

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

PAUL VER EECKE

Sur le calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
15, n° 3 (1974), p. 293-339

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_3_293_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par Paul VER EECHE

Depuis une dizaine d'années, on essaie d'étendre le Calcul Différentiel des espaces normables à ceux qui ne le sont pas, au moyen de procédés qui ressortissent à autant de présupposés sur la structure la mieux adaptée à ce projet, que ce soit celle d'espace vectoriel pseudo-topologique [6], quasi-topologique [2, 5, 6], bornologique [4], quasi-bornologique [3] ou tout simplement la structure d'espace vectoriel topologique au sens commun [1]. Ce dernier point de vue est partagé par l'auteur. Pour une application $f: A \rightarrow F$, où E, F sont des espaces vectoriels topologiques séparés et A un ouvert de E , étant donné un recouvrement \mathcal{S} de E , on propose une notion de \mathcal{S} -dérivabilité en un point x_0 de A , laquelle, dans le cas où \mathcal{S} est l'ensemble des bornés de E , n'est autre que la b -dérivabilité introduite ailleurs [7] pour les besoins de la Géométrie Différentielle des variétés modelées sur un espace localement convexe. La démonstration des théorèmes généraux de \mathcal{S} -dérivabilité à l'ordre supérieur pour une application composée (II.6) ou implicite (III.2) montre d'une part l'inconvénient d'admettre que les ensembles de \mathcal{S} ne soient pas forcément bornés, d'autre part l'intérêt des cas particuliers où \mathcal{S} est un ensemble remarquable de bornés, par exemple celui des compacts de E (c -dérivabilité). Cet article est essentiellement consacré à la démonstration des résultats annoncés dans une Note [8]. Mais on n'a pas retenu la définition primitive de la notion d'application de classe C^n ; celle-ci a été remplacée de telle sorte que, les autres résultats étant saufs, une application $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, b -dérivable en $x_0 \in A$, soit de classe C^0 en ce point, c'est-à-dire que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ quelle que soit la suite (x_n) convergeant vers x_0 au sens de Mackey. Mais f est alors continue en x_0 , si E est localement convexe métrisa-

ble; ces espaces semblent donc particulièrement appropriés au Calcul Différentiel dans les espaces vectoriels topologiques.

C'est pour l'auteur un agréable devoir que de remercier Mademoiselle Françoise Berquier qui a relu et récrit le manuscrit.

Induxi te ad legendum; sincerum mihi

Candore noto reddas iudicium peto.

Phèdre (Fables, III, prologue)

I DERIVEES DU PREMIER ORDRE

I.1. \mathcal{S} -dérivabilité.

Les e.v.t. (espaces vectoriels topologiques) étant supposés réels et séparés dans ce qui suit, on dira qu'une application f définie dans l'ouvert A de l'e.v.t. E à valeurs dans l'e.v.t. F est *directionnellement dérivable* en $x_0 \in A$ si

$$Df(x_0)(b) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + tb) - f(x_0)}{t}$$

existe quel que soit $b \in E$.

On dira alors que l'application $Df(x_0): b \rightarrow Df(x_0)(b)$ de E dans F est la *dérivée directionnelle* de f en x_0 . Etant donné un recouvrement \mathcal{S} de E , un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ de E et une application u de E dans F , les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) Quels que soient $M \in \mathcal{S}$ et le voisinage W de $0 \in F$, il existe $0 < \alpha \leq 1$ tel que $b \in M \cap \Omega$, $0 < |t| < \alpha$ entraînent:

$$\frac{f(x_0 + tb) - f(x_0)}{t} - u(b) \in W.$$

ii) Quelles que soient la suite (b_n) de E subordonnée à $\mathcal{S} \mid \Omega$ (c'est-à-dire telle qu'il existe $M \in \mathcal{S}$ de sorte que (b_n) soit à valeurs

dans $M \cap \Omega$) et la suite réelle (t_n) de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers 0, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} - u(b_n) = 0.$$

On observe que f est alors directionnellement dérivable en x_0 et que $Df(x_0) = u$. S'il existe un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ et une application linéaire continue u de E dans F tels que les conditions équivalentes ci-dessus (i) et (ii) soient vérifiées, on dira que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est \mathcal{S} -dérivable en x_0 et que u , c'est-à-dire $Df(x_0)$, est la \mathcal{S} -dérivée de f en x_0 . Lorsqu'il y aura lieu, on précisera que f est \mathcal{S} -dérivable (ou encore que u est la \mathcal{S} -dérivée de f) en x_0 , relativement à Ω .

On dira que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est \mathcal{S} -dérivable si f est \mathcal{S} -dérivable en tout $x \in A$; on appellera alors \mathcal{S} -dérivée de f l'application $Df: A \rightarrow L(E, F)$ qui à x fait correspondre $Df(x)$, où $L(E, F)$ dénote l'e.v.t. des applications linéaires continues de E dans F , muni de la topologie de la convergence bornée.

REMARQUE 1. Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$ (relativement à Ω) et si le recouvrement \mathcal{S}' de E est plus fin que \mathcal{S} , alors f est aussi \mathcal{S}' -dérivable en x_0 (relativement à Ω).

REMARQUE 2. Soit \mathcal{S} un recouvrement de E borné (c'est-à-dire formé de parties bornées de l'e.v.t. E) et homothétiquement stable (ce qui signifie que $M \in \mathcal{S}$, $0 < r \leq 1$, entraînent qu'il existe $N \in \mathcal{S}$ tel que $rM \subset N$). L'application $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est alors \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$ si et seulement s'il existe $u \in L(E, F)$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

i) Quels que soient $M \in \mathcal{S}$ et le voisinage W de $0 \in F$, il existe $\alpha > 0$ tel que $b \in M$, $0 < |t| < \alpha$ entraînent $x_0 + tb \in A$ et

$$\frac{f(x_0 + tb) - f(x_0)}{t} - u(b) \in W.$$

ii)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} - u(b_n) = 0,$$

quelles que soient la suite (b_n) subordonnée à \mathcal{S} (c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathcal{S}$ tel que (b_n) soit à valeurs dans M) et la suite (t_n) de $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ convergeant vers 0.

L'application linéaire continue u est alors la \mathcal{S} -dérivée de f en x_0 relativement à tout ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$.

I.2. Dérivabilité; b -dérivabilité; c -dérivabilité; quasi-dérivabilité.

On dira que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est *dérivable* (resp. *b -dérivable*, resp. *c -dérivable*, resp. *quasi-dérivable*) en $x_0 \in A$ (chacune de ces propriétés entraînant la suivante en vertu de la remarque 1 de I.1) si f est \mathcal{S} -dérivable en x_0 , où \mathcal{S} est l'ensemble de toutes les parties (resp. des bornés, resp. des compacts, resp. des parties réduites à un point) de E . On dira alors que $Df(x_0)$ est la *dérivée* (resp. la *b -dérivée*, resp. la *c -dérivée*, resp. la *quasi-dérivée*) de f en x_0 . Compte tenu de la remarque 2 de I.1, on observe :

REMARQUE 1. i) $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est quasi-dérivable en $x_0 \in A$ si et seulement si f est directionnellement dérivable en x_0 et si $Df(x_0): E \rightarrow F$ est linéaire et continue.

ii) $f: A \rightarrow F$ est b -dérivable (resp. c -dérivable) en $x_0 \in A$ si et seulement s'il existe $u \in L(E, F)$ vérifiant :

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} - u(b_n) = 0$$

quelles que soient la suite bornée (resp. relativement compacte) (b_n) et la suite (t_n) de \mathbf{R}^* convergeant vers 0.

iii) $f: A \rightarrow F$ est dérivable en $x_0 \in A$ si et seulement s'il existe un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ tel que l'on ait (1), quelles que soient la suite (b_n) à valeurs dans Ω et la suite (t_n) de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers 0.

