C. HENRY

Sur quelques problèmes de plongement en algèbre : I. Une propriété élemantaire

Diagrammes, tome 15 (1986), exp. nº 1, p. CH1-CH7

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1986__15__A1_0>

SUR QUELQUES PROBLEMES DE PLONGEMENT EN ALGEBRE

I. UNE PROPRIETE ELEMENTAIRE

C. Henry

Introduction

Il est tout à fait banal de constater que tout ensemble se plonge dans le groupe (resp. le demi-groupe, le monoïde, le groupe abélien, l'anneau, l'espace vectoriel sur un corps donné...) qu'il engendre librement. Il n'est certainement pas choquant, mais c'est moins banal, d'affirmer qu'en toute généralité, tout ensemble se plonge toujours dans la structure algébrique, d'un type donné, qu'il engendre librement.

On imagine bien que l'on peut donner de cette propriété générale de plongement une démonstration (sémantique) en procédant comme suit:

(1) le type de structures algébriques considéré est défini par une liste de lois de composition et une liste d'axiomes (i. e. d'équations quantifiées universellement),

(2) pour chaque ensemble E, on décrit (par une suite d'adjonctions formelles d'éléments et d'identifications) la structure libre L(E) qu'il engendre,

(3) il suffit de constater que, dans ces constructions, on n'effectue jamais aucune identification entre éléments de E.

A.M.S. Sub. Class. : 18 C 10 , 03 C 05

Bien sûr, c'est le point (2) qu'il est fastidieux de mettre en oeuvre en toute généralité (c'est déjà délicat dans certains cas particuliers !) .

Nous fournissons ici une démonstration précise, mais brève, de cette propriété générale de plongement: nous considérons qu'un type de structures algébriques est décrit par une théorie de Lawvere (voir (S.A.F.T.)) et nous utilisons alors une condition suffisante *syntaxique* (i. e. ne portant que sur la forme de la théorie considérée) établie antérieurement (voir (C.S.P.P.)), fort utile par ailleurs pour établir d'autres propriétés de plongement entre structures algébriques de types différents (voir (S.Q.P.P.)) .

Techniquement, nous proposons donc une démonstration d'un énoncé, certes peu surprenant, mais qu'il faut bien prouver...ou réfuter, un jour !

Si nous pouvons convaincre le lecteur qu'il ne s'agit là que d'un prétexte servant à montrer l'effectivité de la méthode syntaxique utilisée, notre véritable but sera atteint.

D'aucuns considéreront peut-être, voulant ignorer ce prétexte, que nous avons démontré une banalité. Encore faudrait-il au moins qu'ils se soient donné la peine d'établir que c'en est une, par exemple en mettant au point la démonstration sémantique suggérée ci-dessus, ou en lisant ce qui suit.

1. Si $\mathbf{T}$ est une théorie de Lawvere (voir (S.A.F.T.)), nous désignerons généralement par $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de ses objets et, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on note $(\pi(n,i):A^n\to A)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une présentation choisie de l'objet A^n comme produit, dans la catégorie $\mathbf{T}$, de n copies de A.
On note Alg/$\mathbf{T}$/ la catégorie des algèbres de /$\mathbf{T}$/ et par U_T:Alg/$\mathbf{T}$/$\to$Ens le foncteur d'oubli canonique associé. On sait que U_T admet un adjoint à gauche V_T, nous dirons que U_T est *à plongements* si, et seulement si, pour tout ensemble E, l'application canonique $f_E:E\to U_TV_T(E)$ est une injection.

On note /$\mathbf{T}_{Ens}$/ la *théorie de Lawvere des ensembles* i. e. la théorie telle que Alg/$\mathbf{T}_{Ens}$/ et Ens soient équivalentes. Alors $(\mathbf{T}_{Ens})^{op}$ est la sous-catégorie pleine de Ens dont les objets sont les $\mathbf{n}=\{1,.......,n\}$, si $n\in\mathbf{N}^*$, et $\mathbf{0}=\emptyset$. De plus, on sait que /$\mathbf{T}_{Ens}$/ est un objet initial de la catégorie des théories (et de leurs homomorphismes): à toute théorie /$\mathbf{T}$/ est donc associé un unique homomorphisme $/H_T/:/T_{Ens}/ \to /T/$. Dans ces conditions, on dit que /T/ est une *théorie non triviale* si, et seulement si, le foncteur H_T est injectif.

