

# DIAGRAMMES

C. HENRY

## Sur quelques problèmes de plongement en algèbre : I. Une propriété élémentaire

*Diagrammes*, tome 15 (1986), exp. n° 1, p. CH1-CH7

<[http://www.numdam.org/item?id=DIA\\_1986\\_15\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=DIA_1986_15_A1_0)>

© Université Paris 7, UER math., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Diagrammes* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
http://www.numdam.org/*

## SUR QUELQUES PROBLEMES DE PLONGEMENT EN ALGEBRE

## I. UNE PROPRIETE ELEMENTAIRE

C. Henry

## Introduction

Il est tout à fait banal de constater que tout ensemble se plonge dans le groupe (resp. le demi-groupe, le monoïde, le groupe abélien, l'anneau, l'espace vectoriel sur un corps donné...) qu'il engendre librement. Il n'est certainement pas choquant, mais c'est moins banal, d'affirmer qu'en toute généralité, tout ensemble se plonge toujours dans la structure algébrique, d'un type donné, qu'il engendre librement.

On imagine bien que l'on peut donner de cette propriété générale de plongement une démonstration (sémantique) en procédant comme suit:

- (1) le type de structures algébriques considéré est défini par une liste de lois de composition et une liste d'axiomes (i. e. d'équations quantifiées universellement),
- (2) pour chaque ensemble  $E$ , on décrit (par une suite d'adjonctions formelles d'éléments et d'identifications) la structure libre  $L(E)$  qu'il engendre,
- (3) il suffit de constater que, dans ces constructions, on n'effectue jamais aucune identification entre éléments de  $E$ .

Bien sûr, c'est le point (2) qu'il est fastidieux de mettre en oeuvre en toute généralité (c'est déjà délicat dans certains cas particuliers !).

Nous fournissons ici une démonstration précise, mais brève, de cette propriété générale de plongement: nous considérons qu'un type de structures algébriques est décrit par une théorie de Lawvere (voir (S.A.F.T.)) et nous utilisons alors une condition suffisante *yntaxique* (i. e. ne portant que sur la forme de la théorie considérée) établie antérieurement (voir (C.S.P.P.)), fort utile par ailleurs pour établir d'autres propriétés de plongement entre structures algébriques de types différents (voir (S.Q.P.P.)).

Techniquement, nous proposons donc une démonstration d'un énoncé, certes peu surprenant, mais qu'il faut bien prouver... ou réfuter, un jour !

Si nous pouvons convaincre le lecteur qu'il ne s'agit là que d'un prétexte servant à montrer l'effectivité de la méthode *yntaxique* utilisée, notre véritable but sera atteint.

D'aucuns considéreront peut-être, voulant ignorer ce prétexte, que nous avons démontré une banalité. Encore faudrait-il au moins qu'ils se soient donné la peine d'établir que c'en est une, par exemple en mettant au point la démonstration sémantique suggérée ci-dessus, ou en lisant ce qui suit.

1. Si  $T$  est une théorie de Lawvere (voir (S.A.F.T.)), nous désignerons généralement par  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  la famille de ses objets et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $(\pi(n, i) : A^n \rightarrow A)_{1 \leq i \leq n}$  une présentation choisie de l'objet  $A^n$  comme produit, dans la catégorie  $T$ , de  $n$  copies de  $A$ .

On note  $\text{Alg}/T/$  la catégorie des algèbres de  $/T/$  et par  $U_T : \text{Alg}/T/ \rightarrow \text{Ens}$  le foncteur d'oubli canonique associé. On sait que  $U_T$  admet un adjoint à gauche  $V_T$ , nous dirons que  $U_T$  est à *plongements* si, et seulement si, pour tout ensemble  $E$ , l'application canonique  $f_E : E \rightarrow U_T V_T(E)$  est une injection.