Les définitions ci-dessus concordent avec la définition usuelle dans le cas où E est normable :

REMARQUE 2. Soit $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, comme ci-dessus, E étant sup-

posé normable, et soit $u \in L(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes en $x_0 \in A$:

- i) u est la dérivée de f en x_0 .
- ii) u est la b -dérivée de f en x_0 .
- iii) Il existe une norme $||$ compatible avec la topologie de E telle que

$$(1) \quad \lim_{\substack{b \rightarrow 0 \\ b \neq 0}} \frac{f(x_0 + b) - f(x_0) - u(b)}{|b|} = 0.$$

iv) On a (1) quelle que soit la norme $||$ compatible avec la topologie de E .

1.3. Applications $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -lipschitziennes.

Etant donné un ensemble de parties \mathcal{S} (resp. \mathcal{T}) de l'e.v.t. E (resp. F), on dira que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -lipschitzienne en $x_0 \in A$ s'il existe un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ de E tel que la suite $(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n})$ soit subordonnée à \mathcal{T} quelles que soient la suite (b_n) subordonnée à $\mathcal{S}|_{\Omega}$ et la suite (t_n) de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers 0. Lorsqu'il y a lieu, on précisera que f est $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -lipschitzienne en x_0 relativement à Ω . En particulier, on dira que f est *lipschitzienne* (resp. *b-lipschitzienne*, resp. *c-lipschitzienne*, resp. *quasi-lipschitzienne*) en $x_0 \in A$ si f est $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -lipschitzienne en x_0 , où \mathcal{S} désigne l'ensemble de toutes les parties de E et \mathcal{T} l'ensemble des bornés de F (resp. \mathcal{S} et \mathcal{T} sont formés des bornés de E et F , resp. des compacts de E et F , resp. \mathcal{S} est formé des parties de E réduites à un point et \mathcal{T} est l'ensemble des bornés de F).

Pour que f soit b -lipschitzienne (resp. c -lipschitzienne) en x_0 il faut et il suffit que la suite $(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n})$ soit bornée (resp. relativement compacte) quelles que soient la suite (b_n) bornée (resp. relativement compacte) et la suite (t_n) de \mathbf{R}^* convergeant vers 0.

Etant donné un ensemble de parties \mathcal{S} (resp. \mathcal{T}) de l'e.v.t. E (resp. F) on dira que l'application linéaire continue $u: E \rightarrow F$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -

admissible s'il existe un ouvert équilibré Ω de E tel que la suite $(u(b_n))$ soit subordonnée à \mathcal{J} quelle que soit la suite (b_n) subordonnée à $\mathcal{S}|_{\Omega}$. S'il y a lieu, on précisera que u est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -admissible relativement à Ω . Lorsque \mathcal{J} est l'ensemble des bornés de F , on dira plus simplement que u est \mathcal{S} -admissible. On dira enfin que l'ensemble de parties \mathcal{S} de l'e.v.t. E est *séquentiellement stable* si, pour toute suite (b_n) subordonnée à \mathcal{S} et pour toute suite (x_n) de E convergeant vers 0 , la suite $(b_n + x_n)$ est subordonnée à \mathcal{S} .

REMARQUE. Soient $f: A \rightarrow F$, $A \subset E$, comme ci-dessus, \mathcal{S} un recouvrement de E et \mathcal{J} un ensemble de parties de F séquentiellement stable. Si f est \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$, alors f est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -lipschitzienne en x_0 si et seulement si $Df(x_0)$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -admissible.

COROLLAIRE 1. Soit \mathcal{S} un recouvrement borné de l'e.v.t. E . Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$, alors f est \mathcal{S} -lipschitzienne en x_0 .

COROLLAIRE 2. Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est c -dérivable (resp. b -dérivable, resp. dérivable, E ou F étant supposé normable dans ce dernier cas), alors f est c -lipschitzienne (resp. b -lipschitzienne, resp. lipschitzienne) en x_0 .

1.4. Applications de classe C^1 .

Etant donné un ensemble de parties \mathcal{S} de l'e.v.t. E , on dira qu'une application $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, définie comme ci-dessus, est \mathcal{S} -continue en $x_0 \in A$ s'il existe un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ tel que l'on ait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + t_n b_n) = f(x_0)$$

quelles que soient la suite (b_n) subordonnée à $\mathcal{S}|_{\Omega}$ et la suite (t_n) de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers 0 . S'il y a lieu, on précisera que f est \mathcal{S} -continue en x_0 relativement à Ω . Dans le cas où \mathcal{S} est l'ensemble de tous les bornés de E , on dira que f est b -continue ou encore de classe C^0 en x_0 . Dans le cas où l'espace E est l.c. (localement convexe) et métrisable, on sait que la b -continuité de $f: A \rightarrow F$ en x_0 équivaut à la continuité en ce point.

On vérifie aisément

REMARQUE. Soient $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, et $g: B \rightarrow G$, où $B \subset F$, comme ci-dessus avec $f(A) \subset B$. Etant donné un ensemble de parties \mathcal{S} de E , supposons que f soit \mathcal{S} -continue en $x_0 \in A$. Pour que $g \circ f: A \rightarrow G$ soit \mathcal{S} -continue en x_0 , il suffit qu'il existe un ensemble de bornés \mathcal{J} de F tel que g soit \mathcal{J} -continue en $f(x_0)$ et que f soit $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -lipschitzienne en x_0 .

Pour que $f: A \rightarrow F$ soit \mathcal{S} -continue en $x_0 \in A$, il suffit que f soit \mathcal{S} -lipschitzienne en x_0 ; compte tenu des corollaires de I.3, il vient:

PROPOSITION 1. Soit \mathcal{S} un recouvrement de l'e.v.t. E . Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$ et si $Df(x_0)$ est \mathcal{S} -admissible, alors f est \mathcal{S} -continue en x_0 .

COROLLAIRE. Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est b -dérivable en $x_0 \in A$, alors f est b -continue en x_0 .

On dira que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est de classe C^1 en $x_0 \in A$ s'il existe un voisinage $V \subset A$ de x_0 tel que $f|_V$ soit b -dérivable et que $Df: V \rightarrow L(E, F)$ soit b -continue en x_0 . On dira que $f: A \rightarrow F$ est de classe C^0 (resp. de classe C^1) si cette propriété a lieu en tout point de A .

PROPOSITION 2. Soit $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, comme ci-dessus, F étant l.c., et soit \mathcal{S} un recouvrement borné de E . Si f est quasi-dérivable dans A et si $Df: A \rightarrow L(E, F)$ est \mathcal{S} -continue en $x_0 \in A$, alors f est \mathcal{S} -dérivable en x_0 .

