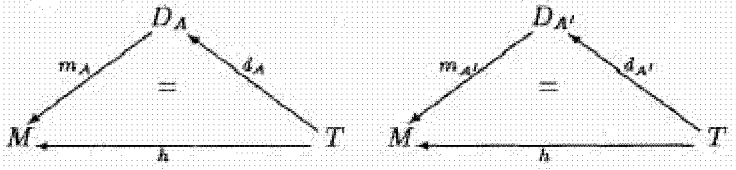
Il est clair que pour ce zig-zag la deuxième condition du diagramme localement libre est satisfaite. Ceci achève la démonstration du diagramme localement libre :
$(\underline{A}, D, d)$ est un diagramme localement libre du foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$, mais $(\underline{A}, D, d)$ est loin d'être l'unique.

2.4 LE D.L.L. EST RELATIVEMENT FILTRANT

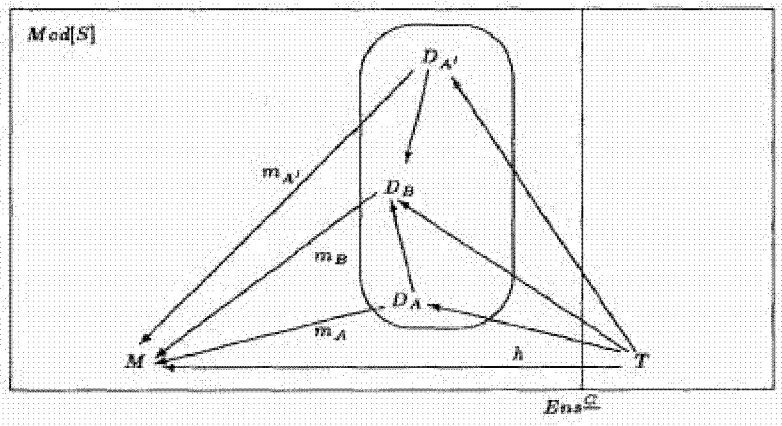
Proposition 2.4 : $(\underline{A}, D, d)$ n'est pas seulement un diagramme localement libre du foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$, mais il est aussi relativement filtrant.

Preuve : Nous rappelons les deux conditions suivantes de la propriété "relativement filtrant":

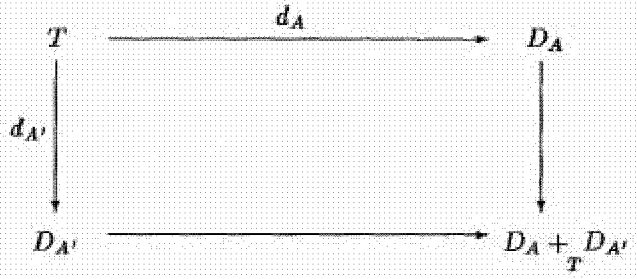
- Pour tout modèle $M \in Mod[S]$ et tout morphisme $(T \xrightarrow{h} M) \in Fl Ens^{\underline{C}}$, pour $A, A' \in Ob\underline{A}$, $m_A \in Hom_{Mod[S]}(D_A, M)$ et $m_{A'} \in Hom_{Mod[S]}(D_{A'}, M)$ tels que les diagrammes suivants commutent :



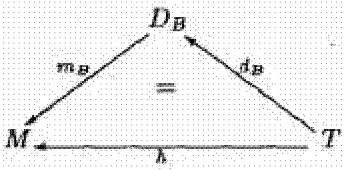
- il existe $B \in Ob\underline{A}$ et $m_B \in Hom_{Mod[S]}(D_B, M)$ et $A \longrightarrow B \longleftarrow A$ dans $Fl\underline{A}$ tels que dans $Mod[S]$ il existe un diagramme commutatif



Cette première condition est facile à vérifier. Soient M, h; A, A'; $m_A, m_{A'}$ comme introduits précédemment. Il existe alors $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $A \in Ob\mathcal{M}_n$ et $A' \in Ob\mathcal{M}_{n'}$. Nous avons par exemple $n' \leq n$. Comme $Ob\mathcal{M}_{n'} \subseteq Ob\mathcal{M}_n$, nous pouvons former la "somme amalgamée" suivante :

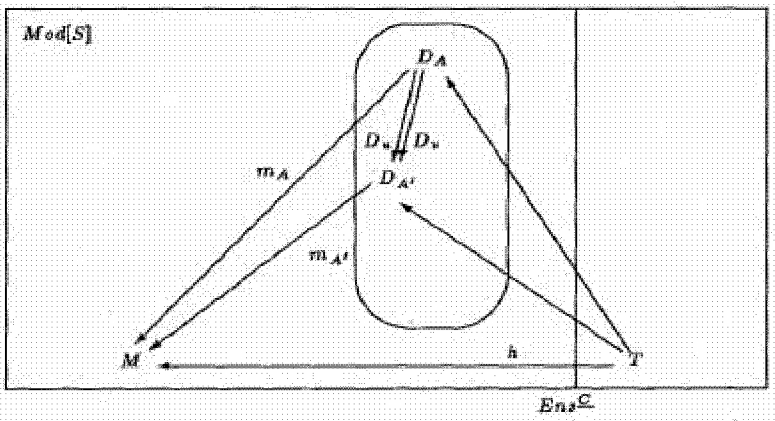


A cause de la propriété universelle de la somme amalgamée nous obtenons un morphisme unique $m : D_A +_T D_{A'} \longrightarrow M$, qui est induit de $(m_A, m_{A'})$. Ensuite nous pouvons choisir $B \in \Xi(D_A +_T D_{A'})(\subseteq Ob\mathcal{M}_{n+1} \subseteq Ob\underline{A})$ tel qu'il existe $m_B : D_B \longrightarrow M$ rendant commutatif le diagramme suivant :

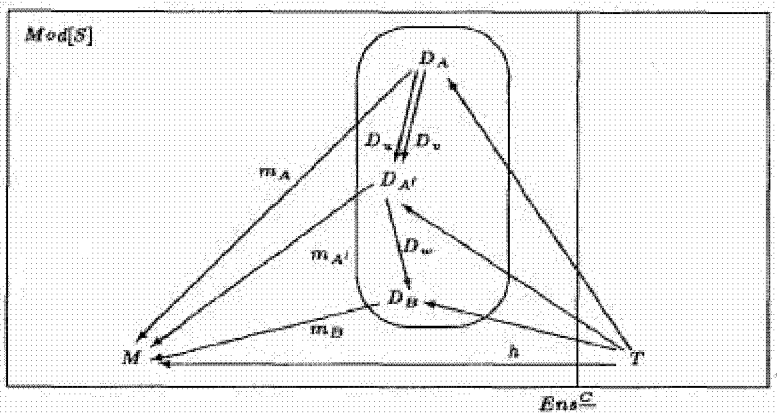


Nous avons donc trouvé $B \in Ob\underline{A}$, $m_B \in Hom_{Mod[S]}(D_B, M)$ et $A \longrightarrow B \longleftarrow A'$ dans $Fl\underline{A}$ qui satisfont la condition demandée.

- Pour tout modèle $M \in Mod[S]$ et tout morphisme $(T \xrightarrow{h} M) \in Fl Ens^{\underline{C}}$, pour $A, A' \in Ob\underline{A}$ et tout couple de flèches $u : A \longrightarrow A'$ et $v : A \longrightarrow A'$, pour $m_A \in Hom_{Mod[S]}(D_A, M)$ et pour $m_{A'} \in Hom_{Mod[S]}(D_{A'}, M)$ tels que le diagramme suivant commute :



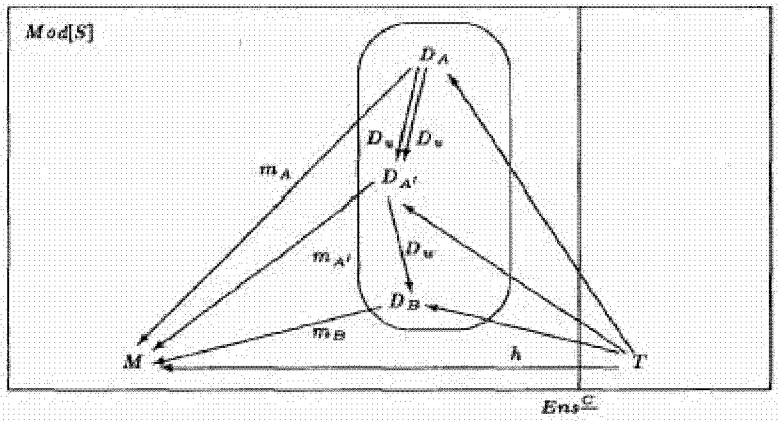
il existe $B \in Ob\underline{A}$ et $m_B \in Hom_{Mod[S]}(D_B, M)$ et $w : A' \longrightarrow B$ dans $Fl\underline{A}$ tels que $w \circ u = w \circ v$ et tels que le diagramme suivant commute dans $Ens^{\underline{C}}$:



Soient donc $M \in Mod[S]$, $h : T \longrightarrow M \in Fl Ens^{\underline{C}}$, soient $A, A' \in Ob\underline{A}$ et $u, v \in Fl\underline{A}$ un couple de flèches parallèles et $m_A \in Hom_{Mod[S]}(D_A, M)$, $m_{A'} \in Hom_{Mod[S]}(D_{A'}, M)$ comme précédemment. Il existe alors $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $u \in Fl\mathcal{M}_n$ et $v \in Fl\mathcal{M}_{n'}$. Supposons que $n' \leq n$. Comme $Fl\mathcal{M}_n \subseteq Fl\mathcal{M}_{n'}$, nous pouvons former le "coégalisateur" suivant :

$$D(A) \underset{D_v}{\overset{D_u}{\rightrightarrows}} D(A') \longrightarrow Coeq(D_u, D_v).$$

A cause de la propriété universelle du "coégalisateur" nous pouvons obtenir un morphisme unique $m : Coeq(D_u, D_v) \longrightarrow M$ qui est induit par $m_{A'}$. Pour cela $\Xi(Coeq(D_u, D_v)) \neq \emptyset$ et nous pouvons choisir $B \in \Xi(Coeq(D_u, D_v))$ (donc $B \in \mathcal{M}_{n+1}$). D'après la construction de $Fl\mathcal{M}_{n+1}$ il existe de plus $w : A' \longrightarrow B$ dans $Fl\mathcal{M}_{n+1}$ avec $w \circ u = w \circ v$ et tels que le diagramme suivant commute dans $Ens^{\underline{C}}$:



Ceci montre donc que $(\underline{A}, D, d)$ est un diagramme localement libre relativement filtrant. L'on se convainc facilement qu'un diagramme localement libre relativement filtrant n'est pas unique. Au chapitre 3 nous verrons que la notion du diagramme localement libre relativement filtrant fournit sur le plan géométrique une construction unique à équivalence d'homotopie près, d'où l'intérêt du raffinement "relativement filtrant".

Chapitre 3

LA GEOMETRIE DES ESQUISSES

Ce chapitre a été l'objet d'un exposé au $53^{ième}$ Peripatetic Seminar on Sheaves and Logic[1]. Le but de ce paragraphe est de rappeler les constructions de la réalisation géométrique de Milnor et de la cohomologie d'André et d'appliquer ces constructions aux esquisses.

3.1 LA REALISATION GEOMETRIQUE DE MILNOR

La catégorie simpliciale Δ est définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} Ob\Delta & = & \{[n] \mid [n] = \{0, \ldots, n\} \text{ est un ordinal fini}\} \\ Fl\Delta & = & \{f : [m] \longrightarrow [n] \mid \forall i, j \in [m] : i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)\}. \end{array}$$

Pour toute catégorie $\mathcal{D}$, non nécessairement petite, son nerf (noté $N\mathcal{D}$) est le foncteur suivant :

$$\begin{array}{rccccc} N\mathcal{D} : & \Delta^{op} & \longrightarrow & Ens & & \\ & [n] & \longmapsto & \mathcal{D}^{[n]} := Fonct([n], \mathcal{D}) & & \\ & ([m] \xrightarrow{f^{op}} [n]) & \longmapsto & (Fonct([n], \mathcal{D}) & \longrightarrow & Fonct([m], \mathcal{D})) \\ & & & G & \longmapsto & G \circ f \end{array}$$

où l'ensemble ordonné $[n]$ est considéré comme catégorie.
Le n-simplexe standard ($n \in \mathbb{N}$) est la partie suivante de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta_n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}$$

Nous munissons $N\mathcal{D}([n])$ de la topologie discrète et Δ_n de la topologie induite par $\mathbb{R}^{n+1}$ et définissons donc pour toute catégorie $\mathcal{D}$ non nécessairement petite sa réalisation géométrique $B\mathcal{D}$ de la façon suivante

$$B\mathcal{D} \equiv \coprod_{n \in \mathbb{N}} (N\mathcal{D}([n]) \times \Delta_n)/_{\approx}.$$

[1] $53^{ième}$ P.S.S.L., Trieste(Italie), 11-12 septembre 1993

où "$\approx$" est la relation d'équivalence engendré par les deux relations suivantes :

$$\begin{array}{rl} < (f_1,\ldots,f_{i-1},f_{i+1}\circ f_i,f_{i+2},\ldots,f_n),(t_0,\ldots,t_{n-1}) > & \sim \\ < (f_1,\ldots,f_n),(t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_{n-1}) > & \\ < (f_1,\ldots,f_i,id_{Cod f_i},f_{i+1},\ldots,f_n),(t_0,\ldots,t_{n+1}) > & \sim \\ < (f_1,\ldots,f_n),(t_0,\ldots,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},\ldots,t_{n+1}) > & \end{array}$$

$B\mathcal{D}$ est un CW-complexe dont les n-cellules correspondent exactement aux n-simplexes non-dégénérés de $N\mathcal{D}$ (où $(f_1,\ldots,f_n) \in N\mathcal{D}([n])$ est appelé n-simplexe non-dégénéré de $N\mathcal{D}$ si aucun f_i n'est l'identité).
Pour pouvoir appliquer cette notion avec bénéfice aux esquisses, nous devons parler ici du théorème A de Quillen qui servira comme moyen d'élaborer une certaine équivalence d'homotopie.