On note  $/T_{\text{Ens}}/$  la théorie de Lawvere des ensembles i. e. la théorie telle que  $\text{Alg}/T_{\text{Ens}}/$  et  $\text{Ens}$  soient équivalentes. Alors  $(T_{\text{Ens}})^{\text{op}}$  est la sous-catégorie pleine de  $\text{Ens}$  dont les objets sont les  $n = \{1, \dots, n\}$ , si  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $0 = \emptyset$ . De plus, on sait que  $/T_{\text{Ens}}/$  est un objet initial de la catégorie des théories (et de leurs homomorphismes): à toute théorie  $/T/$  est donc associé un

unique homomorphisme  $H_T: /T_{\text{Ens}} \rightarrow /T/$ . Dans ces conditions, on dit que  $/T/$  est une théorie non triviale si, et seulement si, le foncteur  $H_T$  est injectif.

Plus généralement, si  $H: /T'/ \rightarrow /T/$  est un homomorphisme entre deux théories, il induit un foncteur d'oubli  $\text{Alg}/H: \text{Alg}/T' \rightarrow \text{Alg}/T/$  (en particulier, si  $/T'/ = /T_{\text{Ens}}/$  et  $/H/ = H_T/$ , on a  $\text{Alg}/H/ = U_T$  à l'équivalence près). Nous dirons que  $\text{Alg}/H/$  est à plongements si, et seulement si, toute algèbre de  $/T'/$  se plonge dans une algèbre de  $/T/$ .

2. En (C.S.P.P.) et (S.Q.P.P.) est établie une condition suffisante pour qu'un foncteur de la forme  $\text{Alg}/H/$  soit à plongements.

Pour énoncer ce critère avec précision, rappelons tout d'abord que:

- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $z_n$  la catégorie

$$1 \leftarrow \dots \rightarrow 2 \leftarrow \dots \rightarrow 3 \quad \dots \dots \dots \quad 2n-1 \leftarrow \dots \rightarrow 2n \leftarrow \dots \rightarrow 2n+1$$

- si  $C$  est une catégorie, on appelle zig-zag de  $C$  tout foncteur de la forme  $Z: z_n \rightarrow C$  (ou encore  $Z: z_n^{\text{op}} \rightarrow C$ ).

Dans ces conditions, si  $H: /T'/ \rightarrow /T/$  est un homomorphisme de théories de Lawvere, le foncteur  $\text{Alg}/H/$  est à plongements à la condition suffisante que:

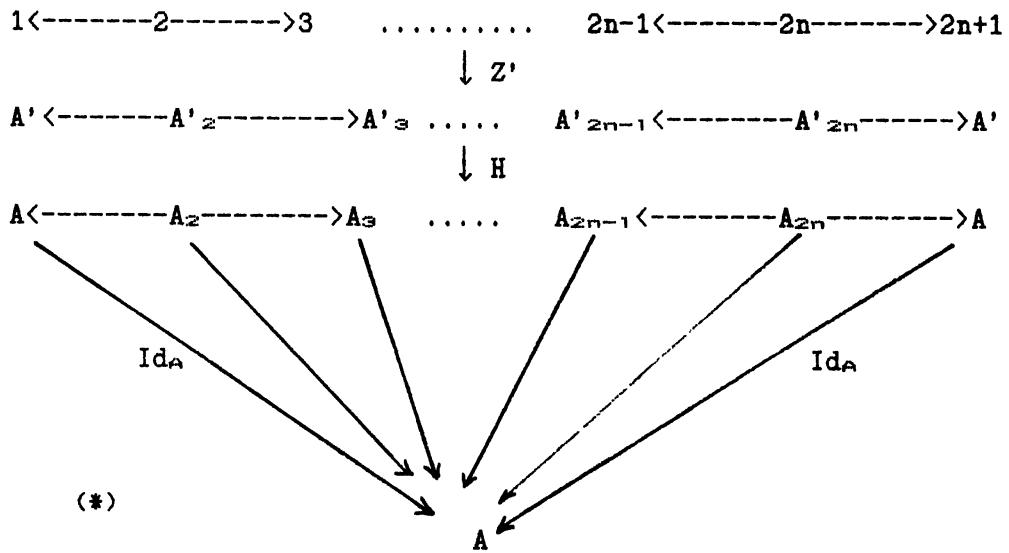
(CS) si on dispose d'un zig-zag  $Z: z_n \rightarrow T'$  de  $T'$  défini par