Il s'agit de vérifier :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(h_n) = 0$$

quelles que soient la suite (h_n) subordonnée à \mathcal{S} et la suite (t_n) de \mathbb{R}^* convergeant vers 0. Pour tout voisinage convexe fermé W de $0 \in F$, il s'agit donc d'indiquer n_0 tel que $n > n_0$ entraîne

$$(1) \quad f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) - Df(x_0)(t_n h_n) \in t_n W.$$

Or il existe par hypothèse n_0 tel que $n > n_0$ et $\tau \in [0, 1]$ entraînent

$$x_0 + \tau t_n b_n \in A \text{ et } (Df(x_0 + \tau t_n b_n) - Df(x_0))(b_n) \in W.$$

En effet, on aurait sinon une suite (τ_n) de $[0, 1]$ et des sous-suites (t_{k_n}) et (b_{k_n}) de (t_n) et (b_n) telles que

$$(Df(x_0 + \tau_n t_{k_n} b_{k_n}) - Df(x_0))(b_{k_n}) \in W$$

quel que soit n . Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n t_{k_n} = 0$, ceci contredirait l'hypothèse de \mathcal{S} -continuité de Df en x_0 . Pour tout $n > n_0$ fixé, on a donc :

$$Df(x_0 + \tau t_n b_n) - Df(x_0)(t_n b_n) \in t_n W, \text{ c'est-à-dire}$$

$$(2) \quad g'_n(\tau) \in t_n W \text{ quel que soit } \tau \in [0, 1],$$

où $g_n : [0, 1] \rightarrow F$ désigne la fonction de la variable réelle, dérivable par hypothèse, et définie comme suit :

$$g_n(\tau) = f(x_0 + \tau t_n b_n) - \tau Df(x_0)(t_n b_n).$$

En vertu du théorème des accroissements finis [7], la relation (2) entraîne alors : $g_n(1) - g_n(0) \in t_n W$, c'est-à-dire (1).

COROLLAIRE. Soit $f : A \rightarrow F$, où $A \subset E$, une application quasi-dérivable, F étant supposé l.c.

i) Pour que f soit b -dérivable en $x_0 \in A$, il suffit que $Df : A \rightarrow L(E, F)$ soit b -continue en x_0 .

ii) Pour que f soit de classe C^1 dans A , il faut et il suffit que Df soit b -continue.

1.5. Transitivité.

PROPOSITION. Soient $f : A \rightarrow F$, où $A \subset E$, et $g : B \rightarrow G$, où $B \subset F$, comme ci-dessus, avec $f(A) \subset B$. Etant donné un recouvrement \mathcal{S} de E , on suppose que f est \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$. Pour que $g \circ f : A \rightarrow G$ soit \mathcal{S} -dérivable en x_0 , il suffit qu'il existe un recouvrement (resp. séquentiellement stable) \mathcal{J} de F tel que f soit $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -lipschitzienne en x_0 (resp. que $Df(x_0)$ soit $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -admissible) et tel que g soit \mathcal{J} -dérivable en $f(x_0)$. On a alors $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$.

Soit Ω un ouvert équilibré de F , relativement auquel g est \mathcal{J} -

dérivable en $f(x_0)$. Soient aussi d'une part V un voisinage de $0 \in F$ et d'autre part Ω_1 un ouvert équilibré de E relativement auquel f est \mathcal{S} -dérivable et (à \mathcal{J})-lipschitzienne en x_0 (on tient compte de la remarque de I.3) tels qu'on ait :

$$(1) \quad Df(x_0)(\Omega_1) + V \subset W.$$

Il s'agit alors de vérifier :

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_0 + t_n b_n)) - g(f(x_0))}{t_n} - Dg(f(x_0))(Df(x_0)(b_n)) = 0$$

quelles que soient la suite (b_n) subordonnée à $\mathcal{S}|_{\Omega_1}$ et la suite (t_n) de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers 0. Or le terme général de la suite (2) est la somme de

$$(3) \quad \frac{g(f(x_0) + t_n (\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n})) - g(f(x_0))}{t_n} - Dg(f(x_0))(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n})$$

et de

$$(4) \quad Dg(f(x_0))(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(b_n)).$$

La suite de terme général (4) converge vers 0 parce que f est \mathcal{S} -dérivable en x_0 , relativement à Ω_1 . On observera d'autre part que (3) converge vers 0 parce que g est \mathcal{J} -dérivable en $f(x_0)$ relativement à Ω et qu'il existe n_0 tel que la suite $(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n})_{n > n_0}$ soit subordonnée à $\mathcal{J}|_{\Omega}$. En effet, il existe n_0 tel que $n > n_0$ entraîne :

$$\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \in Df(x_0)(b_n) + V,$$

d'où $\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \in \Omega$, compte tenu de (1).

Mais $(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n})_{n > n_0}$ est alors subordonnée à $\mathcal{J} \mid \Omega$ du fait que f est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -lipschitzienne relativement à Ω_1 .

COROLLAIRE 1. Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, et $g: B \rightarrow G$, où $f(A) \subset B \subset F$, sont dérivables (resp. b -dérivables, resp. c -dérivables) aux points $x_0 \in A$ et $f(x_0) \in B$, alors $g \circ f: A \rightarrow G$ est dérivable (resp. b -dérivable, resp. c -dérivable) en x_0 .

COROLLAIRE 2. Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, et $g: B \rightarrow G$, où $B \subset F$, supposées b -dérivables respectivement dans A et $B \supset f(A)$, sont de classe C^1 aux points $x_0 \in A$ et $f(x_0) \in B$, alors $g \circ f: A \rightarrow G$ est de classe C^1 en x_0 .

D'après le corollaire précédent, $g \circ f$ est b -dérivable en x_0 , et il s'agit donc de vérifier que

$$D(g \circ f): A \rightarrow L(E, G), \text{ c'est-à-dire } \psi \circ (Df, Dg \circ f)$$

est b -continue en x_0 , où $\psi: L(E, F) \times L(F, G) \rightarrow L(E, G)$ désigne l'application $(u, v) \rightarrow v \circ u$. Puisque ψ est séquentiellement continue, il n'est que d'observer que Df est b -continue en x_0 par hypothèse et que $Dg \circ f$ est b -continue en x_0 en vertu de la remarque de I.4; en effet, Dg est b -continue en $f(x_0)$ par hypothèse et f est b -lipschitzienne en x_0 parce que b -dérivable en ce point.

1.6. Applications multilinéaires.

REMARQUE 1. Soit \mathcal{S} un recouvrement de l'e.v.t. E , soient f et g des applications définies dans l'ouvert A de E à valeurs dans l'e.v.t. F , et soit u une application linéaire continue de F dans l'e.v.t. G . On suppose que f et g sont \mathcal{S} -dérivables en $x_0 \in A$ (relativement à Ω). Alors

i) $f+g: A \rightarrow F$ est \mathcal{S} -dérivable en x_0 (relativement à Ω) et on a: $D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$.

ii) $u \circ f: A \rightarrow G$ est \mathcal{S} -dérivable en x_0 (relativement à Ω) et on a

$$D(u \circ f)(x_0) = u \circ Df(x_0).$$

REMARQUE 2. Soit f une application définie dans l'ouvert A de l'e.v.t.