3.2 LE THEOREME A DE QUILLEN

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux catégories non nécessairement petites et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur, f induit canoniquement une application cellulaire $Bf : B\mathcal{D} \longrightarrow B\mathcal{D}'$.
Le foncteur $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est appelé équivalence d'homotopie si $Bf : B\mathcal{D} \longrightarrow B\mathcal{D}'$ est une équivalence d'homotopie.
La catégorie $\mathcal{D}$ est dite contractile si $B\mathcal{D}$ est contractile. On a les résultats suivants :

Lemme 3.2.1 : $B\mathcal{D}$ et $B\mathcal{D}^{op}$(la catégorie duale) sont homéomorphes.

Lemme 3.2.2 : Si $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ admet un adjoint à gauche ou à droite alors f est une équivalence d'homotopie.

Lemme 3.2.3 : si $\mathcal{D}$ admet un objet initial ou terminal, alors $\mathcal{D}$ est contractile.

Lemme 3.2.4 : toute catégorie filtrante est contractile.

Maintenant nous allons énoncer une version duale du théorème A tel qu'il se trouve dans l'article[2].

Théorème A **:** Pour le foncteur $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ et $Y \in Ob\mathcal{D}'$ considérons la comma catégorie $f \downarrow Y$:
$Ob(f \downarrow Y) = \{(X, fX \xrightarrow{v} Y)/X \in Ob\mathcal{D}, v \in Fl\mathcal{D}'\}$
$Fl(f \downarrow Y) = \{u : (X, fX \xrightarrow{v} Y) \longrightarrow (\overline{X}, f\overline{X} \xrightarrow{\overline{v}} Y)/u : X \longrightarrow \overline{X}, \overline{v} \circ fu = v\}$
Si, pour tout $Y \in Ob\mathcal{D}'$, $f \downarrow Y$ est contractile, alors f est une équivalence d'homotopie.

3.3 REALISATION GEOMETRIQUE ET ESQUISSES

Dans cette section nous allons appliquer le théorème A de Quillen aux esquisses[3]. Soit $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ un foncteur de la catégorie sous-jacente de l'esquisse S vers les ensembles. Nous nous intéressons dans la suite non seulement à $Mod[S]$, aux réalisations ensemblistes de l'esquisse S, mais aussi aux réalisations ensemblistes de S relatives au foncteur T, c'est-à-dire à la comma-catégorie $T \downarrow Mod[S]$ où :
$Ob(T \downarrow Mod[S]) = \{(T \xrightarrow{h} M, M)/M \in ObMod[S], h \in Hom_{\underline{C}}(T, M)\}$
$Fl(T \downarrow Mod[S]) = \{m : (h, M) \longrightarrow (\overline{h}, \overline{M})/m : (M \longrightarrow \overline{M}) \in FlMod[S], m \circ h = \overline{h}\}$
Si T est le foncteur vide, alors $T \downarrow Mod[S]$ et $Mod[S]$ sont isomorphes. En général $T \downarrow Mod[S]$ est une

[2] voir D. Quillen, Algebraic K-Theory I,S.L.N. num. 341, p.85
[3] voir R. Guitart, On the Geometry of Computations, Cahiers de Topologie et Geométrie Différentielle Catégorique, Vol. XXVII-4 (1986)

"grosse" catégorie et donc $B(T \downarrow Mod[S])$ est en général un "gros" CW-complexe. Mais nous pouvons construire une petite catégorie dont la réalisation géométrique est en équivalence d'homotopie avec le "gros" CW-complexe $B(T \downarrow Mod[S])$. En effet considérons le diagramme localement libre relativement filtrant de T construit au chapitre 2 :

- avec la petite catégorie $\underline{A} = \underline{A}(T,S)$
- avec le diagramme de foncteurs $D = D(T,S) : \underline{A}(T,S) \longrightarrow Mod[S]$
- avec le cône projectif $d = d(T,S) = (d(A) : T \longrightarrow D(A))_{A \in \underline{A}}$.

Nous pouvons ainsi définir le foncteur

$$E : \quad \begin{array}{ccc} \underline{A} & \longrightarrow & T \downarrow Mod[S] \\ A & \longmapsto & (d(A) : T \longrightarrow D(A)) \\ (A \xrightarrow{v} B) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} & T & \\ d(A) \swarrow & & \searrow d(B) \\ D(A) & \xrightarrow[D(v)]{} & D(B) \end{array} \right) \end{array}$$

Nous voudrions appliquer le théorème A de Quillen pour montrer que E est une équivalence d'homotopie. Pour cela considérons $h : T \longrightarrow M \in Ob(T \downarrow Mod[S])$ et construisons la comma-catégorie $E \downarrow h$:

$$Ob E \downarrow h = \{ \quad T \quad / \quad A \in Ob\underline{A}, m(A) \in Fil T \downarrow Mod[S] \}$$

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \swarrow & & \searrow \\ D(A) & \longrightarrow & M \end{array}$$

$$Fl E \downarrow h = \{ \quad T \quad / \quad A \xrightarrow{v} B \in Fl\underline{A}, m(A), m(B) \in Fil T \downarrow Mod[S] \}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & d(A) \swarrow & \downarrow & \searrow d(B) & \\ & & M & & \\ & m(A) \nwarrow & & \nearrow m(B) & \\ D(A) & & \xrightarrow[D(v)]{} & & D(B) \end{array}$$

Par la définition de la notion du diagramme localement libre relativement filtrant il s'en suit que $E \downarrow h$ est filtrant et donc par le lemme 3.2.4 que $E \downarrow h$ est contractile.
En appliquant le théorème A de Quillen nous obtenons une équivalence d'homotopie :

$$E : \underline{A}(T,S) \longrightarrow T \downarrow Mod[S]$$

Ceci signifie que le "gros" CW-complexe $B(T \downarrow Mod[S])$ a le même type d'homotopie que le "petit" CW-complexe $B\underline{A}$.
De plus il s'ensuit en particulier que si $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ sont les deux catégories sous-jacentes de deux diagrammes localement libres relativement filtrants de T, alors $B\underline{A}$ et $B\underline{A}'$ ont le même type d'homotopie. Ainsi notons le "petit" type d'homotopie de $B\underline{A}$ par $g(T,S)$, puisqu'il ne dépend que de T et de S. Si T est le foncteur vide, nous parlons brièvement du type d'homotopie de l'esquisse S et notons $gS = g(\emptyset, S)$. Donc gS est en équivalence d'homotopie avec $Mod[S]$.

3.4 LES FONCTEURS π_n $(n \in \mathbb{N})$

Nous présentons ici une synthèse des travaux d'Evrard [4] et renvoyons également à des notes de Guitart [5]. Cat (resp. Cat^*) désigne la catégorie dont les objets sont les petites catégories (resp. les petites catégories pointées) et dont les morphismes sont les foncteurs covariants (resp. les foncteurs covariants conservant les points). Pour une catégorie $\underline{I} \in Cat$, $\Lambda(\underline{I})$, *la catégorie des chemins de* $\underline{I}$, a comme objets les zig-zags et comme flèche les morphismes d'Evrard entre zig-zags (nous renvoyons à son article dans le bulletin de la société Math. de France, 1975). Cette construction définit un foncteur $\Lambda : Cat \longrightarrow Cat$. Ensuite si la catégorie $\underline{I} \in Cat$ est pointée en I_0, on note $\Omega(\underline{I}, I_0)$ la *catégorie des lacets* de $\underline{I}$ en I_0. Cette construction définit de nouveau un foncteur $\Omega : Cat^* \longrightarrow Cat^*$. Pour tout entier $n > 0$, on définit par induction des foncteurs $\Lambda^n : Cat \longrightarrow Cat$ et $\Omega^n : Cat^* \longrightarrow Cat^*$ où $\Lambda^n(\underline{I}) = \Lambda(\Lambda^{n-1}(\underline{I}))$ et $\Omega^n(\underline{I}, I_0) = \Omega(\Omega^{n-1}(\underline{I}, I_0))$.
Si $\underline{I} \in Cat$ est une catégorie, nous notons par "$\approx$" la relation d'équivalence suivante :
Pour $I, J \in Ob\underline{I}$: $I \approx J$ ssi il existe un zig-zag entre I et J. On définit ainsi l'ensemble :

$$\Pi_0(\underline{I}) \stackrel{def}{=} Ob\underline{I}/_{\approx}.$$

Par extension nous avons pour $n > 0$ des ensembles :

$$\begin{aligned} \Pi_n(\underline{I}) &\stackrel{def}{=} \Pi_0(\Lambda^n(\underline{I})) \\ \Pi_n(\underline{I}, I_0) &\stackrel{def}{=} \Pi_0(\Omega^n(\underline{I}, I_0)). \end{aligned}$$

$\Pi_1(\underline{I})$, donc aussi $\Pi_n(\underline{I})$, est un groupoïde pour la composition des zig-zags et $\Pi_1(\underline{I}, I_0)$, donc aussi $\Pi_n(\underline{I}, I_0)$, est un groupe pour la composition naturelle des lacets; de plus, $\Pi_n(\underline{I}, I_0)$ est abélien pour $n > 1$. Nous avons en particulier $\Pi_1(\underline{I}) = \underline{I}[\underline{I}^{-1}]$ où $\underline{I}[\underline{I}^{-1}]$ est la catégorie de fraction [6] de $\underline{I}$. Evrard démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Pi_n(\underline{I}, I_0) \cong \Pi_n(B\underline{I}, *)$ où $\Pi_n(B\underline{I}, *)$ est le $n^{ième}$ groupe d'homotopie d'un espace topologique.

3.5 LA COHOMOLOGIE D'ANDRE

Nous introduisons dans cette section la cohomologie d'André [7] sous les notations introduites de Guitart [8]. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie non-nécessairement petite et $F : \mathcal{D} \longrightarrow Ab$ un foncteur de $\mathcal{D}$ vers la catégorie des groupes abéliens. Le $n^{ième}$ membre du complexe de cochaîne est défini par

$$C^n(\mathcal{D}, F) = \prod_{(x_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} x_n) \in N\mathcal{D}([n])} F(x_n)$$

---

[4] voir M. Evrard, Homotopie d'un espace topologique relativement à un recouvrement. Application à l'homotopie des préschémas, Thèse d'Etat, Université Paris 7,1973.
M. Evrard, Fibration de petites catégories, Bull. Soc. Math. France 103, p.241-265, 1975

[5] voir R. Guitart, Construction of an Homology and a Cohomology Theory Associated to a First Order Formula, Journées d'Etudes Esquisses, Logique et Informatique Théorique, Université Paris 7, 27 juin-2juillet 1988

[6] voir P. Gabriel et M. Zisman, Calculus of Fraction and Homotopy Theory, Springer-Verlag, 1967, p.6

[7] voir Michel André, Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative, S.L.N. 32, 1967

[8] voir R. Guitart, Construction of an Homology and a Cohomology Theory Associated to a First Order Formula, Journées d'Etudes Esquisses, Logique et Informatique Théorique, Université Paris 7, 27 juin-2juillet 1988

avec la différentielle $d^n : C^n(\mathcal{D}, F) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{D}, F)$

$$\begin{aligned} d^n(x)_{(x \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n+1}} x_{n+1})} &= F(g_{n+1})(x_{(x_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} x_n)}) \\ &- x_{(x_1 \xrightarrow{g_1} \dots \to x_{n-1} \xrightarrow{g_{n+1} \circ g_n} x_{n+1})} \\ &+ \cdots \\ &\pm x_{(x_1 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_{n+1}} x_{n+1})}. \end{aligned}$$

Devant le dernier terme nous avons "+" si n est impair et "−" si n est pair. Et finalement nous définissons les groupes de cohomologie par

$$H^n(\mathcal{D}, F) = Ker d^n / Im d^{n-1}$$

Nous avons le résultat suivant [9]:

Proposition 3.5 : Si $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ est un foncteur alors $H^n(T \downarrow Mod[S], F)$ dépend uniquement du type d'homotopie du CW-complexe $B(T \downarrow Mod[S])$.

