CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

TIMOTHY PORTER

Une théorie catégorique d'homotopie simple

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, n° 2 (1981), p. 191-199

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_2_191_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XXII-2 (1981)

3e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

UNE THÉORIE CATÉGORIQUE D'HOMOTOPIE SIMPLE

par Timothy PORTER

La théorie classique d'homotopie simple introduite en 1950 par J. H. C. Whitehead reposait sur la question : Est-il possible de construire toutes les équivalences homotopiques entre deux complexes finis X et Y par un processus d'attachement homotopiquement trivial des cellules ? La réponse étant «non», il fallait chercher une classification des équivalences homotopiques dans des classes qui mesurent, pour un complexe fini X, la divergence d'une réponse positive à la première question. La classification donnée par Whitehead fut une des origines de la K-théorie algébrique. Pour qu'une équivalence homotopique f, de source X, soit «constructible», ou «simple» selon Whitehead, il faut et il suffit qu'une obstruction $\tau(f)$, dite «torsion de f», soit nulle ; les obstructions sont les éléments d'un groupe $Wh(\pi_1(X))$ et chaque élément de $Wh(\pi_1(X))$ est réalisable comme torsion d'une équivalence d'homotopie de source X. (Voir pour exemple Cohen [C] pour une exposition de cette théorie.)

En 1969, Eckmann et Maumary ont donné une version géométrique de cette théorie [EM] et, peu après, Eckmann [E] et Siebenmann [S] en ont donné une version catégorique. Le développement de cette théorie catégorique avait comme but le prolongement de la théorie classique à la catégorie des complexes infinis, localement finis.

Récemment je voulais trouver une réponse à la «question de Whitehead» dans le cadre de la théorie de la forme. Les leçons apprises dans l'étude des prolongements à «la forme» d'autres résultats classiques sur les complexes m'ont suggéré qu'une approche catégorique aurait la plus grande chance de réussir. Malheureusement, à la théorie développée par Eckmann et Siebenmann manquait la définition d'une équivalence simple. Dans leur théorie, les équivalences simples étaient données *ab initio* ; dans

ma situation il fallait construire les équivalences simples.

Une théorie catégorique d'homotopie simple est évidemment liée à une théorie catégorique d'homotopie. J'ai choisi d'utiliser une théorie d'homotopie assez élémentaire.

1. LES FONCTEURS «CYLINDRES»

Soit C une catégorie ayant toutes les limites finies et colimites finies. On dit qu'un endofoncteur $(\ )\times I$ de C est un *foncteur cylindre* s'il est muni de la structure suivante:

des transformations naturelles

a) $\sigma : (\ )\times I \to 1_C$ - la «projection» du cylindre sur sa base,

b) $e_1 : 1 \to (\ )\times I$ - la «fin supérieure»,

c) $m : ((\ )\times I)\times I \to (\ )\times I$ - la «multiplication»,

d) $i : (\ )\times I \to (\ )\times I$ - l'«involution»,

e) $s : (\ )\times I \to (\ )\times I \amalg_{e_1} \amalg_{e_0} (\ )\times I$ - la «sousdivision», où nous avons noté $e_0 = ie_1$,

qui satisfont aux axiomes:

(i) $((\ )\times I, e_1, m)$ est une monade,

(ii) pour $i, j \in \{0,1\}$, $e_j(X\times I)e_i(X) = (e_i(X)\times I)e_j(X)$,

(iii) $s(X)e_0(X) = inc_1 e_0(X)$, $s(X)e_1(X) = inc_2 e_1(X)$,

(iv) $\sigma(X)e_1(X) = 1_X$, $\sigma(X)i(X) = \sigma(X)$,

(v) $m(X)e_0(X\times I) = e_0(X)\sigma(X) = m(X)(e_0(X)\times I)$.

En utilisant un foncteur cylindre, on peut définir une relation d'homotopie dans C de façon évidente. Cette relation est une relation d'équivalence sur les morphismes de C, compatible avec la composition.

On peut définir les cofibrations; la plupart des résultats classiques de leur théorie élémentaire ont leur analogue dans cette théorie. Pour certains de ces résultats, il faut faire la restriction: $(\ )\times I$ est exact à droite. Mais dans les exemples intéressants dans lesquels cette condition n'est pas satisfaite, ces résultats sont encore valables.

