CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JACQUES PENON

Infinitésimaux et intuitionnisme

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, n° 1 (1981), p. 67-72

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_1_67_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

3e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES DEDIE A CHARLES EHRESMANN

Vol. XXII-1 (1981)

INFINITESIMAUX ET INTUITIONNISME

par Jacques PENON

Une des propriétés les plus étonnantes du topos de Zariski est que, si on considère l'anneau local générique R, l'objet

$$D = [\![d \in R \mid d^2 = 0]\!]$$

apparait comme un «ensemble» d'éléments infiniment petits de R. Cette particularité a été mise en évidence par Lawvere-Kock quand ils ont constaté que dans ce topos $R \times R \xrightarrow{\sim} R^D$. Mais D n'est pas le seul objet du topos qui ait cette particularité. Les objets

$$D_n = [\![d \in R \mid d^{n+1} = 0]\!]$$

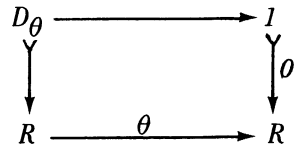
sont aussi constitués d'infinitésimaux.

Mais qu'est-ce au juste qu'un infinitésimal?

Pour la Géométrie algébrique, la réponse paraît claire:

infinitésimal = nilpotent.

Mais la Géométrie différentielle, elle, va nous obliger à réviser notre jugement. En effet, depuis trois-quatre ans maintenant on a cherché à montrer que la géométrie différentielle synthétique pouvait aussi s'appliquer à la géométrie différentielle classique. C'est principalement E. Dubuc qui s'est fixé ce programme. Plus précisément, il a cherché un topos $\underline{E}$ tel que la catégorie des variétés se plonge dans $\underline{E}$ et où plus particulièrement l'image de R devienne un anneau de type-ligne (en fait il demande plus). Il a réalisé ainsi plusieurs topos de mieux en mieux «adaptés» à (l'idée qu'on se fait de) la géométrie différentielle. Or, dans certains de ces topos, Dubuc constate la présence d'infinitésimaux qui ne sont pas nilpotents. Par exemple si $\theta : R \to R$ est une fonction (usuelle) plate en zéro ne s'annulant qu'en zéro et si on considère le produit fibré suivant dans le topos



on s'aperçoit que

$$\{0\} \subsetneq D \subsetneq \cdots \subsetneq D_n \subsetneq \cdots \subsetneq D_\theta$$

et pourtant

$$Hom(1, D_\theta) = \{0\}.$$

Ainsi donc il existe des infinitésimaux non-nilpotents. E. Dubuc se demande alors s'il est possible de définir ce qu'est un infiniment petit à l'aide du langage de la théorie des topos. Le but de cet article est de tenter d'apporter une réponse à cette question.

Il semble que, si infiniment petits il y a, ceux-ci n'aient rien à voir avec la structure algébrique de l'anneau R, mais qu'ils dépendent de la structure du topos lui-même dans son ensemble. D'une certaine façon un infiniment petit x est un élément qu'on *ne peut pas distinguer* de zéro. C'est pourquoi la formule

$$\neg\neg\ (x = 0)$$

semble convenable pour définir les infinitésimaux. Il reste donc à tester cette formule dans les topos de la géométrie différentielle synthétique, or:

1° Si on considère le topos de Zariski, ou le topos étale, alors

PROPOSITION (Kock).

$$\neg\neg\{0\} = [\![\ x \in R \mid \neg\neg(x = 0)\ ]\!] = D_\infty$$

où $D_\infty = \bigcup_n Dn$.

Dans ce cas on retrouve bien l'identité infinitésimal = nilpotent, mentionnée plus haut.

2° Considérons maintenant le topos suivant (suggéré par E. Dubuc) $E = \widetilde{B^{op}}$, où

a) B est la catégorie des anneaux C^∞ de la forme $C^\infty(R^n)/I$ où I est un idéal de caractère local, c'est-à-dire

$$f \in I \iff \forall x \in \mathrm{R}^n \ (f \mid x \in I \mid x)$$

pour tout $f \in C^\infty(\mathrm{R}^n) = C^\infty(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$,

en notant $f \mid x$ le germe de la fonction f au point $x \in \mathrm{R}^n$ et $I \mid x$ l'idéal engendré par les germes en x des fonctions de I dans l'anneau $C^\infty_x(\mathrm{R}^n)$ des germes en x des fonctions lisses $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$.

b) La topologie de Grothendieck dont B^{op} est muni est la topologie des recouvrements ouverts (i.e. la topologie engendrée par les familles

$$(C^\infty(U) \to C^\infty(U_i))_{i \in I}, \text{ où } \bigcup_{i \in I} U_i = U).$$

PROPOSITION. *Dans le topos* E,

$$\neg\neg\{0\} = \overline{C^\infty_0(\mathrm{R})},$$

où $(\overline{.})$ *désigne le préfaisceau représentable associé à* $(.)$.