3.6 CALCUL RELATIF DE Π_0 , Π_1, H^n $(n \in \mathbb{N})$

3.6.1 Introduction

Le but de ce paragraphe est de régler, de façon élémentaire, l'influence que jouent les composantes connexes de l'esquisse S sur le calcul de Π_0, Π_1 et H^n $(n \in \mathbb{N})$.
Rappelons que Esq désigne la catégorie qui a comme objets les esquisses et comme flèches les morphismes entre esquisses. $(f : (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\underline{C}', \mathbb{I}', \mathbb{P}')$ est un morphisme d'esquisses si f est un foncteur $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ tel que

$$\begin{aligned} \forall I \in \mathbb{I} \quad &: \quad f(I) \in \mathbb{I}' \\ \forall P \in \mathbb{P} \quad &: \quad f(P) \in \mathbb{P}'). \end{aligned}$$

Si M est un ensemble et $(S_m)_{m \in M}$ une famille d'esquisses, alors on peut définir dans Esq la somme à isomorphisme près :

$$\coprod_{m \in M} S_m = (\coprod_{m \in M} \underline{C}_m, \coprod_{m \in M} \mathbb{I}_m, \coprod_{m \in M} \mathbb{P}_m).$$

En particulier si $S = \coprod_{m \in M} S_m$, alors $\Pi_0(S) = \coprod_{m \in M} \Pi_0(S_m)$ De l'autre côté si S est une esquisse quelconque et $\Pi_0(S) = \{$composante connexes de S$\}$, alors $S = \coprod_{R \in \Pi_0(S)} R$ (i.e S est la somme de ses composantes connexes).
Pour la suite de ce paragraphe soit $(S_m)_{m \in M}$ une famille d'esquisses quelconques, $S = \coprod_{m \in M} S_m$ et $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ un foncteur de la catégorie sous-jacente de S vers les ensembles. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.6.1 : $T \downarrow Mod[S]$ est isomorphe à $\prod_{m \in M} (T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m}$ où $T/_{S_m}$ est le foncteur T restreint à l'esquisse S_m.

---

[9] voir R. Guitart, Construction of an homology and a cohomology theory associated to a first order formula, Journées d'Etudes Esquisses, Logique et Informatique Théorique, Université Paris 7, 27 juin- 2 juillet 1988

Preuve : Il est facile de voir que le foncteur "multi-restriction" $f : T \downarrow Mod[S] \longrightarrow \prod_{m\in M}(T/_{S_m} \downarrow Ens^{S_m})$ qui associe à toute flèche $(T \xrightarrow{h} M)$ la famille de flèches $(h/_{S_m} : T/_{S_m} \longrightarrow M/_{S_m})_{m\in M}$ où $h/_{S_m}$ est la transformation naturelle h restreinte à S_m, est un isomorphisme. □

3.6.2 Le calcul relatif de Π_0

La remarque suivante de J.Bénabou exprime le nombre de composantes connexes d'une catégorie comme limite inductive du foncteur constant :

Remarque : Si $const : \underline{C} \longrightarrow Ens$ désigne le foncteur constant qui envoie les objets d'une catégorie $\underline{C}$ sur l'objet terminal de Ens, alors nous pouvons exprimer $\Pi_0(\underline{C})$ comme limite inductive de ce foncteur :

$$\Pi_0(\underline{C}) = Colim(\underline{C} \xrightarrow{const} Ens)$$

Afin de pouvoir appliquer Π_0 au lemme 3.6.1, nous devons montrer que Π_0 commute aux produits. Pour cela considérons une famille de catégories non nécessairement petites $(\mathcal{D}_m)_{m\in M}$. Rappelons que pour tout $m \in M$ nous avons $\Pi_0(\mathcal{D}_m) = Ob\mathcal{D}_m/_{\approx}$ où $\approx$ est la relation d'équivalence suivante :

$$x, y \in Ob\mathcal{D}_m : x \approx y \Leftrightarrow \text{il existe dans } \mathcal{D}_m \text{ un zig-zag qui combine } x \text{ et } y.$$

$\Pi_0(\mathcal{D}_m)$ peut être un ensemble ou une classe. Les éléments de $\Pi_0(\prod_{m\in M}\mathcal{D}_m)$ seront notés par $cl((x_m)_{m\in M})$ avec $(x_m)_{m\in M} \in \prod_{m\in M} Ob\mathcal{D}_m$, tandis que pour tout $m \in M$ les éléments de $\Pi_0(\mathcal{D}_m)$ seront notés par $[x_m]$ avec $x_m \in Ob\mathcal{D}_m$.

Lemme 3.6.2 [10]: Si M est fini, il y a une bijection $\Pi_0(\prod_{m\in M}\mathcal{D}_m) \cong \prod_{m\in M}\Pi_0(\mathcal{D}_m)$.

Preuve : posons

$$\begin{array}{rcl} f : \Pi_0(\prod_{m\in M}\mathcal{D}_m) & \longrightarrow & \prod_{m\in M}\Pi_0(\mathcal{D}_m) \\ cl((x_m)_{m\in M}) & \longmapsto & ([x_m])_{m\in M}. \end{array}$$

Par la définition du produit de catégories, il est clair que f est bien défini.

f **est injectif :** supposons que nous avons $f(cl((x_m)_{m\in M})) = (cl((y_m)_{m\in M}))$. Il s'en suit que pour tout $m \in M$: $[x_m] = [y_m]$. Donc pour tout $m \in M$, il existe dans $\mathcal{D}_m$ un zig-zag qui combine x_m et y_m. Comme M est supposé fini, nous pouvons trouver un zig-zag dans $\prod_{m\in M}\mathcal{D}_m$ qui combine $(x_m)_{m\in M}$ et $(y_m)_{m\in M}$, en mettant bout à bout les zig-zags de $\mathcal{D}_m$ qui combinent x_m et y_m.

f **est surjectif :** ceci est immédiat. □

Nous supposons jusqu'à la fin de cette sous-section que M est fini. En posant $\mathcal{D}_m = (T/S_m) \downarrow Ens^{S_m}$, nous pouvons appliquer le résultat de ce lemme et du lemme de 3.6.1 de la manière suivante :

$$\begin{array}{lllll} \Pi_0 g(T,S) & \cong & \Pi_0(B(T \downarrow Mod[S])) \cong \Pi_0(T \downarrow Mod[S]) & \cong & \Pi_0(\prod_{m\in M}(T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m}) \\ & \cong & \prod_{m\in M}\Pi_0((T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m}) & \cong & \prod_{m\in M}\Pi_0(B((T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m})) \\ & \cong & \prod_{m\in M}\Pi_0 g(T/_{S_m}, S_m). & & \end{array}$$

[10] voir M. Evrard, Homotopie d'un espace topologique relativement à un recouvrement. Application à l'homotopie des préschémas, Thèse d'Etat. Sur la page 48 (proposition III.4) se trouve un énoncé plus général : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout couple d'objets $(\underline{I}, \underline{J})$ de Cat^* : $\pi_n(\underline{I} \times \underline{J}) \cong \pi_n(\underline{I}) \times \pi_n(\underline{J})$. Nous allons présenter pour $n = 0$ et en 3.6.3 pour $n = 1$ des preuves adaptées à ces cas spéciaux.

De même nous pouvons trouver un résultat similaire pour Π_1 :

3.6.3 Le calcul relatif de Π_1

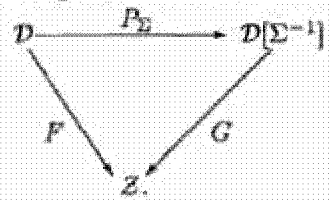
Nous renvoyons à la référence en bas de page du lemme 3.6.2. Nous souhaitons tirer bénéfice à nouveau du lemme 3.6.1. Comme $\Pi_1 B\mathcal{D} \cong \mathcal{D}[\mathcal{D}^{-1}]$, nous allons montrer que l'opération d'inverser les flèches commute aux produits finis. Pour cela rappelons le théorème suivant :

Théorème de Gabriel-Zisman [11] :

Soit $\mathcal{D}$ une catégorie. Pour toute partie $\Sigma \subseteq Fl\mathcal{D}$ il existe une unique catégorie (à isomorphisme près) $\mathcal{D}[\Sigma^{-1}]$ et un foncteur $P_\Sigma : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}[\Sigma^{-1}]$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $\sigma \in \Sigma$, $P_\Sigma(\sigma)$ est un isomorphisme

(ii) pour tout foncteur $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{Z}$ qui vérifie (i), il existe un unique foncteur $G : \mathcal{D}[\Sigma^{-1}] \longrightarrow \mathcal{Z}$ tel que le diagramme suivant commute :



$\mathcal{D}[\Sigma^{-1}]$ a les mêmes objects que $\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont maintenant deux catégories non nécessairement petites, nous allons montrer que

$$(\mathcal{D} \times \mathcal{E})[(\mathcal{D} \times \mathcal{E})^{-1}] \cong \mathcal{D}[\mathcal{D}^{-1}] \times \mathcal{E}[\mathcal{E}^{-1}].$$

Choisissons $P_\mathcal{D} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}[\mathcal{D}^{-1}]$ et $P_\mathcal{E} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}[\mathcal{E}^{-1}]$ conformément aux notations du théorème de Gabriel-Zisman.
Nous obtenons ainsi le foncteur canonique $P_\mathcal{D} \times P_\mathcal{E} : \mathcal{D} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}[\mathcal{D}^{-1}] \times \mathcal{E}[\mathcal{E}^{-1}]$. Maintenant nous pouvons vérifier les deux propriétés en question du théorème de Gabriel-Zisman pour ce produit :

(i) pour tout $(f, g) \in Fl(\mathcal{D} \times \mathcal{E})$:
$(P_\mathcal{D} \times P_\mathcal{E})(f, g) = (P_\mathcal{D}(f), P_\mathcal{E}(g))$ est un isomorphisme.

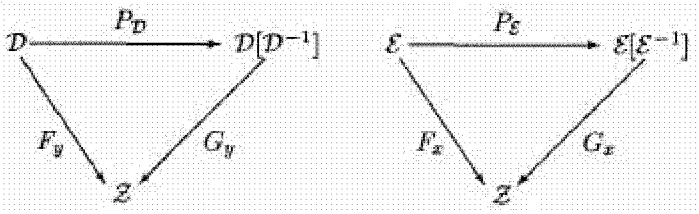
(ii) soit $F : \mathcal{D} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Z}$ un foncteur qui vérifie (i). Pour tout $x \in Ob\mathcal{D}$ et tout $y \in Ob\mathcal{E}$ nous pouvons définir les foncteurs :

$$\begin{array}{rccl} F_y : & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{Z} \\ & x & \longmapsto & F(x, y) \\ & (x \xrightarrow{f} \overline{x}) & \longmapsto & (F(x, y) \xrightarrow{F(f, id)} F(\overline{x}, y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} F_x : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{Z} \\ & y & \longmapsto & F(x, y) \\ & (y \xrightarrow{g} \overline{y}) & \longmapsto & (F(x, y) \xrightarrow{F(id, g)} F(x, \overline{y})). \end{array}$$

Selon le théorème de Gabriel-Zisman il existe des foncteurs uniques $G_y : \mathcal{D}[\mathcal{D}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{Z}$ et $G_x : \mathcal{E}[\mathcal{E}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{Z}$ qui rendent commutatifs les diagrammes suivants :

[11] voir Gabriel et M. Zisman, Calculus of Fraction and Homotopy Theory, Springer-Verlag, 1967, p.6



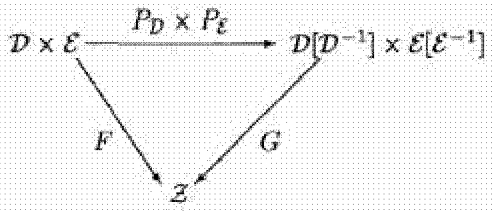
Ainsi nous définissons de façon canonique

$$\begin{array}{rcl} G : \mathcal{D}[\mathcal{D}^{-1}] \times \mathcal{E}[\mathcal{E}^{-1}] & \longrightarrow & \mathcal{Z} \\ (x,y) & \longmapsto & F(x,y) = F_y(x) = F_x(y) = G_y(x) = G_x(y) \\ ((x,y) \xrightarrow{(f,g)} (\overline{x},\overline{y})) & \longmapsto & (F(x,y) \xrightarrow{G_y(f)} F(\overline{x},y) \xrightarrow{G_{\overline{x}}(g)} F(\overline{x},\overline{y})) \end{array}$$

A cause des égalités suivantes

$$\begin{array}{rcl} G(P_{\mathcal{D}} \times P_{\mathcal{E}})((x,y) \xrightarrow{(f,g)} (\overline{x},\overline{y})) & = & G((x,y) \xrightarrow{(P_{\mathcal{D}}(f),P_{\mathcal{E}}(g))} (\overline{x},\overline{y})) \\ & = & F(x,y) \xrightarrow{G_y(P_{\mathcal{D}}(f))} F(\overline{x},y) \xrightarrow{G_{\overline{x}}(P_{\mathcal{E}}(g))} F(\overline{x},\overline{y}) \\ & = & F(x,y) \xrightarrow{F_y(f)} F(\overline{x},y) \xrightarrow{F_{\overline{x}}(g)} F(\overline{x},\overline{y}) \\ & = & F((x,y) \xrightarrow{(f,id)} (\overline{x},y) \xrightarrow{(id,g)} (\overline{x},\overline{y})) \\ & = & F((x,y) \xrightarrow{(f,g)} (\overline{x},\overline{y})) \end{array}$$

il s'ensuit que le diagramme suivant est commutatif :