2. EXEMPLES

(A) *Le cylindre topologique.* $(\ )\times I$ est le foncteur «produit avec

$I = [0,1]$ ». σ est la projection, e_I est induit par le morphisme

$$\{1\} \hookrightarrow [0,1],$$

m est induit par la structure de monoïde de $[0,1]$, $i(x,t) = (x, 1-t)$ et s est la «sousdivision» évidente.

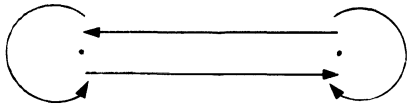
(B) *Les complexes de chaînes.* Deux structures sont possibles:

a) $((X)\times I)_n = X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1}$,
$d_{X\times I}(x,y,z) = (\partial_X x - z, \partial_X y + z, -\partial_X z)$,
$\sigma(x,y,z) = x+y$, $e_I(x) = (0,x,0)$, $i(x,y,z) = (y,x,z)$,
m et s sont plus difficiles à préciser dans ce cas.

b) $(X\times I)_n = X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1}$, $d_{X\times I}(x,y,z) = (\partial_X x, z, 0)$,
$\sigma(x,y,z) = x$, $e_I(x) = (x,x,\partial_X x)$,
$i(x,y,z) = (x, x-y, dx-z)$,
m et s sont un peu difficiles à préciser.

Les deux structures (σ, e_I) sont isomorphes, mais le reste de la structure n'est pas compatible avec l'isomorphisme. (b est mis en évidence dans une Note de Kleisli [K].)

(C) *La catégorie des groupoïdes.* Soit I le groupoïde



$(\ )\times I$ est produit avec I. Les transformations naturelles sont toutes définies de façon semblable au cas topologique.

(D) *Procatégories et catégories des diagrammes.* Si C admet un foncteur cylindre, il en est de même pour $Pro(C)$ et C^J pour n'importe quelle petite catégorie J.

(E) *Foncteurs exacts à droite sur C.* Si C admet un foncteur cylindre, il en est de même pour la catégorie $Dex(C, Ens)$ des foncteurs exacts à droite sur C.

(F) *Les cylindres injectifs.* Soit $U: C \to D$ un foncteur entre deux catégories abéliennes tel que U admet un adjoint à droite R. $J = RU$ est muni d'une structure de monade avec unité de l'adjonction $j: 1 \to J$ et mul-

tiplication $\mu : J^2 \to J$. Soit M un objet de C. Définissons $(M)\times I = M \oplus J(M)$ et écrivons les formules avec les «éléments»:

$$\sigma(m,n) = m, \quad e_1(m) = (m, j(M)(m)), \quad i(m,n) = (m, j(M)(m)-n).$$

Soit

$$n(M): M \oplus J(M) \oplus J(M) \oplus J^2(M) \to M \oplus J(M)$$

le morphisme défini par

$$n(M)(x,y,z,t) = (x,\ y+z+\mu(M)(t));$$

n est une multiplication pour la monade $(\ )\times I$ avec unité e_0. La multiplication pour $((\ )\times I, e_1)$ est définie par

$$m(M) = i(M)n(M)i(M\times I)(i(M)\times I).$$

La «sousdivision»

$$s(M): M \oplus J(M) \to (M)\times I \,{}_{e_1}\amalg_{e_0}\, (M)\times I \approx M \oplus J(M) \oplus J(M)$$

est, avec cette identification, $s(M)(m,n) = (m,n,n)$. (Ces formules sont les formules valables pour le cas B-b des complexes de chaînes.)

(G) Toutes les définitions sont dualisables et les définitions duales des foncteurs cocylindre, etc..., nous donnent une autre famille d'exemples.

Par exemple: Soit C la catégorie des anneaux (resp. anneaux commutatifs). Pour chaque anneau A, soit $A[t]$ l'anneau des polynômes. Les transformations naturelles

$\sigma: A \to A[t]$, «polynôme constant»,

$e_1: A[t] \to A$, $e_1(\Sigma a_i t^i) = \Sigma a_i$,

$i: A[t] \to A[t]$, $i(\Sigma a_i t^i) = \Sigma a_i (1-t)^i$,

$m: A[t] \to A[t_1, t_2]$, $m(\Sigma a_i t^i) = \Sigma a_i t_1^i t_2^i$

nous donnent presque une structure de cocylindre. Malheureusement il n'y a pas de «sousdivision»

$$s: A[t] \,{}_{e_1}\times_{e_0}\, A[t] \to A[t].$$

On peut éviter cette difficulté si nous formons un diagramme dans lequel les objets sont les anneaux

$$A[t_1] \,{}_{e_1}\times_{e_0}\, A[t_2] \times \ldots {}_{e_1}\times_{e_0}\, A[t_n],$$

et les morphismes sont les morphismes évidents. La colimite de ce diagramme a encore la structure signalée plus haut mais il y a une transformation naturelle «sousdivision». On peut prendre cette colimite comme A^I.