$$1 \leftarrow \dots \rightarrow 2 \leftarrow \dots \rightarrow 3 \quad \dots \dots \dots \quad 2n-1 \leftarrow \dots \rightarrow 2n \leftarrow \dots \rightarrow 2n+1$$

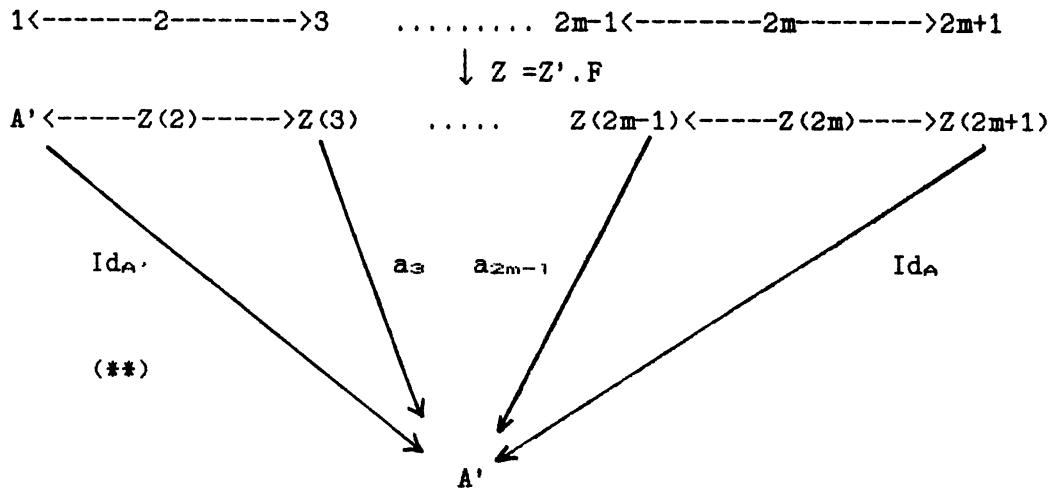
$$\downarrow z'$$

$$A' \leftarrow \dots \rightarrow A'_{z_2} \leftarrow \dots \rightarrow A'_{z_3} \quad \dots \dots \dots \quad A'_{z_{n-1}} \leftarrow \dots \rightarrow A'_{z_n} \leftarrow \dots \rightarrow A'$$

et si on dispose d'un diagramme (\*) commutatif dans  $T$  et tel que ci-dessous



alors, il existe un entier  $m \geq 1$ , un foncteur  $F: Z_m \rightarrow Z_n$  et un diagramme commutatif dans  $T'$  tels que ci-dessous:

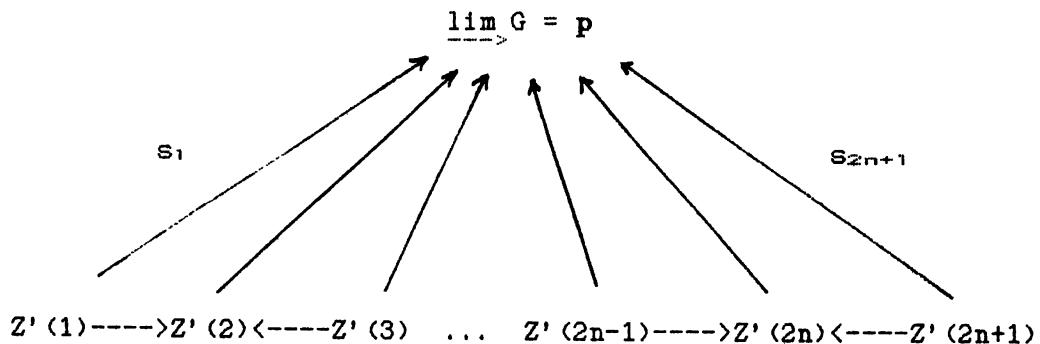


3. Montrons que, si  $/T/$  est une théorie de Lawvere non triviale, l'homomorphisme (très particulier) canonique  $/H_T/: /Tens/ \rightarrow /T/$  vérifie la condition (CS) précédente. Autrement dit, prouvons que :