COROLLAIRE 1.

$$Hom(1, \neg\neg\{0\}) = \{0\}.$$

COROLLAIRE 2.

$$\{0\} \subsetneq D \subsetneq \cdots \subsetneq D_n \subsetneq \cdots \subsetneq D_\theta \subsetneq \cdots \subsetneq \neg\neg\{0\}.$$

COROLLAIRE 3.

$$Hom(\neg\neg\{0\}, R) = C^\infty_0(\mathrm{R})$$

(c'est-à-dire qu'il faut penser un germe de $C^\infty_0(\mathrm{R})$ comme une vraie flèche $\neg\neg\{0\} \to R$).

Ainsi donc l'écriture

$$\neg\neg\{0\} = \{ \text{ Infinitésimaux } \}$$

est justifiée.

Ceci va nous permettre de voir la géométrie différentielle synthétique sous un autre jour. En effet, si X est un objet quelconque d'un topos $\underline{E}$ et $a : 1 \to X$ une section globale, on sait exprimer maintenant ce qu'est *le voisinage infinitésimal de* a:

$$\neg\neg\{a\} = [\![x \in X \mid \neg\neg(x = a)]\!].$$

C'est pourquoi un certain nombre de concepts qui étaient difficiles à dé-

crire avant vont pouvoir s'exprimer de façon évidente :

1° Qu'est-ce qu'une variété de dimension n ? c'est (intuitivement) un objet X tel que

$$\forall x \in X, \ \neg\neg\{x\} \approx \neg\neg\{0\}^n \ ;$$

traduit dans le langage des topos cela signifie exactement que les flèches

$$\#X \xrightarrow{proj_1} X \quad \text{et} \quad X \times \neg\neg\{0\}^n \xrightarrow{proj_1} X$$

sont *localement isomorphes dans* $\underline{E}/X$, où

$$\#X \rightarrowtail X \times X \ = \ \neg\neg\,(\,X \rightarrowtail X \times X\,)$$

et où «localement» signifie qu'il existe un épimorphisme $q: Y \to X$ tel que

$$q^*(\,\#X \to X\,) \approx q^*(\,X \times \neg\neg\{0\}^n \to X\,)$$

dans $\underline{E}/Y$. Signalons que dans le cas général *) ce concept de variété est sensiblement plus fort que celui de Kock-Reyes. Là encore il reste à le tester sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique. On montre que :

PROPOSITION. *Si M est une variété usuelle, de dimension n, alors M, plongée dans* E, *est une variété de dimension n au sens interne.*

2° Qu'est-ce qu'une fléche étale $f: X \to Y$? c'est (intuitivement) une fléche telle que

$$\forall x \in X, \ \neg\neg\{x\} \to \neg\neg\{fx\} \text{ est un isomorphisme.}$$

Traduit dans le langage des topos cela signifie que le carré ci-dessous est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \#X & \longrightarrow & \#Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Encore une fois, si on teste sur le modèle E défini précédemment, on a :

PROPOSITION. *Une application lisse entre variété lisses est étale au sens usuel si et seulement si elle est étale dans le topos.*

*) Si l'anneau R vérifie les trois premières conditions de la demière proposition.

Signalons, là aussi, que cette notion de fléche étale est plus forte que celle introduite par Kock-Reyes *).

3° Maintenant qu'on sait dire ce qu'est un germe, il va donc être possible de formuler le théorème d'inversion locale. Il prend la forme suivante: Le carré

$$\begin{array}{ccc} \underline{Iso}_0(\Delta^n, \Delta^n) & \longrightarrow & \underline{Iso}_0(D(n), D(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Hom}_0(\Delta^n, \Delta^n) & \longrightarrow & \underline{Hom}_0(D(n), D(n)) \end{array}$$

est un produit fibré dans E, où

$$\Delta = \neg\neg\{0\}, \quad D(n) = [\![(d_1, \ldots, d_n) \in R^n \mid d_i d_j = 0 \ \forall i \ \forall j]\!]$$

et

$$\underline{Hom}_0(\Delta^n, \Delta^n) = [\![f: \Delta^n \to \Delta^n \mid f0 = 0]\!]$$

Une fois encore on montre que:

PROPOSITION. *Dans le topos* E *le théorème d'inversion locale est vrai.*

Enfin signalons le rapprochement suivant entre les deux concepts de morphismes étales:

PROPOSITION. *Soit un topos* $\underline{E}$ *muni d'un objet anneau* R *tel que:*

1° R est de type-ligne,

2° R est micro-linéaire,

3° R est un corps de fractions (i.e.

$$(\neg(x = 0) \Rightarrow x \text{ inversible}) \text{ et } \neg(0 = 1)),$$

4° R vérifie le théorème d'inversion locale;

alors si X et Y sont des variétés de dimension n, une flèche $X \to Y$ est étale si et seulement si le carré suivant est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X^D & \longrightarrow & Y^D \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

*) Cf. note page précédente.

U. E. R. de Mathématiques
Université Paris VII, Tours 45-55
2 Place Jussieu
75005 PARIS