L'intérêt de cet exemple est que, dans le cas des anneaux commutatifs, les foncteurs de C dans Ens qui sont exacts à gauche contiennent entre eux tous les schémas affines, donc on a la possibilité d'une théorie homotopique de schémas ind-affines (colimites de schémas affines). Il y a des liens aussi avec la K-théorie algébrique de Karoubi-Villamayor.

3. LES EQUIVALENCES SIMPLES

Dans la théorie géométrique d'homotopie simple d'Eckmann-Maumary, on utilise l'attachement trivial des cellules seulement pour montrer que les inclusions d'un complexe X comme fin du cylindre $X \times I$ sont les équivalences simples. Sans «cellules», ces inclusions vont être les équivalences simples génératrices.

Supposons donné C et un foncteur cylindre $(\ ) \times I$ sur C. La classe des équivalences simples de C par rapport au cylindre est la plus petite classe S de morphismes de C qui satisfait à:

S1) Pour chaque X de C, $e_1(X) \in S$. Chaque isomorphisme est dans S.

S2) Si

$$Y \xleftarrow{u} X \xrightarrow{v} Z$$

est dans C, $v \in S$ et v est inversible à gauche, dans le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & Z \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} \\ Y & \xrightarrow[v']{} & Y' \end{array}$$

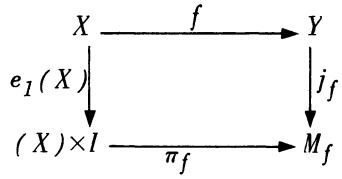
on a $v' \in S$.

S3) Si f, g sont des morphismes de C tels que gf est défini, dès que deux d'entre f, g et gf sont dans S, il en est de même pour le troisième.

S4) Si $(f_a : X_a \to Y_a)_{a \in A}$ est une famille dans S telle que le coproduit $\amalg f_a : \amalg X_a \to \amalg Y_a$ existe dans C, $\amalg f_a$ est dans S.

EXEMPLES. Quand $C = CW_{fini}$, la catégorie des CW-complexes finis, la classe S est exactement la classe classique des équivalences simples de Whitehead. Soit $C = CW_{locfini}$, la catégorie des CW-complexes localement finis; la classe S est la classe des équivalences simples d'Eckmann et Siebenmann.

Si $f: X \to Y$ est un morphisme de C, on peut construire un cylindre d'application M_f par le carré cocartésien



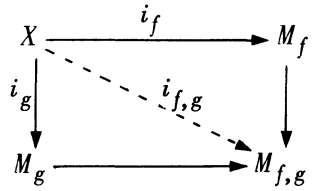
j_f est dans S et possède un inverse à gauche p_f. Notons $i_f = \pi_f e_0(X)$. Une étude des cylindres d'applications nous permet d'utiliser les idées d'Eckmann-Maumary.

Soit $f: X \to Y$, $g: X \to Z$ deux morphismes. Disons que f et g sont *simplement équivalents* s'il existe une équivalence simple $s: Y \to Z$ telle que sf et g sont homotopes. Notons $<f>$ la classe d'équivalence déterminée par f et $A(X)$ l'ensemble de ces classes. (Il faut des conditions sur C pour assurer que $A(X)$ est un ensemble et pas une classe stricte, mais ces considérations ne sont pas difficiles.)

THEOREME. *a) $A(X)$ est un monoïde abélien.*

b) $A: C \to Mon\,Ab$ est un foncteur homotopique.

Pour définir l'addition dans $A(X)$, nous devons faire les observations suivantes: $<f> = <i_f>$ pour chaque f; si $<f>, <g> \in A(X)$ et $i_{f,g}$ est défini par le carré cocartésien



$<i_{f,g}>$ est indépendant des choix de f, g dans $<f>$ et $<g>$. L'addition est donnée par la formule

$$<f> + <g> = <i_{f,g}>.$$

Si f est une équivalence d'homotopie, $A(f)$ est une bijection. Si f' est un inverse homotopique de f, $f': Y \to X$, il existe $<g> \in A(X)$ tel que $A(f)<g> = <f'>$ et nous avons

$$<f> + <g> = <f'f> = <1_X>,$$

identité pour l'addition dans $A(X)$.