Plus généralement, si $/H/:/T'/ \to /T/$ est un homomorphisme entre deux théories, il induit un foncteur d'oubli $Alg/H/: Alg/T/ \to Alg/T'/$ (en particulier, si $/T'/=/T_{Ens}/$ et $/H/=/H_T/$, on a $Alg\ /H/ = U_T$ à l'équivalence près). Nous dirons que Alg /H/ est *à plongements* si,et seulement si,toute algèbre de /T'/ se plonge dans une algèbre de /T/

2. En (C.S.P.P.) et (S.Q.P.P.) est établie une condition suffisante pour qu'un foncteur de la forme Alg/H/ soit à plongements.
Pour énoncer ce critère avec précision, rappelons tout d'abord que:
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par z_n la catégorie

$$1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \quad \ldots\ldots \quad 2n-1 \leftarrow 2n \rightarrow 2n+1$$

- si C est une catégorie, on appelle *zig-zag* de C tout foncteur de la forme $Z': z_n \to C$ (ou encore $Z: z_m^{op} \to C$).

Dans ces conditions, si $/H/:/T'/ \to /T/$ est un homomorphisme de théories de Lawvere, le foncteur Alg/H/ est à plongements à la condition suffisante que:

(CS) *si on dispose d'un zig-zag* $Z': z_n \to$ **T'** *de* **T'** *défini par*

$$\begin{array}{ccc}
1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 & \ldots\ldots\ldots & 2n-1 \leftarrow 2n \rightarrow 2n+1 \\
& \downarrow Z' & \\
A' \leftarrow A'_2 \rightarrow A'_3 & \ldots\ldots\ldots & A'_{2n-1} \leftarrow A'_{2n} \rightarrow A'
\end{array}$$

et si on dispose d'un diagramme (*) commutatif dans **T** *et tel que ci-dessous*

$$
\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 & \cdots\cdots & 2n-1 & 2n \arrow[l] \arrow[r] & 2n+1 \\
 & & & {} \arrow[d, "Z'"] \arrow[from=u, phantom] & & & \\
A' & A'_{2} \arrow[l] \arrow[r] & A'_{3} & \cdots & A'_{2n-1} & A'_{2n} \arrow[l] \arrow[r] & A' \\
 & & & {} \arrow[d, "H"] & & & \\
A \arrow[dddrrr, "Id_A"'] & A_{2} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dddrr] & A_{3} \arrow[dddr] & \cdots & A_{2n-1} \arrow[dddl] & A_{2n} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dddll, dashed] & A \arrow[dddlll, "Id_A"] \\
 & & & & & & \\
(*) & & & & & & \\
 & & & A & & &
\end{tikzcd}
$$

alors, il existe un entier m$\geq$1, *un foncteur* F: $z_m \to z_n$ *et un diagramme commutatif dans* T' *tels que ci-dessous:*

$$
\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 & \cdots\cdots & 2m-1 & 2m \arrow[l] \arrow[r] & 2m+1 \\
 & & & {} \arrow[d, "Z = Z'.F"] & & & \\
A' \arrow[dddrrr, "Id_{A'}"'] & Z(2) \arrow[l] \arrow[r] & Z(3) \arrow[dddr, "a_3"] & \cdots & Z(2m-1) \arrow[dddl, "a_{2m-1}"'] & Z(2m) \arrow[l] \arrow[r] & Z(2m+1) \arrow[dddlll, "Id_A"] \\
 & & & & & & \\
(**) & & & & & & \\
 & & & A' & & &
\end{tikzcd}
$$

3. Montrons que, si /T/ est une théorie de Lawvere non triviale, l'homomorphisme (très particulier) canonique $/H_T/:/T_{Ens}/\to/T/$ vérifie la condition (CS) précédente. Autrement dit, prouvons que :

Théorème. *Si /T/ est une théorie de Lawvere non triviale, le foncteur d'oubli* U_T :Alg/T/ $\to$ Ens *est à plongements.*

Preuve. Supposons que $Z' : z_n \to T_{Ens}$ est un zigzag tel que (*) soit un diagramme commutatif de T.
Le foncteur $G : z_n^{op} \xrightarrow{Z'^{op}} T_{Ens}^{op} \xrightarrow{inj}$ Ens admet une limite inductive

$$\begin{tikzcd}
 & & & \varinjlim G = p & & & \\
Z'(1) \arrow[r] \arrow[urrr, "s_1"] & Z'(2) \arrow[urr] & Z'(3) \arrow[l] \arrow[ur] & \cdots & Z'(2n-1) \arrow[r] \arrow[ul] & Z'(2n) \arrow[ull] & Z'(2n+1) \arrow[l] \arrow[ulll, "s_{2n+1}"']
\end{tikzcd}$$

qui est évidemment objet de T_{Ens}^{op}.
Nous disposons donc du diagramme commutatif dual dans T_{Ens} et, puisque (*) est commutatif dans T, nous obtenons le diagramme commutatif ci-dessous dans T

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_T(p) \arrow[dlll, "H_T(s_1)"'] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[drrr, "H_T(s_{2n+1})"] & & & \\
A \arrow[drrr, "Id_A"'] & A_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[drr] & A_3 \arrow[dr] & \text{-----} & A_{2n-1} \arrow[dl] & A_{2n} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dll] & A_{2n+1} \arrow[dlll, "Id_A"] \\
 & & & A & & &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte $H_T(s_1) = H_T(s_{2n+1})$ et, puisque H_T est fidèle (T étant non triviale), $s_1 = s_{2n+1}$ ou encore $s_1(1) = s_{2n+1}(1)$.