Remarquons que G est bien un foncteur. Cela peut se voir soit en présentant les éléments de $\mathcal{D}[\mathcal{D}^{-1}]$ et $\mathcal{E}[\mathcal{E}^{-1}]$ par des zig-zags de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ soit en montrant que G s'obtient directement par deux applications successives du fait que si $\Sigma \subset Fl\mathcal{D}$, alors

$$\mathcal{D} \times \mathcal{E}[(\Sigma \times \mathcal{E}_1)^{-1}] \simeq \mathcal{D}[\Sigma^{-1}] \times \mathcal{E},$$

fait qui résulte de ce que $F : \mathcal{D} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Z}$ inverse les éléments de $\Sigma \times \mathcal{E}_1$ si et seulement si $\overline{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{Z}^{\mathcal{E}}$ défini par $\overline{F}(x)(y) = F(x,y)$ inverse les éléments de Σ.
Nous pouvons donc conclure avec le théorème de Gabriel-Zisman que $(\mathcal{D} \times \mathcal{E})[(\mathcal{D} \times \mathcal{E})^{-1}] \cong \mathcal{D}[\mathcal{D}^{-1}] \times \mathcal{E}[\mathcal{E}^{-1}]$.
De plus nous pouvons étendre l'argumentation aux produit finis :

Lemme 3.6.3 : si M est fini et $(\mathcal{D}_m)_{m \in M}$ une famille de catégories non nécessairement petites, alors :

$$(\coprod_{m \in M} \mathcal{D}_m)[(\coprod_{m \in M} \mathcal{D}_m)^{-1}] \cong \coprod_{m \in M} \mathcal{D}_m[\mathcal{D}_m^{-1}]$$

De ce lemme et du lemme de 3.6.1 nous pouvons déduire les isomorphismes

$$\begin{aligned}
\Pi_1 g(T,S) &\cong \Pi_1(B(T \downarrow Mod[S])) \cong T \downarrow Mod[S][(T \downarrow Mod[S])^{-1}] \\
&\cong \prod_{m\in M}(T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m}[(\prod_{m\in M}(T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m})^{-1}] && \text{lemme 3.6.1} \\
&\cong \prod_{m\in M}((T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m}[((T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m})^{-1}]) && \text{lemme 3.6.3} \\
&\cong \prod_{m\in M}\Pi_1(B((T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m})) \\
&\cong \prod_{m\in M}\Pi_1 g(T/_{S_m}, S_m)
\end{aligned}$$

Le même type de résultat est aussi valable pour H^n $(n \in \mathbb{N})$.

3.6.4 Le calcul relatif de H^n $(n \in \mathbb{N})$

Nous n'allons pas démontrer le calcul relatif dans toute sa généralité, mais nous allons soumettre la restriction suivante (de nouveau soit M un ensemble quelconque) :
Nous n'allons admettre que des foncteurs $F : T \downarrow Mod[S] \longrightarrow Ab$ pour lesquels il existe une famille $(F_m)_{m\in M}$ avec $F_m : (T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m} \longrightarrow Ab$ telle que
(i) $\forall h : T \longrightarrow G \in T \downarrow Mod[S] : F(h) = \prod_{m\in M} F_m(h/_{S_m})$

(ii) $\forall \begin{pmatrix} & T & \\ G & & H \end{pmatrix} \in T \downarrow Mod[S] : F(\eta) = \prod_{m\in M} F_m(\eta/_{S_m}) : \prod_{m\in M} F_m(G/_{S_m}) \longrightarrow \prod_{m\in M} F_m(H/_{S_m})$

Soit $F : T \downarrow Mod[S] \longrightarrow Ab$ donc un tel foncteur pour le reste de cette sous-section avec la famille $(F_m)_{m\in M}$. Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.6.4.1 : Pour $m \in M$ soit Δ_m un ensemble quelconque. De plus on dispose pour tout $m \in M$ et $x_m \in \Delta_m$ des ensembles $\Gamma(x_m)$. Nous avons une bijection entre
$\prod_{(x_m)_{m\in M} \in \prod_{m\in M}\Delta_m} (\prod_{m\in M}\Gamma(x_m))$ et $\prod_{m\in M}\prod_{x_m\in\Delta_m}\Gamma(x_m)$

Preuve : Posons

$$\begin{aligned}
\prod_{(x_m)_{m\in M} \in \prod_{m\in M}\Delta_m} (\prod_{m\in M}\Gamma(x_m)) &\longrightarrow \prod_{m\in M}\prod_{x_m\in\Delta_m}\Gamma(x_m) \\
(((y_m)_{m\in M})_{(x_m)_{m\in M}})_{(x_m)_{m\in M} \in \prod_{m\in M}\Delta_m} &\longmapsto (((y_m)_{x_m})_{x_m\in\Delta_m})_{m\in M}
\end{aligned}$$

Cette application définit bien une bijection ▫

Considérons ensuite pour tout $m \in M$ les nerfs $N(T \downarrow Mod[S])$ et $N((T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m})$. Nous avons de nouveau une propriété de produit :

Lemme 3.6.4.2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $N(T \downarrow Mod[S])([n]) \cong \prod_{m\in M} N((T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m})([n])$

Preuve : La bijection est donnée par l'application :

$$\begin{aligned}
N(T \downarrow Mod[S])([n]) &\longrightarrow \prod_{m\in M} N((T/_{S_m}) \downarrow Ens^{S_m})([n]) \\
(T \to M_0 \to \ldots \to M_n) &\longmapsto (T/_{S_m} \to M_0/_{S_m} \to \ldots \to M_n/_{S_m}) \quad ▫
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser lemme 3.6.4.1 et lemme 3.6.4.2 de la manière suivante, en employant la définition du complexe de cochaîne :

$$\begin{aligned}
C^n(T,F) &= \prod_{(T\to M_0\to\ldots\to M_n)\in N(T\downarrow Mod[S])([n])} F(M_n) \\
&= \prod_{(T/_{S_m}\to M_0^m\to\ldots\to M_n^m)_{m\in M}\in \prod_{m\in M} N((T/_{S_m})\downarrow Ens^{S_m})([n])} \prod_{m\in M} F_m(M_n^m) \\
&\qquad \text{(lemme 3.6.4.2 et hypothèse sur } F) \\
&= \prod_{m\in M} \prod_{(T/_{S_m}\to M_0^m\to\ldots\to M_n^m)\in N((T/_{S_m})\downarrow Ens^{S_m})([n])} F_m(M_n^m) \\
&\qquad \text{(lemme 3.6.4.1)} \\
&= \prod_{m\in M} C^n(T/_{S_m}, F_m).
\end{aligned}$$

Soit d^n la différentielle de $C^n(T,F)$ et d_m^n la différentielle de $C^n(T/_{S_m}, F_m)$.
Rappelons la définition de d^n :

$$\begin{aligned}
d^n(x)_{(T\xrightarrow{h}M_0\xrightarrow{g_1}\ldots\xrightarrow{g_{n+1}}M_{n+1})} &= F(g_{n+1})\big(x_{(T\xrightarrow{h}M_0\xrightarrow{g_1}\ldots\xrightarrow{g_n}M_n)}\big) \\
&\quad - x_{(T\xrightarrow{h}M_0\to\ldots\to M_{n-1}\xrightarrow{g_{n+1}\circ g_n}M_{n+1})} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad \pm x_{(T\xrightarrow{g_1\circ h}M_1\to\ldots\to M_{n+1})}
\end{aligned}$$

Devant le dernier terme nous avons "$+$", si n est impair et "$-$", si n est pair. De cette définition nous pouvons déduire pour $m\in M$ et $x=(x_l)_{l\in M}$

$$\begin{aligned}
(d^n(x)_{(T\xrightarrow{h}M_0\xrightarrow{g_1}\ldots\xrightarrow{g_{n+1}}M_{n+1})})_m &= F_m(g_{n+1}/_{S_m})\big((x_m)_{(T/_{S_m}\xrightarrow{h/_{S_m}}M_0/_{S_m}\xrightarrow{g_1/_{S_m}}\ldots\xrightarrow{g_n/_{S_m}}M_n/_{S_m})}\big) \\
&\quad - (x_m)_{(T/_{S_m}\xrightarrow{h/_{S_m}}M_0/_{S_m}\xrightarrow{g_1/_{S_m}}\ldots\to M_{n-1}/_{S_m}\xrightarrow{g_{n+1}\circ g_n/_{S_m}}M_{n+1}/_{S_m})} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad \pm (x_m)_{(T/_{S_m}\xrightarrow{g_1\circ h/_{S_m}}M_1/_{S_m}\to\ldots\to M_{n+1}/_{S_m})} \\
&= d_m^n(x_m)_{(T/_{S_m}\xrightarrow{h/_{S_m}}M_0/_{S_m}\to\ldots\to M_{n+1}/_{S_m})}
\end{aligned}$$

De ces constatations nous pouvons immédiatement déduire le lemme suivant :

Lemme 3.6.4.3 : Pour tout $n\in\mathbb{N}$ nous avons $H^n(T,F)\cong\prod_{m\in M}H^n(T/_{S_m},F_m)$

3.6.5 Résumé et conclusion

Dans 3.6.2, 3.6.3 et 3.6.4 nous avons vu que si $S=\coprod_{m\in M}S_m$, $T:\underline{C}\longrightarrow Ens$ un foncteur de la catégorie sous-jacente de S vers les ensembles et F et $(F_m)_{m\in M}$ comme dans 3.6.4, nous avons :

- $\Pi_0 g(T,S)\cong\prod_{m\in M}\Pi_0 g(T/_{S_m},S_m)$
- $\Pi_1 g(T,S)\cong\prod_{m\in M}\Pi_1 g(T/_{S_m},S_m)$
- $H^n(T,F)\cong\prod_{m\in M}H^n(T/_{S_m},F_m)\quad$ (pour $n\in\mathbb{N}$)

Comme toute esquisse est la somme de ses composantes connexes, nous avons ainsi :

- $\Pi_0 g(T,S) \cong \prod_{R \in \Pi_0(S)} \Pi_0 g(T/_R, R)$
- $\Pi_1 g(T,S) \cong \prod_{R \in \Pi_0(S)} \Pi_1 g(T/_R, R)$
- $H^n(T,F) \cong \prod_{R \in \Pi_0(S)} H^n(T/_R, F_m) \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N})$

(ici de nouveau $\Pi_0(S) = \{$ composantes connexes de $S\}$)

3.7 CONDITIONS SUFFISANTES POUR QUE $T \downarrow Mod[S]$ SOIT CONTRACTILE

3.7.1 Une hypothèse de départ pour l'esquisse S

Quant à l'esquisse S nous supposons sans nuire à la généralité que pour tout $I \in \mathbb{I}$, pour tout $J \in \underline{J}^I$ il n'existe pas de flèche $U^I_J \longrightarrow W$ telle que W est un candidat pour un objet initial dans S. Car si une telle flèche existait, nous remplacerions I par $I' = (U^{I'}_J \longrightarrow U^{I'} = U^I)_{J \in \underline{J}^{I'}}$, le cône qui est obtenu à partir de I en supprimant J et toutes les flèches dans I qui partent de J ou qui pointent vers J. De façon intuitive nous pouvons dire que nous voulons mettre en évidence les "sommes cachées" $U^I_J \longleftarrow 0 \longrightarrow U^I_{J'}$ de l'esquisse S. Soit donc S' l'esquisse qui est déduite de S en modifiant les cônes inductifs pour lesquels une telle modification est pertinente.
Lemme 3.7.1 : nous avons un isomorphisme de catégories $Mod[S] \cong Ens^{S'}$, ce qui est facile à vérifier. Pour la suite de la section nous allons donc adopter cette hypothèse selon laquelle U^I_J ne pointe vers aucun candidat pour un objet initial pour tout $J \in \underline{J}^I$ et tout $I \in \mathbb{I}$.

3.7.2 La condition suffisante

Proposition 3.7.2 : Si pour tout cône inductif $I = (U^I_J \longrightarrow U^I)_{J \in \underline{J}^I}$ la catégorie sous-jacente $\underline{J}^I$ est connexe et si pour tout cône projectif $P = (V^P \longrightarrow V^P_K)_{K \in \underline{K}^P}$ l'élément V^P ne pointe pas dans S vers un candidat pour un objet initial dans S, alors $T \downarrow Mod[S]$ est vide ou admet un objet terminal.

Remarque : Si l'esquisse S est purement projective, alors la transformation naturelle $T \longrightarrow \star$ de T vers le foncteur singleton est un objet terminal dans la comma-catégorie $T \downarrow Mod[S]$. Si S est une esquisse mixte, nous pouvons avoir sous les conditions de la proposition 3.7.2 un résultat similaire.