E et à valeurs dans l'e.v.t. produit $F = \prod_{i \in I} F_i$. Soit \mathcal{S} un recouvrement de E , que l'on suppose borné et homothétiquement stable à moins que I ne soit fini. Pour que f soit \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$, il faut et il suffit que chaque $pr_i \circ f : A \rightarrow F_i$, $i \in I$, soit \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$; on a alors :

$$Df(x_0)(b) = (D(pr_i \circ f)(x_0)(b))_{i \in I} \text{ quel que soit } b \in E.$$

PROPOSITION. Toute application multilinéaire u définie dans l'e.v.t. produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ à valeurs dans l'e.v.t. F , bornée sur les bornés et séparément continue, est de classe C^1 et on a :

$$Du(x)(b) = \sum_{i=1, \dots, p} u(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

quels que soient $x, b \in E$.

On observe d'abord, pour $x \in E$ fixé, que l'application

$$\bar{u}(x) : b \rightarrow \sum_{i=1, \dots, p} u(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

de E dans F est linéaire et continue parce que u est séparément continue. On observe aussi que l'application $x \rightarrow \bar{u}(x)$ de E dans $L(E, F)$ est b -continue du fait que u est bornée sur les bornés. Il suffit donc, $x \in E$ étant fixé, de vérifier que $\bar{u}(x)$ est la b -dérivée de u en x . Quelles que soient la suite bornée (b_n) de E et la suite (t_n) de \mathbb{R}^* convergeant vers 0 , il s'agit de montrer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u(x + t_n b_n) - u(x)}{t_n} - \sum_{i=1, \dots, p} u(x_1, \dots, x_{i-1}, b_{ni}, x_{i+1}, \dots, x_p) \right) = 0,$$

c'est-à-dire, u étant multilinéaire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in P_2(\{1, \dots, p\})} t_n^{k(\sigma)-1} u_\sigma(x; b_n) = 0$$

où $P_2(\{1, \dots, p\})$ désigne l'ensemble des parties de $\{1, \dots, p\}$ ayant $k(\sigma) \geq 2$ éléments et où on a posé

$$(1) u_\sigma(x; y) = u(z_1, \dots, z_p) \text{ avec } z_i = x_i, z_i = y_i \text{ selon que } i \notin \sigma, i \in \sigma.$$

Or (1) résulte de ce que la suite $(u_\sigma(x; b_n))$ est bornée pour chaque $\sigma \in P_2(\{1, \dots, p\})$ et de ce que $k(\sigma) \geq 2$ entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{k(\sigma)-1} = 0$.

COROLLAIRE 1. Soient E, F, G des e.v.t. L'application $(u, v) \rightarrow v \circ u$ de $L(E, F) \times L(F, G)$ dans $L(E, G)$ est de classe C^1 .

COROLLAIRE 2. Soit $u: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application multilinéaire d'e.v.t., séparément continue et bornée sur les bornés. Soit $f_i, i=1, \dots, p$, une application définie dans l'ouvert A d'un e.v.t. E à valeurs dans E_i . Etant donné un recouvrement \mathcal{S} de E , on suppose, pour chaque $i=1, \dots, p$, que $f_i: A \rightarrow E_i$ est \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$ et que $Df_i(x_0)$ est \mathcal{S} -admissible. Alors $u \circ (f_1, \dots, f_p): A \rightarrow F$ est \mathcal{S} -dérivable en x_0 et on a :

$$D(u \circ (f_1, \dots, f_p))(x_0)(h) = \sum_{i=1, \dots, p} u(f_1(x_0), \dots, f_{i-1}(x_0), Df_i(x_0)(h), f_{i+1}(x_0), \dots, f_p(x_0)),$$

quel que soit $h \in E$.

Ceci résulte de la proposition précédente et de celle de I.5 compte tenu de la remarque 2.

1.7. Algèbres semi-topologiques.

Dans ce qui suit, on appellera *algèbre semi-topologique* toute algèbre associative réelle E , munie d'un élément unité 1 , d'une topologie séparée compatible avec la structure d'espace vectoriel sous-jacente et vérifiant les conditions suivantes quant à la structure multiplicative:

i) L'application bilinéaire $(x, y) \rightarrow xy$ de $E \times E$ dans E est séparément continue et bornée sur les bornés.

ii) Quelle que soit la suite (x_n) de E formée d'éléments inversibles et convergeant vers 1 , la suite (x_n^{-1}) est bornée.

Il résulte de (i) que (x_n^{-1}) est bornée quelle que soit la suite (x_n) de E formée d'éléments inversibles.

PROPOSITION. Soit f une application définie dans l'ouvert A de l'e.v.t. E à valeurs dans le sous-espace des éléments inversibles d'une algèbre semi-topologique F . Etant donné un recouvrement \mathcal{S} de E , on suppose que $f: A \rightarrow F$ est \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$ et que $Df(x_0)$ est \mathcal{S} -admissible. Alors l'application $f^{-1}: A \rightarrow F$ qui à x fait correspondre $f(x)^{-1}$ est \mathcal{S} -dérivable en x_0 et on a: $Df^{-1}(x_0)(h) = -f(x_0)^{-1}(Df(x_0)(h))f(x_0)^{-1}$.

Soit Ω un ouvert équilibré de E relativement auquel f est \mathcal{S} -dérivable en x_0 et $Df(x_0)$, \mathcal{S} -admissible. Puisque l'application

$$b \rightarrow -f(x_0)^{-1}(Df(x_0)(b))f(x_0)^{-1}$$

est linéaire et continue, il s'agit de vérifier: (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_n b_n)^{-1} - f(x_0)^{-1}}{t_n} + f(x_0)^{-1}(Df(x_0)(b_n))f(x_0)^{-1} = 0,$$

quelles que soient la suite (b_n) subordonnée à $\mathcal{S}|_{\Omega}$ et la suite (t_n) de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers 0. Or le terme général de (1) égale :

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{f(x_0 + t_n b_n)^{-1} - f(x_0)^{-1}}{t_n} + f(x_0)^{-1} \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \right) f(x_0)^{-1} \\ & - f(x_0)^{-1} \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(b_n) \right) f(x_0)^{-1} = \\ & t_n f(x_0 + t_n b_n)^{-1} \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \right) f(x_0)^{-1} \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \right) f(x_0)^{-1} \\ & - f(x_0)^{-1} \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(b_n) \right) f(x_0)^{-1}. \end{aligned}$$

On a d'une part :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0)^{-1} \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(b_n) \right) f(x_0)^{-1} = 0$$

en conséquence de la \mathcal{S} -dérivabilité de f en x_0 . D'autre part, on observera que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n z_n = 0$, où

$$z_n = f(x_0 + t_n b_n)^{-1} \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \right) f(x_0)^{-1} \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \right) f(x_0)^{-1},$$

du fait que la suite (z_n) est bornée. En effet, $\left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \right)$ est

bornée, puisque $(Df(x_0)(b_n))$ est bornée; ceci entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + t_n b_n) = f(x_0)$$

et par conséquent que la suite $(f(x_0 + t_n b_n))^{\leftarrow 1}$ est bornée aussi.