Le calcul des limites inductives dans Ens indique donc qu'il existe un zigzag F^{op} : $z_m{}^{op} \to z_n{}^{op}$ et une famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 2m+1}$ appartenant à $\prod_{1\leqslant i\leqslant 2m+1} Z'F(i)$ tels que:

- $e_1 = 1 = e_{2m+1}$,
- $Z'\ F(y_k)(e_{2k-1}) = Z'\ F(y'_k)(e_{2k+1}) = e_{2k}$, pour tout $1\leqslant k\leqslant m$.

Autrement dit, on dispose bien d'un diagramme commutatif tel que (**) de T_{Ens} où, pour tout $1\leqslant h\leqslant 2m+1$, l'application $a_h : 1\to Z'F(h)$ est définie par $a_h(1) = e_h$. **Fin de la preuve.**

4. Pour conclure, caractérisons les théories de Lawvere /T/ qui sont triviales et établissons que, pour ces théories, le foncteur U_T n'est certainement pas à plongements.

Théorème. *Si /T/ est une théorie triviale, c'est soit la théorie de Lawvere des ensembles de cardinal* 1 , *soit la théorie de Lawvere des ensembles de cardinal* $\leqslant$ 1 .

Preuve. Si /T/ est une théorie triviale, par définition H_T n' est pas injectif et, H_T étant une bijection sur les objets, il n'est donc pas fidèle. En conséquence, il existe deux applications *distinctes* $f,g : \mathbf{n} \to \mathbf{m}$ (ce qui implique $m\geqslant 2$) telles que $H_T(f)=H_T(g) : A^m\to A^n$.
Il existe donc deux applications *distinctes* $f',g' : \mathbf{1}\to\mathbf{m}$ telles que $H_T(f') = \pi(m,f'(1)) = \pi(m,g'(1)) : A^m\to A$.
Il en résulte que, pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$(\mathrm{Hom}(A^p,\pi(m,i)):\mathrm{Hom}(A^p,A^m)\to \mathrm{Hom}(A^p,A))_{1\leqslant i\leqslant m}$$

est une représentation de $\mathrm{Hom}(A^p,A^m)$ comme produit dans Ens de m copies de $\mathrm{Hom}(A^p,A)$ pour laquelle les deux projections d'indices $f'(1) \neq g'(1)$ sont égales. Ceci impose que $\mathrm{Hom}(A^p,A)$ est de cardinal $\leqslant 1$.
On en déduit que, pour tout entier q, $\mathrm{Hom}(A^p,A^q) = \mathrm{Hom}(A^p,A)^q$ est de cardinal $\leqslant$ 1. Mais, si $p \geqslant 1$, il existe toujours une application h: $\mathbf{q}\to\mathbf{p}$, donc une flèche $H_T(h) : A^p\to A^q$. En conséquence $\mathrm{Hom}(A^p,A^q)$ est toujours de cardinal $\geqslant$ 1. En d'autres termes, si /T/ est triviale, la sous-catégorie pleine $\mathbf{T}_1$ de $\mathbf{T}$, dont les objets sont les A^p, où $p\geqslant 1$, est isomorphe au groupoïde des couples de ses objets.
D'autre part, nous avons toujours, pour tout entier $q\geqslant 1$:

- soit $\mathrm{Hom}(A^0,A^q) = \mathrm{Hom}(A^0,A)^q = 1$,
- soit $\mathrm{Hom}(A^0,A^q) = \mathrm{Hom}(A^0,A)^q$ est vide.

Dans le premier cas, on vérifie facilement que /T/ est la théorie des ensembles de cardinal 1 et, dans le second cas, que /T/ est la théorie des ensembles de cardinal ≤ 1 . Dans ces deux cas, il est clair que le foncteur U_T n'est pas à plongements. **Fin de la preuve.**

Bibliographie.

(C.S.P.P) C. Lair:

Conditions syntaxiques de plongement, I et II, Diagrammes 1 et 2, Paris, 1979 et 1980.

(S.A.F.T.) F. W. Lawvere:

Some algebraïc problems in the context of functorial semantics of algebraïc theories, Lect. Notes in Math. 61, Springer, 1968.

(S.Q.P.P.) C. Henry:

Sur quelques problèmes de plongement entre structures algébriques, Thèse de 3ème cycle en Math., Diagrammes 10, Paris, 1983.