Démonstration : Sous ces conditions nous allons montrer que si $T \downarrow Mod[S] \neq \emptyset$, alors $T \downarrow Mod[S]$ possède un objet terminal que nous allons effectivement construire.

Posons donc

$$
\begin{array}{rccl}
R: & \underline{C} & \longrightarrow & Ens \\
 & Ob\underline{C} & \longrightarrow & ObEns \\
 & W & \longmapsto & \begin{cases} \{\star\} & \text{,si } W \text{ ne pointe pas vers un candidat pour un objet initial de } S \\ \emptyset & \text{,si } W \text{ pointe vers un candidat pour un objet initial de } S \end{cases} \\
 & Fl\underline{C} & \longrightarrow & FlEns \\
 & (W \xrightarrow{f} W') & \longmapsto & (R(W) \xrightarrow{R(f)} R(W'))
\end{array}
$$

où $R(f)$ est une des trois applications possibles

$$
\begin{array}{ccc}
\emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\
\emptyset & \longrightarrow & \{\star\} \\
\{\star\} & \longrightarrow & \{\star\}
\end{array}
$$

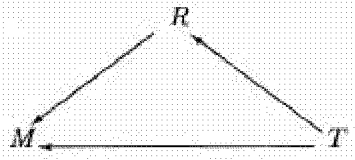
Il est clair que R est un foncteur bien défini. Montrons que R est un modèle de S :
Soit $I = (U^I_J \longrightarrow U^I)_{J \in \underline{J}^I}$ un cône inductif de S. Selon l'hypothèse de départ (Cf. 3.7.1) et la condition de la proposition il n'y a aucun U^I_J qui pointe vers un candidat pour un objet initial dans S. De même U^I ne pointe pas vers un candidat pour un objet initial dans S. D'où pour tout $J \in \underline{J}^I : R(U^I_J) = \{\star\}$ et pour $U^I : R(U^I) = \{\star\}$.
Comme $\underline{J}^I$ est connexe nous avons :

$$\varinjlim_{J \in \underline{J}^I} R(U^I_J) = R(U^I).$$

Ensuite soit $P = (V^P \longrightarrow V^P_K)_{K \in \underline{K}^P}$ un cône projectif de S. Comme V^P ne pointe pas dans S vers un candidat d'objet initial (condition de la proposition), aucun V^P_K ne peut pointer vers un candidat d'objet initial. Il s'en suit que pour tout $K \in \underline{K}^P : R(V^P_K) = \{\star\}$ et pour $V^P : R(V^P) = \{\star\}$. D'où

$$\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} R(V^P_K) = R(V^P).$$

Donc R est un modèle de S (C'est-à-dire en particulier que les deux conditions de la proposition sont suffisantes pour l'existence d'un modèle de S).
Montrons ensuite que si $T \downarrow Mod[S] \neq \emptyset$, alors il y a un objet terminal de $T \downarrow Mod[S]$. Comme $T \downarrow Mod[S] \neq \emptyset$, il y a un morphisme de T vers un modèle M. Pour $W \in Ob\underline{C}$ nous avons $M(W) = \emptyset$, si W pointe vers un candidat d'objet initial de S.
Par conséquent pour un tel $W \in Ob\underline{C}$ nous avons aussi $T(W) = \emptyset$. De cette constatation il s' en suit immédiatement qu'il existe un morphisme canonique $T \longrightarrow R$.
Donc $T \longrightarrow R \in T \downarrow Mod[S]$ et $T \longrightarrow R$ est l'objet terminal de $T \downarrow Mod[S]$, car pour tout $T \longrightarrow M \in T \downarrow Mod[S]$, il existe un morphisme unique $M \longrightarrow R$ qui rend commutatif le diagramme suivant :



□

Comme toute catégorie qui admet un objet initial ou terminal est contractile (voir lemme 3.2.3), il s'en suit de la proposition 3.7.2 que $B(T \downarrow Mod[S])$ est contractile.

3.8 LES COMPOSANTES CONNEXES DE $B(T \downarrow Mod[S])$

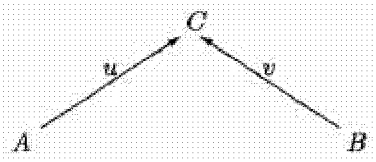
Comme en 3.7.1 nous allons supposer sans nuire à la généralité dans tout ce paragraphe que pour tout $I \in \mathbb{I}$, pour tout $J \in \underline{J}^I$, il n'existe pas de flèche $U^I_J \longrightarrow W$ telle que W soit un candidat pour un objet initial dans S.

3.8.1 Introduction

Pour tout cône inductif $I = (U^I_J \xrightarrow{\alpha^I_J} U^I)_{J \in \underline{J}^I}$ de S, rappelons que pour la catégorie sous-jacente $\underline{J}^I$, $\Pi_0(\underline{J}^I)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de $\underline{J}^I$.
Comme au chapitre 2, T^I est l' ensemble $T(U^I) \setminus [\bigcup_{J \in \underline{J}^I} T(\alpha^I_J)(T(U^I_J))]$, c'est-à- dire l' ensemble des points de $T(U^I)$ qui ne sont pas atteints par la base $(T(U^I_J))_{J \in \underline{J}^I}$.
Pour le calcul du nombre de composantes connexes de $B(T \downarrow Mod[S])$, il nous faut savoir sous quelles conditions il existe un morphisme de T vers un modèle de S. Dans cette perspective il y a deux lemmes utiles :

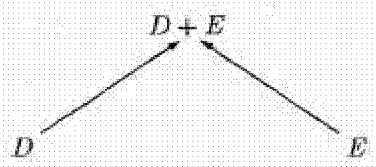
Lemme 3.8.1.1 : S'il existe un cône inductif I, deux éléments J, J' de deux composantes connexes différentes de $\underline{J}^I$ et deux points $x_J \in T(U^I_J)$ et $x_{J'} \in T(U^I_{J'})$ avec $T(\alpha^I_J)(x_J) = T(\alpha^I_{J'})(x_{J'})$, alors T n'admet aucun morphisme vers un modèle de S.

Exemple : le diagramme "candidat somme"



n'admet aucun morphisme vers un diagramme "somme" du type

.



s' il existe $x \in A$ et $y \in B$ avec $u(x) = v(y)$.

Preuve : S'il existe un cône inductif I, s'il existe deux éléments J, J' de deux composantes connexes différentes de $\underline{J}^I$ et deux points $x_J \in T(U^I_J)$ et $x_{J'} \in T(U^I_{J'})$ avec $T(\alpha^I_J)(x_J) = T(\alpha^I_{J'})(x_{J'})$, il est clair que T ne peut jamais être un modèle lui-même parce qu'un modèle peut toujours lier par un zig-zag deux points qui sont égalisés dans son sommet. Comme J et J' appartiennent à deux composantes connexes différentes, il ne peut donc exister un tel zig-zag. Donc T ne peut jamais être un modèle lui-même. Autrement dit si M est un modèle de S, alors nous avons

$$M(\alpha^I_J)(M(U^I_J)) \cap M(\alpha^I_{J'})(M(U^I_{J'})) = \emptyset.$$

Dans une argumentation par l'absurde supposons donc qu'il existe un morphisme $h : T \longrightarrow M$ de T vers un modèle M. Nous avons donc les égalités :

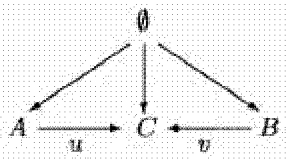
$$\begin{aligned} M(\alpha_J^I)(h(U_J^I)(x_J)) &= h(U^I)(T(\alpha_J^I)(x_J)) \\ &= h(U^I)(T(\alpha_{J'}^I)(x_{J'})) \\ &= M(\alpha_{J'}^I)(h(U_{J'}^I)(x_{J'})). \end{aligned}$$

D'où la contradiction $M(\alpha_J^I)(M(U_J^I)) \cap M(\alpha_{J'}^I)(M(U_{J'}^I)) \neq \emptyset$ ▫

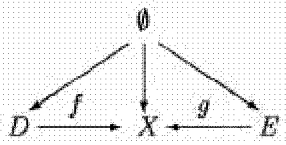
Rappelons la notation $P = (V^P \longrightarrow V_K^P)_{K \in \underline{K}^P}$ pour un cône projectif de S.

Lemme 3.8.1.2 : S'il existe un cône projectif P, tel que V^P pointe dans S vers un candidat d' objet initial et si $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P) \neq \emptyset$, alors T n'admet aucun morphisme vers un modèle de S.

Exemple : le diagramme suivant



n' admet aucun morphisme vers un diagramme du type



avec $f(D) \cap g(E) = \emptyset$, si $\{(x, z, y) \in A \times C \times B / z = u(x) = v(y)\} \neq \emptyset$.

Preuve : S'il existe un cône projectif P, tel que V^P pointe dans S vers un candidat d' objet initial et si $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P) \neq \emptyset$, il est clair que T n'est pas un modèle lui-même. Autrement dit si M est un modèle de S, alors nous avons $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} M(V_K^P) = \emptyset$. Dans une argumentation par l' absurde supposons donc qu' il existe un morphisme $h : T \longrightarrow M$ de T vers un modèle M. Comme $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P) \neq \emptyset$, choisissons $(x_K)_{K \in \underline{K}^P} \in \varprojlim_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P)$ avec $x_K \in T(V_K^P)$.

Il s'en suit que $h(V^P)(x_K) \in M(V_K^P)$ et que $(h(V_K^P)(x_K))_{K \in \underline{K}^P} \in \varprojlim_{K \in \underline{K}^P} M(V_K^P)$.

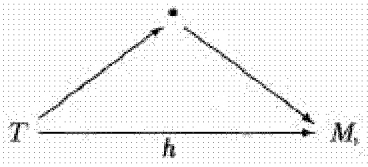
D'où la contradiction ▫

Ces deux lemmes montrent des conditions qui font qu' il n'existe pas de morphisme de T vers un modèle. Est-ce que la négation de ces conditions conduit à l'existence d'un morphisme de T vers un modèle ? C'est-à-dire est-ce que si T satisfait les propriétés Σ_1 et Σ_2 :

Σ_1 : Pour tout $I \in \mathbb{I}$, pour tout $J, J' \in \underline{J}^I$ tels que J et J' appartiennent à deux composantes connexes différentes de $\underline{J}^I$ nous avons $T(\alpha_J^I)(T(U_J^I)) \cap T(\alpha_{J'}^I)(T(U_{J'}^I)) = \emptyset$

Σ_2 : Pour tout $P \in \mathbb{P}$ tel que le sommet projectif V^P pointe dans S vers un candidat d' objet initial nous avons $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P) = \emptyset$,

nous avons un morphisme de T vers un modèle M ?
Cette question diffère du point de départ de la construction du diagramme localement libre. Dans le *d.l.l.* nous partons de l' existence d' un morphisme $h : T \longrightarrow M$ (avec M modèle) afin de construire une factorisation par un point du *d.l.l.* :



alors que pour la question soulevée plus haut il s'agit d'assurer l'existence même d' un tel morphisme $h : T \longrightarrow M$. Pour la suite nous allons ainsi donner quelques conventions.

3.8.2 Quelques conventions d'appellation

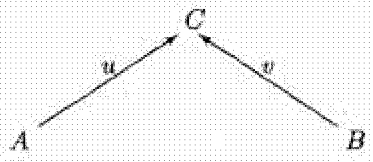
Comme première étape nous allons exclure qu' il y ait $P \in \mathbb{P}$ tel que V^P pointe dans S vers un candidat d'objet initial. Mais il faudra aussi exclure la possibilité suivante :
Il se peut pour un $P \in \mathbb{P}$ que V^P ne pointe vers aucun candidat d'objet initial, mais que nous ayons pour tout modèle M : $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} M(V_K^P) = M(V^P) = \emptyset$, précisément parce qu'il y a un cône inductif $I \in \mathbb{I}$, deux éléments $J, J' \in \underline{J}^I$ qui appartiennent à deux composantes connexes différentes de $\underline{J}^I$ tels que le diagramme $U_J^I \xrightarrow{\alpha_J^I} U^I \xleftarrow{\alpha_{J'}^I} U_{J'}^I$ est un sous-diagramme de $(V_K^P)_{K \in \underline{K}^P}$. (Puisque pour M nous avons $M(\alpha_J^I)(M(U^I)) \cap M(\alpha_{J'}^I)(M(U_{J'}^I)) = \emptyset$, il est clair dans ce cas que $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} M(V_K^P) = \{(x_K)_{K \in \underline{K}^P} \in \prod_{K \underline{K}^P} M(V_K^P) / \forall K \xrightarrow{\alpha} K' \in \underline{K}^P : M(\alpha)(x_K) = x_{K'}\} = \emptyset$). Ces deux possibilités sont exclues dans la définition suivante :

Définition 3.8.2.1 : Une esquisse S sera appelée une *esquisse à connexité semantique faible* (C.S.Fa.) si et seulement si pour tout foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ qui satisfait la condition Σ_1 (cf 3.8.1.), il existe un modèle M de S et un morphisme de T vers M.