On dira qu'un e.v.t. E est un *b-espace* si, pour toute suite (u_n) d'homéomorphismes linéaires de E sur lui-même convergeant vers 1_E , la suite (u_n^{-1}) est bornée dans $L(E)$. On observe alors que l'e.v.t. $L(E)$ muni de la multiplication $(u, v) \rightarrow v \circ u$ est une algèbre semi-topologique et la proposition précédente entraîne :

COROLLAIRE. Soient E, F, G des e.v.t. et f une application définie dans l'ouvert A de E à valeurs dans le sous-espace $Is(F, G)$ de $L(F, G)$ formé des homéomorphismes linéaires. Etant donné un recouvrement \mathcal{S} de E on suppose que $f: A \rightarrow L(F, G)$ est \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$ et que $Df(x_0)$ est \mathcal{S} -admissible. Alors l'application $x \rightarrow f(x)^{-1}$ de A dans $L(G, F)$ est \mathcal{S} -dérivable en x_0 et on a :

$$D(x \rightarrow f(x)^{-1})(x_0)(b) = -f(x_0)^{-1} \circ (Df(x_0)(b)) \circ f(x_0)^{-1}$$

quel que soit $b \in E$.

1.8. Dérivées partielles.

Soit f définie dans l'ouvert A de l'e.v.t. produit $E_1 \times \dots \times E_p$ à valeurs dans l'e.v.t. F . Pour $i \in \{1, \dots, p\}$ fixé, étant donné un recouvrement \mathcal{S} de E_i , on dira que f est *partiellement \mathcal{S} -dérivable* (s'il y a lieu, on précisera : par rapport au $i^{\text{ème}}$ argument) en $x_0 \in A$ si l'application

$$x_i \rightarrow f(x_{01}, \dots, x_{0(i-1)}, x_i, x_{0(i+1)}, \dots, x_{0p})$$

définie dans un voisinage ouvert de $x_{0i} \in E_i$, à valeurs dans F , admet au point x_{0i} une \mathcal{S} -dérivée au sens de (I.1), qu'on désignera alors par $D_i f(x_0)$ et qu'on appellera la *\mathcal{S} -dérivée partielle de f en x_0* (par rapport au $i^{\text{ème}}$ argument).

REMARQUE. Soit $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_p$, comme ci-dessus et, pour $i = 1, \dots, p$, soit \mathcal{S}_i un recouvrement de E_i . Si f est $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_p$ -dérivable en $x_0 \in A$, alors chaque \mathcal{S}_i -dérivée partielle $D_i f(x_0)$, $i = 1, \dots, p$, est

définie et on a :

$$Df(x_0)(b) = \sum_{i=1, \dots, p} D_i f(x_0)(b_i) \text{ quel que soit } b \in E_1 \times \dots \times E_p.$$

On dira que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_p$, est *partiellement dérivable* (resp. *b-dérivable*, resp. *c-dérivable*, resp. *quasi-dérivable*) en $x_0 \in A$ par rapport au $i^{\text{ème}}$ argument si f est partiellement \mathcal{D} -dérivable en x_0 , où \mathcal{D} désigne l'ensemble de toutes les parties (resp. des bornés, resp. des compacts, resp. des parties réduites à un point) de E_i . On dira alors que $D_i f(x_0)$ est la dérivée (resp. la *b-dérivée*, resp. la *c-dérivée*, resp. la *quasi-dérivée*) partielle de f en x_0 par rapport au $i^{\text{ème}}$ argument.

Il résulte de la remarque ci-dessus que la dérivabilité (resp. la *b-dérivabilité*, resp. la *c-dérivabilité*, resp. la *quasi-dérivabilité*) de $f: A \rightarrow F$ en $x_0 \in A$ entraîne la dérivabilité (resp. la *b-dérivabilité*, resp. la *c-dérivabilité*, resp. la *quasi-dérivabilité*) partielle de f en x_0 par rapport à chaque argument.

Dans ce qui suit, pour $i = 1, \dots, p$, on désigne par \mathcal{B}_i l'ensemble des bornés du sous-espace de l'e.v.t. produit $E_1 \times \dots \times E_p$ image de $E_1 \times \dots \times E_i$ par l'injection naturelle $E_1 \times \dots \times E_i \rightarrow E_1 \times \dots \times E_p$.

PROPOSITION. Soit $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_p$, comme ci-dessus, F étant supposé l.c. Pour que f soit *b-dérivable* en $x_0 \in A$, il suffit que f soit *b-dérivable* en x_0 par rapport au 1^{er} argument et que, pour chaque $i = 2, \dots, p$, la *quasi-dérivée partielle* $D_i f: A \rightarrow L(E_i, F)$ soit définie dans A et \mathcal{B}_i -continue en x_0 .

On vérifie que l'application linéaire continue

$$b \rightarrow \sum_{i=1, \dots, p} D_i f(x_0)(b_i) \text{ de } E_1 \times \dots \times E_p \text{ dans } F$$

est la *b-dérivée* de f en x_0 . Pour toute suite bornée (h_n) de $E_1 \times \dots \times E_p$ et toute suite (t_n) de \mathbf{R}^* convergeant vers 0, il s'agit de montrer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - \sum_{i=1, \dots, p} D_i f(x_0)(b_{ni}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_n(b_{n1}, \dots, b_{ni}, 0, \dots, 0)) - f(x_0 + t_n(b_{n1}, \dots, b_{n(i-1)}, 0, \dots, 0))}{t_n}$$

$$- D_i f(x_0)(b_{ni}) = 0$$

quel que soit $i = 1, \dots, p$ fixé. Pour $i = 1$, ceci équivaut à la b -dérivabilité partielle de f en x_0 par rapport au 1^{er} argument. Soit $i > 1$ fixé. Pour tout voisinage convexe fermé W de $0 \in F$, il s'agit maintenant d'indiquer n_0 tel que $n > n_0$ entraîne :

$$(1) \quad f(x_0 + t_n(b_{n1}, \dots, b_{ni}, 0, \dots, 0)) - f(x_0 + t_n(b_{n1}, \dots, b_{n(i-1)}, 0, \dots, 0)) - D_i f(x_0)(t_n b_{ni}) \in t_n W.$$

Or la quasi-dérivée $D_i f$ étant \mathfrak{B}_i -continue en x_0 , on observe, en raisonnant comme dans la proposition 2 du I.4, qu'il existe n_0 tel que $n > n_0, \tau \in [0, 1]$ entraînent

$$x_0 + t_n(b_{n1}, \dots, b_{n(i-1)}, 0, \dots, 0) + \tau t_n \overset{v}{b}_{ni} \in A$$

(où $b_i \rightarrow \overset{v}{b}_i$ est l'injection naturelle de E_i dans $E_1 \times \dots \times E_p$) et

$$(D_i f(x_0 + t_n(b_{n1}, \dots, b_{n(i-1)}, 0, \dots, 0)) + \tau t_n \overset{v}{b}_{ni} - D_i f(x_0 + t_n(b_{n1}, \dots, b_{n(i-1)}, 0, \dots, 0)))(t_n b_n) \in t_n W.$$

C'est dire que, pour $n > n_0$ fixé, on a $g'_{ni}(\tau) \in t_n W$ quel que soit $\tau \in [0, 1]$, où $g_{ni}: [0, 1] \rightarrow F$ est la fonction dérivable définie par

$$g_{ni}(\tau) = f(x_0 + t_n(b_{n1}, \dots, b_{n(i-1)}, 0, \dots, 0) + \tau t_n \overset{v}{b}_{ni}) - \tau D_i f(x_0)(t_n \overset{v}{b}_{ni}).$$

Le théorème des accroissements finis entraîne alors $g_{ni}(1) - g_{ni}(0) \in t_n W$, c'est-à-dire (1).