**Théorème.** Si  $/T/$  est une théorie de Lawvere non triviale, le foncteur d'oubli  $U_T: \text{Alg}/T/ \rightarrow \text{Ens}$  est à plongements.

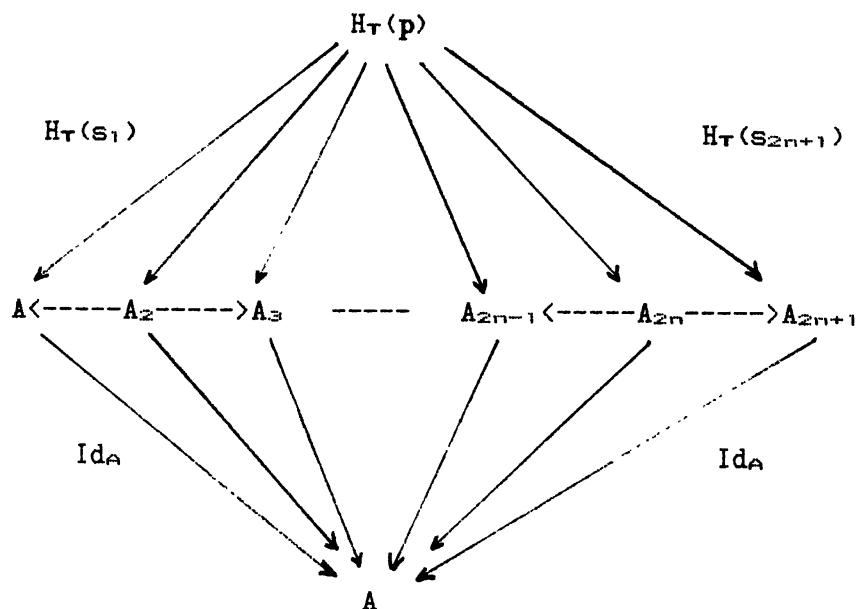
**Preuve.** Supposons que  $Z'$ :  $z_n \rightarrow T_{\text{Ens}}$  est un zigzag tel que (\*) soit un diagramme commutatif de  $T$ .

Le foncteur  $G: z_n \xrightarrow{\text{Z'}}$   $\text{Z'} \xrightarrow{\text{Inj}}$   $T_{\text{Ens}} \xrightarrow{\text{Op}}$   $\text{Ens}$  admet une limite inductive



qui est évidemment objet de  $T_{\text{Ens}}^{\text{Op}}$ .

Nous disposons donc du diagramme commutatif dual dans  $T_{\text{Ens}}$  et, puisque (\*) est commutatif dans  $T$ , nous obtenons le diagramme commutatif ci-dessous dans  $T$



Il en résulte  $H_T(s_1) = H_T(s_{2n+1})$  et, puisque  $H_T$  est fidèle ( $T$  étant non triviale),  $s_1 = s_{2n+1}$  ou encore  $s_1(1) = s_{2n+1}(1)$ .