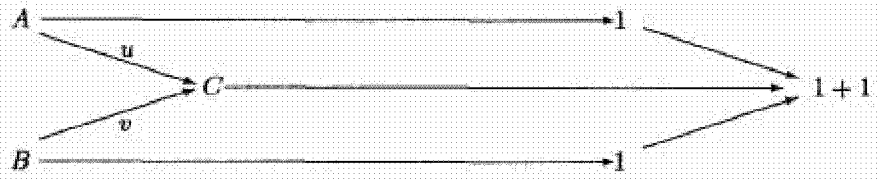
Exemple : nous considérons de nouveau l'esquisse "somme"

$$S \equiv \{a \longrightarrow c \longleftarrow b\}$$

Pour tout foncteur T de $\underline{C}$ vers Ens que nous notons



avec $u(A) \cap v(B) = \emptyset$, nous pouvons choisir un morphisme vers le modèle suivant :



Comme dans S il n'y a pas de cônes projectifs, il s'ensuit que S est une esquisse à connexité sémantique faible.

L'appellation sous-entend que nous allons considérer également une version "forte". Pour cela nous avons besoin des remarques suivantes :
Rappellons la définition de T^I qui est l'ensemble $T(U^I) \setminus [\bigcup_{J \in \underline{J}^I} T(\alpha^I_J)(T(U^I_J))]$.

Une $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partition de T^I est une application $\rho : \Pi_0(\underline{J}^I) \longrightarrow \mathcal{P}(T^I)$ vérifiant

- $T^I = \bigcup_{\underline{L} \in \Pi_0(\underline{J}^I)} \rho(\underline{L})$
- pour tous $\underline{L}, \underline{L}' \in \Pi_0(\underline{J}^I) : \underline{L} \neq \underline{L}' \Rightarrow \rho(\underline{L}) \cap \rho(\underline{L}') = \emptyset$.

A tout modèle $M \in Mod[S]$ et tout morphisme $h : T \longrightarrow M$ de $Ens^{\underline{C}}$ nous pouvons faire correspondre une unique $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partition de T^I de la façon suivante :
Pour $x \in T^I \subseteq T(U^I)$ considérons $h(U^I)(x) \in M(U^I)$. Comme M est un modèle, il existe une unique composante connexe $\underline{L}$ de $\underline{J}^I$ (i.e $\underline{L} \in \Pi_0(\underline{J}^I)$), telle qu'il existe $J \in Ob\underline{L}$ non nécessairement unique, qu'il existe $x_J \in M(U^I_J)$ tels que $M(\alpha^I_J)(x_J) = h(U^I)(x)$. Ce procédé départage T^I de façon unique en une $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partition.

Définition 3.8.2.2 : Une esquisse S sera appelée une *esquisse à connexité sémantique forte* (C.S.Fo) si et seulement si pour tout foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ qui satisfait la condition Σ_1 (Cf. 3.8.1) et toute $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partition ρ^I de T^I il existe un modèle M et un morphisme $h : T \longrightarrow M$ qui induit la $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partition ρ^I de T^I.

Exemple : L'esquisse "somme" $S \equiv \{a \longrightarrow c \longleftarrow b\}$ est une esquisse à connexité sémantique forte, comme il est facile de voir.

3.8.3 Le calcul de $\Pi_0 B(T \downarrow Mod[S])$

Nous supposons que S est une esquisse C.S. faible ou C.S. forte et que $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ est un foncteur. Rappelons que $\underline{A}(T,S)$ désigne la catégorie sous-jacente du *d.I.I.* relativement filtrant que nous avons construit au chapitre 2. Mais pour pouvoir considérer $\underline{A}(T,S)$ nous devons admettre que les catégories sous-jacentes des cônes projectifs de S soient finies, conformément aux hypothèses du chapitre 2.

Proposition 3.8.3 : $A, B \in Ob\underline{A}(T,S)$ sont reliés dans $\underline{A}(T,S)$ par un zig-zag si et seulement si $T \xrightarrow{d_A} D_A$, $T \xrightarrow{d_B} D_B$ induisent la même $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partition de T^I pour tout $I \in \mathbb{I}$.

Démonstration : nous allons démontrer les deux points suivants :

1. Si $T \xrightarrow{d_A} D_A$, $T \xrightarrow{d_B} D_B$ induisent la même $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partition de T^I pour tout $I \in \mathbb{I}$, alors A et B sont reliés dans $\underline{A}(T,S)$ par un zig-zag.
2. Si d_A et d_B induisent des $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partitions de T^I différentes pour seulement un $I \in \mathbb{I}$, alors A et B ne sont pas reliés dans $\underline{A}(T,S)$.

En ce qui concerne les notations de la catégorie sous-jacente $\underline{A}(T,S)$ du *d.l.l.*, nous allons nous rapporter au chapitre 2 plus précisément à la section 2.2.1 et 2.2.2 .

Point 1 Soient $A \in \mathcal{M}_n(T,S)$, $B \in \mathcal{M}_k(T,S)$. Supposons que $k \leq n$. Comme $Fl\mathcal{M}_k \subseteq Fl\mathcal{M}_n$, nous pouvons construire la "somme amalgamée" suivante :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_n(B)} & D_n(B) \\ {\scriptstyle d_n(A)}\downarrow & & \downarrow \\ D_n(A) & \longrightarrow & D_n(A) +_T D_n(B) \end{array}$$

et nous montrons que $D_n(A) +_T D_n(B)$ satisfait à la condition Σ_1 (voir 3.8.1). Pour cela soient $I \in \mathbb{I}$; $R, R' \in \underline{J}^I$ et $y_R \in D_n(A)(U^I_R)$, $y_{R'} \in D_n(B)(U^I_{R'})$ tels que $(D_n(A) +_T D_n(B))(\alpha^I_R)(cl(y_R)) = (D_n(A) +_T D_n(B))(\alpha^I_{R'})(cl(y_{R'}))$ où $cl(y_R)$ et $cl(y_{R'})$ sont des classes d'équivalence pour la somme amalgamée. Sous ces notations nous voulons montrer que R et R' appartiennent à la même composante connexe de $\underline{J}^I$. Ceci entraînera donc que $(D_n(A) +_T D_n(B))$ satisfait la condition Σ_1.

Considérons d'abord le cas où il existe $z \in T(U^I)$ avec :

$$\begin{array}{rcl} D_n(A)(\alpha^I_R)(y_R) & = & d_n(A)(U^I)(z), \\ D_n(B)(\alpha^I_{R'})(y_{R'}) & = & d_n(B)(U^I)(z) \end{array}$$

Nous allons donc considérer deux cas :

Premier cas : $z \in \bigcup_{J \in \underline{J}^I} T(\alpha^I_J)(T(U^I))$

Il existe donc $J \in \underline{J}^I$ et $z_J \in T(U^I)$ avec $T(\alpha^I_J)(z_J) = z$, d'où :

$$\begin{array}{rcll} D_n(A)(\alpha^I_J)(d_n(A)(U^I_J)(z_J)) & = & d_n(A)(U^I)(z) & (= D_n(A)(\alpha^I_R)(y_R)) \\ D_n(B)(\alpha^I_J)(d_n(B)(U^I_J)(z_J)) & = & d_n(B)(U^I)(z) & (= D_n(B)(\alpha^I_{R'})(y_{R'})) \end{array}$$

Comme $D_n(A)$ et $D_n(B)$ sont des modèles, il s'ensuit l'existence de deux zig-zags :
Le premier combine y_R et $d_n(A)(U^I_J)(z_J)$ dans la limite inductive
$(D_n(A)(U^I_J) \longrightarrow D_n(A)(U^I))_{J \in \underline{J}^I}$.
Le second combine $y_{R'}$ et $d_n(B)(U^I_J)(z_J)$ dans la limite inductive
$(D_n(B)(U^I_J) \longrightarrow D_n(B)(U^I))_{J \in \underline{J}^I}$.
Comme conséquence nous avons l'appartenance de R, J et R' à la même composante connexe dans $\underline{J}^I$.

Deuxième cas : $z \in T^J$

Comme d_A et d_B induisent la même $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partition de T^J, il existe $J, J' \in \underline{J}^I$ appartenant à la même composante connexe et $z_J \in D_n(A)(U^I_J)$, $z_{J'} \in D_n(B)(U^I_{J'})$ tels que

$$\begin{array}{rcll} D_n(A)(\alpha^I_J)(z_J) & = & d_n(A)(U^I)(z) & (= D_n(A)(\alpha^I_R)(y_R)) \\ D_n(B)(\alpha^I_{J'})(z_{J'}) & = & d_n(B)(U^I)(z) & (= D_n(B)(\alpha^I_{R'})(y_{R'})) \end{array}$$

Comme $D_n(A)$ et $D_n(B)$ sont des modèles, il s'ensuit l' existence des deux zig-zags suivants :
Le premier combine y_R et z_J dans la limite inductive
$(D_n(A)(U^I_J) \longrightarrow D_n(A)(U^I))_{J \in \underline{J}^I}$.
Le second combine $y_{R'}$ et $z_{J'}$ dans la limite inductive
$(D_n(B)(U^I_J) \longrightarrow D_n(B)(U^I))_{J \in \underline{J}^I}$.
Comme conséquence nous avons l'appartenance de R, J, R', J' à la même composante connexe de $\underline{J}^I$. Nous venons donc de démontrer que pour $I \in \mathbb{I}$, pour R, $R' \in \underline{J}^I$ et $y_R \in D_n(A)(U^I_J)$, $y_{R'} \in D_n(B)(U^I_{R'})$ tels que nous ayons le zig-zag simple relatif à la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} & (T(U^I), z) & \\ \swarrow & & \searrow \\ (D_n(A)(U^I), D_n(A)(\alpha^I_R)(y_R)) & & (D_n(B)(U^I), D_n(B)(\alpha^I_{R'})(y_{R'})) \end{array}$$

Il s'ensuit que R et R' appartiennent à la même composante connexe.

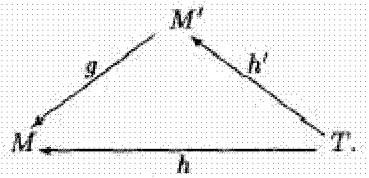
Nous venons donc de démontrer pour la relation qui engendre la relation d'équivalence de la somme amalgamée $D_n(A) +_T D_n(B)$ que R et R' appartiennent à la même composante connexe de $\underline{J}^I$ pour tout $I \in \mathbb{I}$. Le cas général peut être réduit à cette relation qui engendre la relation d'équivalence de la somme amalgamée $D_n(A) +_T D_n(B)$.

Dans tous les cas R et R' appartiennent à la même composante connexe de $\underline{J}^I$.
Donc $D_n(A) +_T D_n(B)$ satisfait la condition Σ_1 .

Comme l'esquisse est une esquisse C.S. faible ou C.S forte, il s'ensuit que $D_n(A) +_T D_n(B)$ admet un morphisme vers un modèle de S . Par la construction des flèches dans la catégorie sous-jacente $\underline{A}(T, S)$ du *d.l.l.* il s'ensuit que A et B sont reliés dans $\underline{A}(T, S)$.

Point 2 Si nous pouvons montrer le lemme suivant, il s'ensuit, comme il est facile de voir, le deuxième point de la proposition :

Lemme 3.8.3 : Soient $M, M' \in Mod[S]$ deux modèles, $h : T \longrightarrow M$ et $h' : T \longrightarrow M'$ deux flèches de $Ens^{\mathcal{C}}$ et $g : M \longrightarrow M'$ un morphisme de modèles dans $Mod[S]$ tels que le diagramme suivant commute :



Alors $\rho^M = \rho^{M'}$ (où $\rho^M, \rho^{M'}$ sont les $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partitions relatives à M et à M').

Preuve : Montrons pour tout $\underline{L} \in \Pi_0(\underline{J}^I)$: $\rho^M(\underline{L}) \subseteq \rho^{M'}(\underline{L})$ et $\rho^{M'}(\underline{L}) \subseteq \rho^M(\underline{L})$

- $\rho^M(\underline{L}) \subseteq \rho^{M'}(\underline{L})$
  Si $x \in \rho^M(\underline{L})$, alors il existe $J \in Ob\underline{L}$ (non nécessairement unique) et $x_J \in M(U^I_J)$ tels que $M(\alpha^I_J)(x_J) = h(U^I_J)(x)$. D'où

$$\begin{aligned} h'(U^I)(x) &= g(U^I)(h(U^I)(x)) \\ &= g(U^I)(M(\alpha^I_J)(x_J)) \\ &= M'(\alpha^I_J)(g(U^I_J)(x_J)) \end{aligned}$$

D'où $x \in \rho^{M'}(\underline{L})$.