COROLLAIRE. Pour que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_p$, soit de classe C^1 , il faut et il suffit que f soit quasi-dérivable partiellement dans A par rapport à chaque argument et que chaque $D_i f: A \rightarrow L(E_i, F), i = 1, \dots, p$, soit b -continue.

II DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR

II.1. Les espaces $L(E_1, \dots, E_n; F)$.

Etant donnés des e.v.t. E_1, \dots, E_n et F , la bijection canonique évidente

$$\mathcal{F}(E_1, \underbrace{\mathcal{F}(E_2, \dots, \mathcal{F}(E_n, F))}_{n}) \rightarrow \mathcal{F}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$$

entre ensembles d'applications induit un homéomorphisme linéaire de l'e.v.t. $L(E_1, L(E_2, \dots, L(E_n, F)))$ (muni de la topologie définie par récurrence sur n au moyen de la convergence bornée) sur un sous-espace $L(E_1, \dots, E_n; F)$ de l'e.v.t. $L_b(E_1, \dots, E_n; F)$ formé des applications multilinéaires de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F bornées sur les bornés. Si $0 < p < n$, on a un homéomorphisme linéaire

$$L(E_1, \dots, E_p; L(E_{p+1}, \dots, E_n; F)) \rightarrow L(E_1, \dots, E_n; F)$$

qui à u fait correspondre \bar{u} défini par :

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Lorsque les E_i sont tous égaux à un e.v.t. E , on écrira $L_n(E; F)$ (resp. $L_{nb}(E; F)$) au lieu de $L(E_1, \dots, E_n; F)$ (resp. $L_b(E_1, \dots, E_n; F)$). On observe que le sous-espace vectoriel $L_b(E_1, \dots, E_n; F)$ (resp. $L_{nb}(E; F)$) de $L_b(E_1, \dots, E_n; F)$ (resp. de $L_{nb}(E, F)$) formé des applications multilinéaires hypocontinues est un sous-espace de l'espace $L(E_1, \dots, E_n; F)$ (resp. $L_n(E; F)$). On observe d'ailleurs que toute u de $L(E_1, \dots, E_n; F)$ est séparément continue et hypocontinue par rapport au premier argument. En outre :

REMARQUE. Soit $k \in \{2, \dots, n\}$ tel que l'e.v.t. E_k soit métrisable ou de Baire. Alors toute $u \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ est hypocontinue par rapport au $k^{\text{ième}}$ argument. Compte tenu de l'identification canonique

$$L(E_1, \dots, E_n; F) \sim L(E_1, \dots, E_{k-1}; L(E_k, L(E_{k+1}, \dots, E_n; F))),$$

cette propriété résulte du lemme suivant d'Analyse Fonctionnelle.

LEMME. Soient E, F des e.v.t., E étant supposé métrisable (resp. de Baire). Pour qu'une partie $H \subset L(E, F)$ soit équicontinue, il faut et il

suffit que H soit bornée dans $L_c(E, F)$ (resp. que H soit simplement bornée).

II.2. \mathcal{S} -dérivées d'ordre supérieur.

Soit f une application définie dans l'ouvert A de l'e.v.t. produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ à valeurs dans l'e.v.t. F . Soit (i_1, \dots, i_p) une suite finie de $\{1, \dots, n\}$ et, pour $k=1, \dots, p$, soit \mathcal{S}_k un recouvrement de E_k . On définit par récurrence sur p l'existence et la valeur de la $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p)$ -dérivée partielle $D_{i_1 \dots i_p} f(x_0) \in L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F)$ (s'il y a lieu, on précisera par rapport à l'argument de multi-indice (i_1, \dots, i_p)). Cette notion étant déjà définie (I.8) pour $p=1$, on suppose que tel est le cas jusqu'à l'ordre $p-1 > 0$; on dira alors que $f: A \rightarrow F$ est *partiellement* $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p)$ -dérivable en $x_0 \in A$ s'il existe un voisinage ouvert $V \subset A$ de x_0 tel que la $(\mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_p)$ -dérivée partielle $D_{i_2 \dots i_p} f(x) \in L(E_{i_2}, \dots, E_{i_p}; F)$ soit définie quel que soit $x \in V$ et que l'application

$$D_{i_2 \dots i_p} : V \rightarrow L(E_{i_2}, \dots, E_{i_p}; F)$$

ainsi obtenue soit \mathcal{S}_1 -dérivable en x_0 . On appellera alors $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p)$ -dérivée partielle de f en x_0 (par rapport à l'argument de multi-indice (i_1, \dots, i_p)) et on désignera par $D_{i_1 \dots i_p} f(x_0)$ l'image de la \mathcal{S}_1 -dérivée partielle $D_{i_1}(D_{i_2 \dots i_p} f)(x_0)$ par l'homéomorphisme linéaire naturel

$$L(E_{i_1}, L(E_{i_2}, \dots, E_{i_p}; F)) \sim L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F);$$

c'est-à-dire :

$$D_{i_1 \dots i_p} f(x_0)(b_1, \dots, b_p) = (D_{i_1}(D_{i_2 \dots i_p} f)(x_0)(b_1))(b_2, \dots, b_p)$$

quel que soit $(b_1, \dots, b_p) \in E_{i_1} \times \dots \times E_{i_p}$.

Si \mathcal{S}_k , $k=1, \dots, p$, est l'ensemble de toutes les parties (resp. des parties bornées, resp. des parties compactes, resp. des parties réduites à un point) de E_{i_k} , on dira que f est partiellement dérivable (resp. b -dérivable, resp. c -dérivable, resp. quasi-dérivable) en x_0 par rapport à l'argument de multi-indice (i_1, \dots, i_p) et on dira que $D_{i_1 \dots i_p} f(x_0)$ est la dérivée (resp. b -dérivée, resp. c -dérivée, resp. quasi-dérivée) partielle de f en x_0 par rapport à cet argument. Lorsque $n=1$ et que \mathcal{S} désigne

un recouvrement de E , on obtient ainsi en particulier la définition de la \mathcal{S} -dérivabilité d'ordre p de $f: A \rightarrow F$ en x_0 et de ce que l'on appellera la \mathcal{S} -dérivée $D^p f(x_0) \in L_p(E; F)$ d'ordre p de f en x_0 .