Le calcul des limites inductives dans  $\text{Ens}$  indique donc qu'il existe un zigzag  $F^{\text{op}} : z_m^{\text{op}} \rightarrow z_n^{\text{op}}$  et une famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2m+1}$  appartenant à  $\prod_{1 \leq i \leq 2m+1} Z'F(i)$  tels que:

- $e_1 = 1 = e_{2m+1}$ ,
  - $Z'F(y_k)(e_{2k-1}) = Z'F(y'_{k'}) (e_{2k+1}) = e_{2k}$ , pour tout  $1 \leq k \leq m$ .
- Autrement dit, on dispose bien d'un diagramme commutatif tel que (\*\*\*) de  $T_{\text{Ens}}$  où, pour tout  $1 \leq h \leq 2m+1$ , l'application  $a_h : 1 \rightarrow Z'F(h)$  est définie par  $a_h(1) = e_h$ . **Fin de la preuve.**

4. Pour conclure, caractérisons les théories de Lawvere /T/ qui sont triviales et établissons que, pour ces théories, le foncteur  $U_T$  n'est certainement pas à plongements.

**Théorème.** Si /T/ est une théorie triviale, c'est soit la théorie de Lawvere des ensembles de cardinal 1, soit la théorie de Lawvere des ensembles de cardinal  $\leq 1$ .

**Preuve.** Si /T/ est une théorie triviale, par définition  $H_T$  n'est pas injectif et,  $H_T$  étant une bijection sur les objets, il n'est donc pas fidèle. En conséquence, il existe deux applications distinctes  $f, g : n \rightarrow m$  (ce qui implique  $m \geq 2$ ) telles que  $H_T(f) = H_T(g) : A^m \rightarrow A^n$ .

Il existe donc deux applications distinctes  $f', g' : 1 \rightarrow m$  telles que  $H_T(f') = \pi(m, f'(1)) = \pi(m, g'(1)) : A^m \rightarrow A$ .

Il en résulte que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ :

$(\text{Hom}(A^p, \pi(m, i)) : \text{Hom}(A^p, A^m) \rightarrow \text{Hom}(A^p, A))_{1 \leq i \leq m}$  est une représentation de  $\text{Hom}(A^p, A^m)$  comme produit dans  $\text{Ens}$  de  $m$  copies de  $\text{Hom}(A^p, A)$  pour laquelle les deux projections d'indices  $f'(1) \neq g'(1)$  sont égales. Ceci impose que  $\text{Hom}(A^p, A)$  est de cardinal  $\leq 1$ .

On en déduit que, pour tout entier  $q$ ,  $\text{Hom}(A^p, A^q) = \text{Hom}(A^p, A)^q$  est de cardinal  $\leq 1$ . Mais, si  $p \geq 1$ , il existe toujours une application  $h : q \rightarrow p$ , donc une flèche  $H_T(h) : A^p \rightarrow A^q$ . En conséquence  $\text{Hom}(A^p, A^q)$  est toujours de cardinal  $\geq 1$ . En d'autres termes, si /T/ est triviale, la sous-catégorie pleine  $T_1$  de  $T$ , dont les objets sont les  $A^p$ , où  $p \geq 1$ , est isomorphe au groupeïde des couples de ses objets.

D'autre part, nous avons toujours, pour tout entier  $q \geq 1$  :

- soit  $\text{Hom}(A^0, A^q) = \text{Hom}(A^0, A)^q = 1$ ,
- soit  $\text{Hom}(A^0, A^q) = \text{Hom}(A^0, A)^q$  est vide.

Dans le premier cas, on vérifie facilement que  $/T/$  est la théorie des ensembles de cardinal 1 et, dans le second cas, que  $/T/$  est la théorie des ensembles de cardinal  $\aleph_1$ . Dans ces deux cas, il est clair que le foncteur  $U_T$  n'est pas à plongements. Fin de la preuve.

#### Bibliographie.

(C.S.P.P) C. Lair:

Conditions syntaxiques de plongement, I et II, Diagrammes 1 et 2, Paris, 1979 et 1980.

(S.A.F.T.) F. W. Lawvere:

Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, Lect. Notes in Math. 61, Springer, 1968.

(S.Q.P.P.) C. Henry:

Sur quelques problèmes de plongement entre structures algébriques, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle en Math., Diagrammes 10, Paris, 1983.