- $\rho^{M'}(\underline{L}) \subseteq \rho^{M}(\underline{L})$
  Si $x \in \rho^{M'}(\underline{L})$, alors il existe $J \in Ob\underline{L}$ (non nécessairement unique) et $x_J \in M'(U^I_J)$ tels que $M'(\alpha^I_J)(x_J) = h'(U^I_J)(x)$.
  De plus on a $h'(U^I)(x) = g(U^I)(h(U^I)(x))$. Soit maintenant $\underline{L}^* \in \Pi_0(\underline{J}^I)$ tel qu'il existe $J^* \in Ob\underline{L}^*$ et $x_{J^*} \in M(U^I_{J^*})$ tels que $M(\alpha^I_{J^*})(x_{J^*}) = h(U^I_J)(x)$. D'où

$$\begin{aligned} h'(U^I)(x) &= g(U^I)(h(U^I)(x)) \\ &= g(U^I)(M(\alpha^I_{J^*})(x_{J^*})) \\ &= M'(\alpha^I_{J^*})(g(U^I_{J^*})(x_{J^*})). \end{aligned}$$

  Et donc $M'(\alpha^I_J)(x_J) = M'(\alpha^I_{J^*})(g(U^I_{J^*})(x_{J^*}))$. Comme M' est un modèle, il s'ensuit que J et J^* appartiennent à la même composante connexe et donc que $\underline{L} = \underline{L}^*$.
  D'où $x \in \rho^{M}(\underline{L})$□.

Remarque : C'est pour cette proposition que nous avons appliqué pour la première fois la construction du *d.l.l.r.f.* élaborée dans la section 2.2 . Tous les résultats géométriques des sections 3.6. et 3.7 ont été obtenus sans recourir à la construction explicite du *d.l.l.r.f*, mais en "travaillant" dans la "grosse" catégorie $T \downarrow Mod[S]$. Les résultats de 3.6. et 3.7 sont ainsi valables pour une esquisse S quelconque (c'est-à-dire sans que les catégories sous-jacentes des cônes projectifs de S soient finies - condition émise dans la construction du *d.l.l.r.f.*). Dans la démonstration de la proposition 3.8.3 (Point 1) nous venons donc d'employer la construction effective du *d.l.l.r.f.* et le résultat obtenu n'est valable que si l' esquisse S admet des cônes projectifs finis. Mais en fait il est facile de voir que la construction des "sommes amalgamées" (utilisée dans la preuve du Point 1) peut être effectuée, de la même manière, dans la "grosse" catégorie $T \downarrow Mod[S]$. Pour cette raison la Proposition 3.8.3 reste vraie, lorsque l'on considère un esquisse S (à C.S faible ou à C.S.forte) dans lequel les bases des cônes projectifs sont à cardinalité quelconque.

Notation : pour le foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ notons l'ensemble

$$Z(T) = Z(T,S) = \prod_{I \in \mathbb{I}} \{\rho^I : \Pi_0(\underline{J}^I) \longrightarrow \mathcal{P}(T^I)/\rho^I \text{ est une } \Pi_0(\underline{J}^I)\text{-partition de} T^I\}$$

Maintenant nous pouvons formuler le théorème fondamental :

Théorème : 1. Si S est une esquisse à connexité sémantique faible, alors nous avons pour tout foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$:

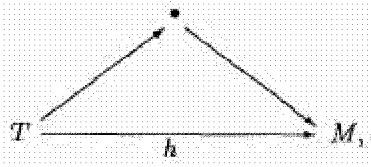
$$card(\Pi_0(B(T \downarrow Mod[S]))) \leq card(Z(T))$$

2. Si S est une esquisse à connexité sémantique forte, alors nous avons pour tout foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$:
   $\Pi_0(B(T \downarrow Mod[S])) = \emptyset$ où $\Pi_0(B(T \downarrow Mod[S])) \cong Z(T)$.

Démonstration : 1. D'après la proposition 3.8.3 il y a dans $\underline{A}(T,S)$ au plus autant de composantes connexes que d'éléments de $Z(T)$. D'où

$$\begin{aligned} &card(\Pi_0(B(T \downarrow Mod[S]))) && = \\ &card(\Pi_0(T \downarrow Mod[S])) && [= \\ &card(\Pi_0(\underline{A}(T,S))) \text{ si } S \text{ est à bases projectives finies}] && \leq \ card(Z(T)). \end{aligned}$$

2. Si le foncteur T ne satisfait pas la condition Σ_1, alors $T \downarrow Ens = \emptyset$ et ainsi $\Pi_0(B(T \downarrow Mod[S])) = \emptyset$. Si T satisfait la condition Σ_1, alors nous avons pour tout élément $\rho \in Z(T)$ un modèle $M \in Ens$ et un morphisme $h : T \longrightarrow M$ tels que h induit ρ, puisque S est supposée à C.S. forte. [Pour chacun de ces M nous pouvons trouver une factorisation par un point de $\underline{A}(T,S)$ qui induit nécessairement ρ :



si S est à bases projectives finies.] Avec la proposition 3.8.3 il s'ensuit que :

$$card(\Pi_0(B(T \downarrow Mod[S]))) =$$

$$card(\Pi_0(T \downarrow Mod[S])) [=$$

$$card(\Pi_0(\underline{A}(T,S))) \text{ si } S \text{ est à bases projectives finies}] \geq cardZ(T)$$

Comme une esquisse à C.S. forte est aussi une esquisse à connexité sémantique faible nous avons avec 1)

$$card(\Pi_0(B(T \downarrow Mod[S]))) \leq cardZ(T)$$

et ainsi $\Pi_0(B(T \downarrow Mod[S])) \cong Z(T)$.

Nous pouvons interpréter le résultat de la façon suivante :
Le nombre de composantes connexes de $B(T \downarrow Ens)$ s'obtient par le calcul de tous les $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partitions possibles de T^I ($I \in \mathbb{I}$). Rappelons que T^I est la partie du sommet $T(U^I)$ qui n' est pas "remplie" par la base $(T(U^I_J))_{J \in \underline{J}^I}$. Ceci constitue un résultat expressif au sujet d'un calcul géométrique de la distance entre T et un modèle. On apprend ainsi que le seul "vrai" facteur qui peut influencer le fait que T n'est pas modèle est celui du "non-remplissage" des sommets $T(U^I)$ ($I \in \mathbb{I}$) par les bases $(T(U^I_J))_{J \in \underline{J}^I}$. Nous obtenons également une expression plaisante de l'inter-articulation syntaxe-sémantique : le nombre de composantes connexes est obtenu par le calcul de tous les $\Pi_0(\underline{J}^I)$-partitions possibles (syntaxe) de T^I (sémantique).
De plus nous voyons que l'essentiel du résultat se trouve déjà exprimé dans l'exemple de Guitart[12] sur le *d.l.l.* des sommes.

3.9 LE Π_1 ET LES H^n DES ESQUISSES MULTI-INITIALES

Dans cette section il s'agit de déterminer $\Pi_1 B(T \downarrow Mod[S])$ et $H^n(T,F)$ ($n \in \mathbb{N}$) dans un cas particulier intéressant. Puisque nous avons pour toute catégorie $\mathcal{D}$: $\Pi_1 B\mathcal{D} \cong \mathcal{D}[\mathcal{D}^{-1}]$ [13], nous pouvons calculer $T \downarrow Mod[S][(T \downarrow Mod[S])^{-1}]$ de façon effective en faisant recours à la construction [14] du *d.l.l.* de T. En revanche il est très difficile de donner $\Pi_1 B(T \downarrow Mod[S])$ et $H^n(T,F)$ de façon explicite comme nous avons fait pour $\Pi_0 B(T \downarrow Mod[S])$. Mais si nous nous restreignons à un cas particulier, nous pouvons donner une description explicite :

[12] voir section 1.4.5
[13] voir section 3.4
[14] voir chapitre 2

Définition 3.9 : Une esquisse S est dite *esquisse multi-initiale* si et seulement si pour tout foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$, toute composante connexe $\underline{L} \in \Pi_0(T \downarrow Mod[S])$ de $T \downarrow Mod[S]$ possède un objet initial. Comme nous allons voir, les esquisses multi-initiales vont fournir pour tout foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ des multi-adjoints, c'est-à-dire des diagrammes localement libres discrets. Nous retrouvons donc le cas que Diers[15] avait considéré. Si S est multi-initiale, soit $h_{\underline{L}} : T \longrightarrow M_{\underline{L}}$ l'objet initial de la composante connexe $\underline{L} \in \Pi_0(T \downarrow Mod[S])$ de $T \downarrow Mod[S]$. L'existence du *d.l.l.r.f* garantie que $\Pi_0(T \downarrow Mod[S])$ est un ensemble. Posons

$$\begin{array}{ccc} M : \Pi_0(T \downarrow Mod[S]) & \longrightarrow & Mod[S] \\ \underline{L} & \longmapsto & M_{\underline{L}} \end{array}$$

et $h : (h_{\underline{L}} : T \longrightarrow M_{\underline{L}})_{\underline{L} \in \Pi_0(T \downarrow Mod[S])}$ d'où le lemme :

Lemme 3.9 : Si S est une esquisse multi-initiale et $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ un foncteur quelconque, $(\Pi_0(T \downarrow Mod[S]), M, h)$ est un diagramme localement libre relativement filtrant de T. Ce résultat est immédiat.

3.9.1 Le Π_1 des Esquisses multi-initiales

Selon le lemme 3.9 il est clair que le groupoïde $\Pi_1 B(T \downarrow Mod[S])$ est équivalent à l'ensemble $\Pi_0(T \downarrow Mod[S])$ considéré comme groupoïde, parce que $\Pi_1 B(T \downarrow Mod[S]) \cong T \downarrow Mod[S][(T \downarrow Mod[S])^{-1}]$ et parce que $B(T \downarrow Mod[S])$ et $B\Pi_0(T \downarrow Mod[S])$ (la réalisation géométrique de la catégorie discrète $\Pi_0(T \downarrow Mod[S])$) ont le même type d'homotopie.

3.9.2 Les H^n des Esquisses multi-initiales

Nous allons montrer que si S est une esquisse multi-initiale, si $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ est un foncteur quelconque et si $F : Mod[S] \longrightarrow Ab$ est un foncteur quelconque, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $H^n(T, F) = 0$. Ceci est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 3.9.2 : si $\mathcal{D}$ est une catégorie discrète et $F : \mathcal{D} \longrightarrow Ab$ un foncteur quelconque, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $H^n(\mathcal{D}, F) = 0$.

Preuve : le $n^{ième}$ membre du complexe de cochaîne est défini de la façon suivante :

$$C^n(\mathcal{D}, F) = \prod_{(X_0 \xrightarrow{g_1} \ldots \xrightarrow{g_n} X_n) \in N\mathcal{D}([n])} F(x_n)$$

Comme $\mathcal{D}$ est une catégorie discrète, nous avons $X_0 = \ldots = X_n$ et $g_i = id$. Pour cela nous pouvons écrire

$$C^n(\mathcal{D}, F) = \prod_{x \in Ob\mathcal{D}} F(x)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est facile de voir que pour la $n^{ième}$ différentielle d^n nous avons :

$$d^n((z_x)_{x \in \mathcal{D}}) = \begin{cases} (z_x)_{x \in \mathcal{D}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

D'où $H^n(\mathcal{D}, F) = Ker d^n / Im d^{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ □

On voit donc que si S ne comporte que des cônes inductifs discrets(sommes), alors S étant multi-initiale les calculs de Π_0 et H^n sont triviaux; ils le sont aussi presque (cf. propos. 3.7.2) s'il n'y a que des cônes inductifs connexes. Leur intérêt semble donc résider dans le cas de présence simultanée de cônes inductifs discrets et de cônes inductifs connexes.