Il résulte de la définition générale ci-dessus que f est p fois \mathcal{S} -dérivable en x_0 s'il existe un voisinage ouvert $V \subset A$ de x_0 tel que la \mathcal{S} -dérivée $D^{p-1} f(x) \in L_{p-1}(E; F)$ d'ordre $p-1$ soit définie en tout $x \in V$ et que l'application $D^{p-1} f: V \rightarrow L_{p-1}(E; F)$ soit \mathcal{S} -dérivable en x_0 . La \mathcal{S} -dérivée $D^p f(x_0)$ d'ordre p de f en x_0 est alors l'image de la \mathcal{S} -dérivée $D(D^{p-1} f)(x_0)$ par l'homéomorphisme linéaire canonique

$$L(E, L_{p-1}(E; F)) \sim L_p(E; F).$$

En particulier on dira que $f: A \rightarrow F$ est p fois dérivable (resp. b -dérivable, resp. c -dérivable, resp. quasi-dérivable) en $x_0 \in A$ si f est p fois \mathcal{S} -dérivable en ce point, \mathcal{S} étant l'ensemble de toutes les parties (resp. des parties bornées, resp. compactes, resp. réduites à un point) de E ; on dira alors que $D^p f(x_0)$ est la dérivée (resp. b -dérivée, resp. c -dérivée, resp. quasi-dérivée) d'ordre p de f en x_0 . Conformément à I.4, on dira que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est de classe C^p en $x_0 \in A$ s'il existe un voisinage ouvert $V \subset A$ de x_0 tel que f soit p fois dérivable en tout $x \in V$ et que $D^p f: V \rightarrow L_p(E; F)$ soit b -continue en x_0 . On dira que f est de classe C^p si cette propriété a lieu en tout $x \in A$, ce qui revient à dire que f est p fois b -dérivable dans A et que $D^p f: A \rightarrow L_p(E; F)$ est b -continue. On dira enfin que f est de classe C^∞ si f est de classe C^p quel que soit $p > 0$.

II.3. Linéarité; dérivées d'ordre supérieur d'applications multilinéaires.

REMARQUE 1. Soient f et g des applications définies dans l'ouvert A de l'e.v.t. produit $E_1 \times \dots \times E_n$ à valeurs dans l'e.v.t. F , et soient $u: F \rightarrow G$ et $v_i: E'_i \rightarrow E_i$, $i = 1, \dots, n$, des applications linéaires continues d'e.v.t. . Etant donné une suite finie (i_1, \dots, i_p) de $\{1, \dots, n\}$ et, pour $k = 1, \dots, p$, un recouvrement \mathcal{S}_k de E_{i_k} , on suppose que f et g sont $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p)$ -dérivables en $x_0 \in A$. Alors

i) $f + g: A \rightarrow F$ est $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p)$ -dérivable en x_0 et on a

$$D_{i_1 \dots i_p} (f+g)(x_0) = D_{i_1 \dots i_p} f(x_0) + D_{i_1 \dots i_p} g(x_0).$$

ii) $u \circ f: A \rightarrow G$ est $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p)$ -dérivable en x_0 et on a

$$D_{i_1 \dots i_p} (u \circ f)(x_0) = u \circ D_{i_1 \dots i_p} f(x_0);$$

iii) $f \circ (v_1, \dots, v_n): (v_1, \dots, v_n)^{-1}(A) \rightarrow F$ est $(v_{i_1}^{-1}(\mathcal{S}_1), \dots, v_{i_p}^{-1}(\mathcal{S}_p))$ -dérivable en tout $x'_0 \in (v_1, \dots, v_n)^{-1}(x_0)$ et on a

$$D_{i_1 \dots i_p} (f \circ (v_1, \dots, v_n))(x'_0) = D_{i_1 \dots i_p} f(x_0) \circ (v_{i_1}, \dots, v_{i_p}).$$

REMARQUE 2. Soit $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_n$, comme ci-dessus, soit (i_1, \dots, i_{p+q}) , $p > 0$, $q > 0$, une suite finie de $\{1, \dots, n\}$ et soit \mathcal{S}_k , $k = 1, \dots, p+q$, un recouvrement de E_{i_k} . Pour que f soit $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{p+q})$ -dérivable en $x_0 \in A$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert $V \subset A$ de x_0 tel que f soit $(\mathcal{S}_{p+1}, \dots, \mathcal{S}_{p+q})$ -dérivable en tout $x \in V$ et que

$$D_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} f: V \rightarrow L(E_{i_{p+1}}, \dots, E_{i_{p+q}}; F)$$

soit $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p)$ -dérivable en x_0 . Alors

i) les applications multilinéaires $D_{i_1 \dots i_p} (D_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} f)(x_0)$ et $D_{i_1 \dots i_{p+q}} f(x_0)$ se correspondent par l'homéomorphisme linéaire canonique

$$L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; L(E_{i_{p+1}}, \dots, E_{i_{p+q}}; F)) \sim L(E_{i_1}, \dots, E_{i_{p+q}}; F).$$

ii) Quel que soit $(b_1, \dots, b_{p+q}) \in E_{i_1} \times \dots \times E_{i_{p+q}}$, l'application

$$x \rightarrow D_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} f(x)(b_{p+1}, \dots, b_{p+q})$$

est $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p)$ -dérivable en x_0 et on a

$$D_{i_1 \dots i_p} (x \rightarrow D_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} f(x)(b_{p+1}, \dots, b_{p+q}))(x_0)(b_1, \dots, b_p) = D_{i_1 \dots i_{p+q}} f(x_0)(b_1, \dots, b_{p+q}).$$

PROPOSITION. Toute application multilinéaire hypocontinue

$$u: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$$

d'e.v.t. est de classe C^∞ et $p > n$ entraîne $D^p u = 0$.

Il s'agit de démontrer d'abord que u est p fois b -dérivable quel que soit l'entier p . Ceci est déjà établi d'après I.6 pour $p=1$. Suppo-

sons -le vérifié à l'ordre $p - 1 \geq 1$ et démontrons-le à l'ordre p . D'après I.6 u est b -dérivable et on a :

$$(1) \quad Du = \sum_{i=1, \dots, n} \widetilde{pr}_i \circ u_i \circ pr_i,$$

où u_i désigne l'application de $\prod_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} E_j$ dans $L(E_i, F)$ qui fait correspondre, à $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $x_i \rightarrow u(x_1, \dots, x_n)$, où pr_i désigne la projection naturelle de $E_1 \times \dots \times E_n$ sur $\prod_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} E_j$ et où \widetilde{pr}_i désigne l'application linéaire continue $v \rightarrow v \circ pr_i$ de $L(\prod_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} E_j, F)$ dans $L(E_1 \times \dots \times E_n, F)$. On observe que chaque u_i est $n-1$ -linéaire et hypocontinue, donc, en vertu de l'hypothèse de récurrence, $p-1$ fois b -dérivable. Il résulte alors de (1), compte tenu de la remarque 1, que la b -dérivée Du est $p-1$ fois b -dérivable; donc, d'après la remarque 2, u est p fois b -dérivable. D'autre part $p > n$, c'est-à-dire $p - 1 > n - 1$, entraîne en vertu de la récurrence $D^{p-1} u_i = 0$ quel que soit $i = 1, \dots, n$, d'où $D^{p-1}(Du) = 0$, c'est-à-dire $D^p u = 0$, compte tenu de (1) et de la remarque 1.

COROLLAIRE. Soient E, F, G des e.v.t., F étant supposé métrisable ou de Baire. L'application $\psi : (u, v) \rightarrow v \circ u$ de $L(E, F) \times L(F, G)$ dans $L(E, G)$ est de classe C^∞ et on a $D^3 \psi = 0$.

En effet, l'application bilinéaire ψ est hypocontinue en conséquence du lemme de II.1.

II.4. Dérivées et dérivées partielles.

Dans la remarque suivante, on généralise par récurrence sur p les énoncés correspondants de I.8.