Soit

$$E(X) = \{ <f> \mid f \text{ est une équivalence d'homotopie} \}.$$

$E(\ )$ nous donne un foncteur homotopique de C dans la catégorie des groupes abéliens.

EXEMPLE. Dans la situation classique $E(X)$ est isomorphe au groupe de Whitehead $Wh(\pi_1(X))$.

4. LE GROUPE $E(X)$ POUR LE CYLINDRE INJECTIF

Dans le cas d'une théorie d'homotopie simple algébrique et d'un cylindre injectif, nous avons une description complète des équivalences simples.

Soit J le foncteur utilisé dans la construction de $(\ )\times I$ et disons qu'un objet injectif relatif K *est stablement colibre* s'il existe deux objets L, M de C tels que $K \oplus J(L) = J(M)$.

Soit maintenant $\bar{S}$ la plus petite classe de morphismes de C telle que

1° Pour chaque X de C et K stablement colibre,

$$inc_X: X \to X \oplus K \quad \text{et} \quad pr_X: X \oplus K \to X$$

sont dans $\bar{S}$.

2° Chaque isomorphisme est dans $\bar{S}$.

3° Si $f, g \in \bar{S}$ et gf est défini, $gf \in \bar{S}$.

PROPOSITION. *$f: X \to Y$ est dans $\bar{S}$ ssi f possède une factorisation*

$$X \xrightarrow{inc_X} X \oplus K \approx Y \oplus L \xrightarrow{pr_Y} Y$$

avec K, L stablement colibres.

THEOREME. *La classe* $\bar{S}$ *est exactement la classe des équivalences simples de* C *définie par le cylindre* $1 \oplus J$.

COROLLAIRE. *Soit* $I_0(C,J)$ *le groupe abélien ayant les classes d'isomorphisme* $[K]$ *des injectifs relatifs pour générateurs et avec les relations*

(i) $[K]+[M]=[K \oplus M]$,

(ii) $[K]=0$ *si* $K \approx J(L)$ *pour un objet* L *de* C.

Si X *est un objet de* C, $E(X)$ *est isomorphe à* $I_0(C,J)$ *et l'isomorphisme est indépendant de* X.

S'il n'y a pas quelques restrictions sur la «taille» des objets de C, $I_0(C,J)$ est probablement zéro. Par exemple, si $C = Mod\text{-}A$ avec A un anneau nœthérien et E un cogénérateur injectif de C, le foncteur $U: C \to Ens_*^{Q^P}$, $U = Hom(-,E)$ a un adjoint à droite $P(X) = E^X$, et on peut prendre $J(M) = E^{U(M)}$. J est un «injectif fonctoriel». Pour le cylindre $1 \oplus J$, $E(M)$ est toujours zéro.

Cependant si nous faisons des restrictions sur C, ce n'est pas toujours le cas que $I_0(C,J)=0$. Par exemple, considérons la catégorie $f.g.Mod\text{-}Z(C_2)$ des modules de type fini sur l'anneau de groupe associé au groupe d'ordre 2. Il existe une paire de foncteurs adjoints

$$C = f.g.Mod\text{-}Z(C_2) \underset{R}{\overset{U}{\rightleftarrows}} f.g.Ab = D.$$

Pour la monade $J = RU$ associée à cette adjonction, $I_0(C,J)$ est somme directe d'un groupe abélien libre de rang infini et d'un autre groupe de structure inconnue. Donc $I_0(C,J)$ n'est pas toujours zéro.

En dualisant, nous trouvons un groupe $K_0(C,J)$ des projectifs relatifs *modulo* les projectifs qui sont stablement libres. Il semble que ces groupes sont fortement liés avec les anneaux de Grothendieck relatifs considérés en théorie des représentations par Dress, Lam et Reiner.

BIBLIOGRAPHIE

C. COHEN, M., *A course in simple homotopy theory*, GTM 10, Springer, 1973.

EM. ECKMANN, B. & MAUMARY, S., Le groupe des types simples d'homotopie, *Essays on Topology...*, dédiés à G. de Rham, Springer, 1970.

E. ECKMANN, B., Simple homotopy type and categories of fractions, *Symp. Math.* V (1970), 285- 299.

S. SIEBENMANN, L., Infinite simple homotopy types, *Indig. Math.* 32 (1970), 479- 495.

K. KLEISLI, H., Homotopy theory in abelian categories, *Can. J. Math.* 14 (1962), 139- 169.

School of Mathematics and Computer Science
University College of North Wales
BANGOR, Gwynedd LL57 2UW
United Kingdom