[15] voir Y. Diers, Catégories localisables, Thèse, Paris 1977

Chapitre 4

APPLICATION : GEOMETRIE ET LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

4.1 REMARQUES

Nous avons vu dans la section 1.2 que les modèles ensemblistes d'une certaine esquisse mixte décrivent exactement les modèles d'une théorie du premier ordre et que cette correspondance n'est pas une équivalence de catégories mais seulement un isomorphisme au plan des objets. Les cônes distingués de cette esquisse du premier ordre sont à bases finies (voir section 1.2) : candidats d'objets initial et terminal, candidats de produits finis,candidats de produits fibrés,candidats d'égalisateurs, candidats de sommes amalgammées et sommes. Nous voyons en particulier que les bases des cônes inductifs sont connexes pour les sommes amalgammées et non-connexes pour les sommes. Or, nous savons que les sommes d'une esquisse du premier ordre proviennent de la présence de la négation $\neg$ dans une des formules de la théorie. Intéressons nous d'abord aux esquisses du premier ordre qui proviennent d'une théorie sans négation. Les bases des cônes inductifs d'une telle esquisse sont toutes connexes. En outre il est facile de voir qu'aucun sommet d'un cône projectif de l'esquisse ne pointe vers un candidat d'objet initial. Nous sommes donc exactement dans le cas de la proposition 3.7.2; c'est-à-dire si $S = (\underline{C}, \mathbb{I}, \mathbb{P})$ est l'esquisse du premier ordre en cause et $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ un foncteur quelconque, alors $B(T \downarrow Mod[S])$ et en particulier $BMod[S]$ sont contractiles. Si en revanche, une théorie $\mathcal{T}$ comporte des négations, alors l'esquisse du premier ordre induite contiendra des sommes. Et ce sont ces sommes qui font que l'esquisse sera susceptible d'engendrer une théorie d'homotopie non-contractile. L'esquisse sera susceptible car pour pouvoir appliquer le théorème de la section 3.8.3 sur le calcul des composantes connexes, il faudra supposer que l'esquisse soit à connexité sémantique faible ou forte. Si en effet S est une telle esquisse, il s'ensuit de ce théorème et de la nature du foncteur vide $\emptyset : \underline{C} \longrightarrow Ens$ que $Mod[S](\cong \emptyset \downarrow Mod[S])$ est contractile. La théorie d'homotopie non-contractile se développera alors seulement dans des comma-catégories de modèles $T \downarrow Mod[S]$ où T est un foncteur de $\underline{C}$ vers Ens, c'est-à-dire une sorte de réalisation du langage de base $(\underline{C})$ mais non une réalisation de la théorie (S), parce que pour au moins une formule φ, T réalise φ et $\neg\varphi$ de façon non tout-à-fait complémentaire :

i.e. dans la somme $T(\varphi) \longrightarrow T(c) \longleftarrow T(\neg\varphi)$ on a $T_{\neg\varphi}(c) \stackrel{\text{def}}{=} T(c) \setminus [T(\varphi) \cup T(\neg\varphi)] \neq \emptyset$.
Dans ce cas les composantes connexes de la réalisation géométrique se calculent de la façon suivante(voir théorème de la section 3.8.3) :

$$\Pi_0 B(T \downarrow Mod[S]) \leq card(\prod_{\neg\varphi \in T} \{\rho_{\neg\varphi};\ \ \rho_{\neg\varphi} \text{ est une bipartition de } T_{\neg\varphi}(c)\}).$$

En résumé nous pouvons donc dire que l'interprétation géométrique des théories du premier ordre fournit deux grandes classes : les théories comportant des négations "$\neg$ " et les théories ne comportant aucune négation "$\neg$". Cette façon de présenter contient malheureusement la lacune suivante :
Qu'en est-il des théories qui comportent des négations mais qui sont logiquement équivalentes à des théories ne comportant aucune négation? Comme la catégorie des modèles d'une théorie du premier ordre n'est pas équivalente à une esquisse du premier ordre construite en 1.1.2, mais "seulement" isomorphe sur le plan des objets, nous pouvons donc obtenir des géométries homotopiques différentes pour des théories logiquement équivalentes. Ceci montre en particulier que la notion d'homomorphisme entre modèles généralement admise par les logiciens n'est pas adaptée pour une étude des esquisses, mais que la notion de morphisme entre esquisses peut à son tour enrichir la notion de morphisme chez les logiciens.

4.2 EXEMPLE : LES ENSEMBLES INFINIS

Pour souligner le fait qu'un certain nombre de cas n'est pas couvert par les notions "esquisse à connexité faible/forte" (voir section 3.8.2), nous allons montrer à titre d'exemple que pour la théorie des ensembles infinis l'esquisse associée n'est pas à connexité sémantique forte ni faible. La théorie des ensembles infinis peut être axiomatisée de la façon suivante

$$T = \{\varphi_n ; n \in \mathbb{N}^{>1}\}$$

$$\text{avec } \varphi_n : \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=i+1}^{n} \neg(x_i = x_j).$$

Soit S l'esquisse engendrée par les données suivantes (c'est-à-dire nous construisons une esquisse des ensembles infinis (voir 1.2.2)) :

- des objets $c, 1$ dans $Ob\underline{C}$
- une flèche $\tau : c \longrightarrow 1$ dans $Fl\underline{C}$, candidat pour un épi
- 1 est candidat pour un objet terminal
- pour tout énoncé φ_n, $(\pi_i^n : c^n \longrightarrow c)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ est candidat pour un produit
- pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$ et pour la formule $\varphi_{i,j}^n : x_i = x_j$ un candidat pour un égalisateur :

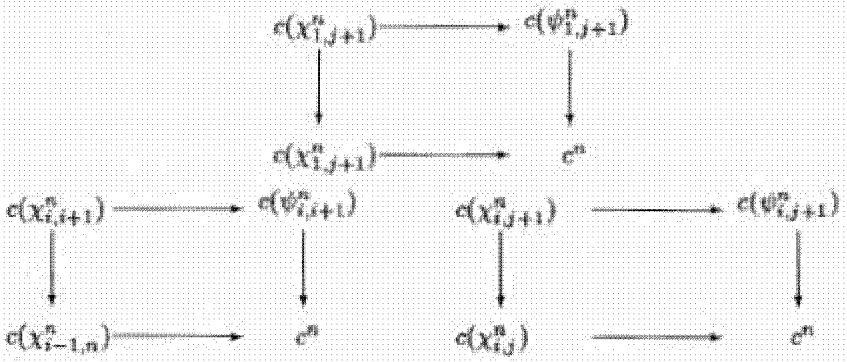
$$c(\varphi_{i,j}^n) \longrightarrow c^n \underset{\pi_j^n}{\overset{\pi_i^n}{\rightrightarrows}} c$$

- pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$ et pour la formule $\psi_{i,j}^n : \neg x_i = x_j$ un candidat pour une somme $c(\varphi_{i,j}^n) \longrightarrow c^n \longleftarrow c(\psi_{i,j}^n)$
- pour rendre compte des "intersections" nous introduisons de façon récursive des formules $\chi_{i,j}^n \quad (j > i)$ qui correspondent à une certaine mise en parenthèse :

$$\chi_{1,2}^n : \psi_{1,2}^n \quad \text{et} \quad \chi_{1,j+1}^n : \chi_{1,j}^n \wedge \psi_{1,j+1}^n$$

$$\chi_{i,i+1}^n : \chi_{i-1,n}^n \wedge \psi_{i,i+1}^n \quad \text{et} \quad \chi_{i,j+1}^n : \chi_{i,j}^n \wedge \psi_{i,j+1}^n$$

et nous ajoutons à S des candidats pour des cônes projectifs :



- pour rendre compte de la quantification existentielle nous introduisons de façon récursive des formules $c(\xi_1), \ldots, c(\xi_n)$, c'est-à-dire nous ajoutons à S des objets $c(\xi_1), \ldots, c(\xi_n)$ et des flèches $c(\xi_i) \longrightarrow 1$ (pour $i = 1, \ldots, n-1$), $c(\mathcal{X}^n_{n-1,n}) \longrightarrow c(\xi_1)$, $c(\xi_i) \longrightarrow c(\xi_{n+1})$ (pour $i = 2, \ldots, n-1$), $\pi^i : c^i \longrightarrow c^{i-1}$ (pour $i = 2, \ldots, n$) et $c(\xi_i) \longrightarrow c^{n-i}$ (pour $i = 1, \ldots, n$).
  Nous ajoutons à S ensuite des cônes inductifs et projectifs qui expriment que
  - $c(\xi_i) \longrightarrow c^{n-i}$ (pour $i = 1, \ldots, n$) est candidat pour une application injective
  - $c(\mathcal{X}^n_{n-1,n}) \longrightarrow 1$ est candidat pour une application surjective
  - $c(\xi_i) \longrightarrow 1$ (pour $i = 1, \ldots, n-1$) est candidat pour une application surjective
  - $c(\mathcal{X}^n_{n-1,n}) \longrightarrow c(\xi_1)$ est candidat pour une application surjective
  - $c(\xi_i) \longrightarrow c(\xi_{n+1})$ (pour $i = 2, \ldots, n-1$) est candidat pour une application surjective.

  Ces données seront soumises à des égalités qui sont suggérées dans la section 1.2.2 (voir partie concernée)

Ceci achève la construction de l'esquisse S. Un modèle de S correspond à un ensemble infini. Montrons que S n'est pas une esquisse à connexité sémantique forte ni faible. Pour cela construisons un foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ qui satisfait la condition Σ_1, mais qui n'admet aucun morphisme vers un modèle.

- $T(1) = 1$ (ensemble avec un élément)
- $T(c) = 2$ (ensemble avec deux éléments)
- $T(c^n \xrightarrow{\pi^n_i} c) = 2^n \xrightarrow{\pi^n_i} 2$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$
- $T(c(\rho^n_{i,j})) = equal(2^n \underset{\pi^n_j}{\overset{\pi^n_i}{\rightrightarrows}} 2) \setminus \{\star\}$

  c'est-à-dire que nous soustrayons un point $\star$ que nous avons fixé dans $equal(2^n \underset{\pi^n_j}{\overset{\pi^n_i}{\rightrightarrows}} 2)$ auparavant.

- $T(c(\psi^n_{i,j})) = 2^n \setminus T(c(\varphi^n_{i,j}))$ c'est-à-dire nous avons $2^n = T(c(\psi^n_{i,j})) + T(c(\varphi^n_{i,j}))$
- ensuite nous définissons de façon récursive (voir plus haut) :

$$\begin{array}{lcl}
T(c(\chi^n_{1,2})) & = & T(c(\psi^n_{1,2})) \\
T(c(\chi^n_{1,j+1})) & = & T(c(\chi^n_{1,j})) \quad \cap \quad T(c(\psi^n_{1,j+1})) \\
T(c(\chi^n_{i,i+1})) & = & T(c(\chi^n_{i-1,n})) \quad \cap \quad T(c(\psi^n_{i,i+1})) \\
T(c(\chi^n_{i,j+1})) & = & T(c(\chi^n_{i,j})) \quad \cap \quad T(c(\psi^n_{i,j+1}))
\end{array}$$

- et finalement nous posons $T(c(\xi_i)) = \{0\}$ (pour $i = 1, \ldots, n$) où $0 \in T(c(\mathcal{X}^n_{n-1,n}))$ est un point que nous avons fixé auparavant

Cela achève complètement la définition du foncteur $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$.
Soit $M : S \longrightarrow Ens$ un modèle de S. Dans une argumentation par l'absurde supposons qu'il existe un morphisme $h : T \longrightarrow M$. D'après la définition de T il existe

$$\star \in T(c(\rho^n_{i,j})) = equal(T(c^n) \underset{\pi^n_j}{\overset{\pi^n_i}{\rightrightarrows}} T(c))$$

avec $\star \in T(c(\psi^n_{i,j}))$ le morphisme $h(c^n) : T(c^n) \longrightarrow M(c^n)$ est déterminé par la propriété universelle du produit. Et l'on voit facilement que pour $\star \in T(c(\psi^n_{i,j}))$ le diagramme suivant ne peut pas être commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(c(\psi^n_{i,j})) & \longrightarrow & M(c(\psi^n_{i,j})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(c^n) & \longrightarrow & M(c^n) \end{array}$$

Il n'existe donc aucun morphisme de T vers les modèles de S. Pourtant T satisfait Σ_1 comme nous constatons en revoyant la définition de T. Donc S n'est pas une esquisse à connexité sémantique faible ni forte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] André M.,
Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative,
S.L.N. 32, 1967.

[2] Diers Y.,
Catégories Localisables,
Thèse, Paris 1977.

[3] Ebbinghaus, Flum, Thomas,
Einführung in die mathematische Logik,
Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1986.

[4] Ehresmann C.,
Esquisses et types de structures algébriques,
Bul. Instit. Pilit. Iasi XIV, 1968.

[5] Evrard M.,
Homotopie d'un espace topologique relativement à un recouvrement, Application à l'homotopie des préschémas,
Thèse d'Etat, Université Paris 7, 1973.

[6] Evrard M.,
Fibration de petites catégories,
Bul. Soc. Math. France 103, pp.241-265, 1975.

[7] Gabriel P. and Zisman M. ,
Calculus of Fraction and Homotopy Theory,
Springer Verlag , 1967.

[8] Guitart R. et Lair C.,
Calcul Syntaxique des Modèles et Calcul des Formes Internes,
Diagrammes, Vol. 4, 1980.

[9] Guitart R. et Lair C.,
Existence de Diagrammes Localement Libres,
Diagrammes, Vol. 6, Paris 1981.

[10] Guitart R. et Lair C.,
Limites et Co-Limites pour représenter les Formules,
Diagrammes, Vol. 7, 1982.

[11] Guitart R.,
On the Geometry of Computations
Cahier de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique,
Vol XXVII-4, pp.107-136, 1986.

[12] Guitart R.,
On the Geometry of Computation II
Cahier de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique,
Vol XXIX-4, pp.297-326, 1988.

[13] Guitart R.,
Construction of an homoloy and a cohomology theory
associated to a first order formula,
Journées d'Etudes Esquisses, Logique et Informatique Théorique,
Université Paris 7, 27 juin-2 juillet 1988.

[14] Guitart R.,
Sur les Contributions de Charles Ehresmann à la Théorie des Catégories,
paru dans la Gazette des Mathématiciens, S.M.F. n. 13, février 1980, pp. 37-4.

[15] Mac Lane S.,
Categories for the Working Mathematician,
Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag.

[16] Milnor J.,
The Geometric Realisation of a semi-simplicial Complex,
Anals of Mathematics, Vol. 65, Num. 2, 3/1957.

[17] Quillen D.,
Algebraic K-Theory I,
S.L.N 341, p.85.

[18] SGA 4,
Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1963/64,
Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas, S.L.N. 269.