REMARQUE. Soit $f : A \rightarrow F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_n$, comme ci-dessus et, pour $i = 1, \dots, n$, soit \mathcal{S}_i un recouvrement de E_i . Si f est p fois $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n$ -dérivable en $x_0 \in A$, alors, pour toute suite (i_1, \dots, i_p) de p éléments de $\{1, \dots, n\}$, f est $(\mathcal{S}_{i_1}, \dots, \mathcal{S}_{i_p})$ -dérivable en x_0 et on a

$$D^p f(x_0)(b_1, \dots, b_p) = \sum_{\substack{1 \leq i_k \leq n \\ k=1, \dots, p}} D_{i_1 \dots i_p} f(x_0)(b_{1i_1}, \dots, b_{pi_p}),$$

quels que soient $b_k \in E_{i_k} \times \dots \times E_n$, $k = 1, \dots, p$.

PROPOSITION. Pour que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_n$, définie comme ci-dessus, F étant supposé l.c., soit de classe C^p , il faut et il suffit que, pour toute suite (i_1, \dots, i_p) de p éléments de $\{1, \dots, n\}$, la quasi-dérivée $D_{i_1 \dots i_p} f: A \rightarrow L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F)$ soit définie et b -continue.

La condition étant nécessaire d'après la remarque précédente, vérifions qu'elle est suffisante. Or ceci étant déjà établi pour $p=1$ d'après le corollaire de I.8, supposons-le vérifié à l'ordre $p-1 > 0$ et démontrons-le à l'ordre p . Quel que soit $i=1, \dots, n$ fixé, la quasi-dérivée $D_i f: A \rightarrow L(E_i, F)$ admet, pour toute suite (i_1, \dots, i_{p-1}) de $p-1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$, une quasi-dérivée b -continue

$$D_{i_1 \dots i_{p-1}} (D_i f): A \rightarrow L(E_{i_1}, \dots, E_{i_{p-1}}; L(E_i, F));$$

ceci résulte des hypothèses, compte tenu de la remarque 2 de II.3 et de l'homéomorphisme linéaire naturel

$$L(E_{i_1}, \dots, E_{i_{p-1}}; L(E_i, F)) \sim L(E_{i_1}, \dots, E_{i_{p-1}}, E_i; F).$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors que chaque quasi-dérivée $D_i f$, $i=1, \dots, n$, est de classe C^{p-1} . Il résulte du corollaire de I.8 que f est b -dérivable et, compte tenu de la remarque 2 de II.3, il reste à observer que Df est de classe C^{p-1} . Or ceci résulte de ce que les $D_i f$, $i=1, \dots, n$, sont de classe C^{p-1} , compte tenu de la remarque 1 de II.3 et de ce que $Df = \sum_{i=1, \dots, n} \bar{p}r_i \circ D_i f$, où $\bar{p}r_i: L(E_i, F) \rightarrow L(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ est l'application linéaire continue $u \rightarrow u \circ \bar{p}r_i$.

II.5. Hypocontinuité et symétrie.

PROPOSITION 1. Soit $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_n$, définie comme ci-dessus, une application partiellement quasi-dérivable en $x_0 \in A$, par rapport à l'argument de multi-indice (i_1, \dots, i_p) . Soit $k \in \{2, \dots, p\}$ tel que E_{i_k} soit métrisable ou de Baire. Alors l'application p -linéaire

$$D_{i_1 \dots i_p} f(x_0): E_{i_1} \times \dots \times E_{i_p} \rightarrow F$$

est hypocontinue par rapport au $k^{\text{ième}}$ argument.

Ceci résulte de la remarque II.1, compte tenu de ce que chaque

$$D_{i_1 \dots i_p} f(x_0) \in L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F).$$

Dans ce qui suit, on dira que $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est *s-dérivable* en $x_0 \in A$ si f est \mathcal{S} -dérivable en ce point, \mathcal{S} étant l'ensemble des segments compacts

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}, \quad x \in E, \quad y \in E,$$

de E . On dira qu'un recouvrement de l'e.v.t. E est *segmentiel* s'il est moins fin que celui formé des segments compacts. Etant donnés $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, $x_0 \in A$ et $b, k \in A - x_0$ tels que $b+k \in A - x_0$, on pose

$$\Delta^2 f(x_0)(b, k) = f(x_0 + b + k) - f(x_0 + b) - f(x_0 + k) + f(x_0).$$

On peut alors énoncer :

LEMME. Soit $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, une application quasi-dérivable, F étant supposé l.c. Si $Df: A \rightarrow L(E, F)$ est s-dérivable en $x_0 \in A$, alors

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{\Delta^2 f(x_0)(tb, tk)}{t^2} = D^2 f(x_0)(b, k),$$

quels que soient $b, k \in E$.

Pour tout voisinage convexe fermé symétrique W de $0 \in F$ et toute suite (t_n) de \mathbb{R}^* convergeant vers 0, il s'agit d'indiquer n_0 tel que $n > n_0$ entraîne :

$$(1) \quad \Delta^2 f(x_0)(t_n b, t_n k) - D^2 f(x_0)(t_n b, t_n k) \in t_n^2 W.$$

Or il existe n_0 tel que $n > n_0, \tau \in [0, 1]$ entraînent

$$t_n(b + \tau k) \in A - x_0, \quad t_n \tau k \in A - x_0 \quad \text{et}$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{Df(x_0 + t_n \tau k) - Df(x_0)}{t_n} - D(Df)(x_0)(\tau k) \right)(k) \in \frac{1}{2} W, \\ \left(\frac{Df(x_0 + t_n(b + \tau k)) - Df(x_0)}{t_n} - D(Df)(x_0)(b + \tau k) \right)(k) \in \frac{1}{2} W. \end{array} \right.$$

En effet, il existerait sinon une suite (τ_n) de $[0, 1]$ et une sous-suite (t_{k_n}) de (t_n) telles que l'on ait

$$\left(\frac{Df(x_0 + t_n k(b + \tau_n k)) - Df(x_0)}{t_n k} - D(Df)(x_0)(b + \tau_n k)(k) \right) \notin \frac{1}{2} W,$$

pour tout n et ceci contredirait l'hypothèse de s -dérivabilité de Df en x_0 , puisque $(b + \tau_n k)$ est une suite de points du segment $[b, b+k]$.

Les relations (2) entraînent alors :

$$(3) \quad Df(x_0 + t_n(b + \tau k))(t_n k) - Df(x_0 + t_n \tau k)(t_n k) - D^2 f(x_0)(t_n b, t_n k) \in t_n^2 W,$$

quels que soient $n > n_0$ et $\tau \in [0, 1]$. Pour tout $n > n_0$ fixé, la fonction de la variable réelle $g_n : [0, 1] \rightarrow F$ définie par

$$g_n(\tau) = f(x_0 + t_n(b + \tau k)) - f(x_0 + t_n \tau k) - \tau D^2 f(x_0)(t_n b, t_n k)$$

est dérivable et on a :

$$g'_n(\tau) = Df(x_0 + t_n(b + \tau k))(t_n k) - Df(x_0 + t_n \tau k)(t_n k) - D^2 f(x_0)(t_n b, t_n k),$$

c'est-à-dire, compte tenu de (3) :

$$g'_n(\tau) \in t_n^2 W \text{ quel que soit } \tau \in [0, 1].$$

Le théorème des accroissements finis entraîne alors $g_n(1) - g_n(0) \in t_n^2 W$, c'est-à-dire (1) pour $n > n_0$.

PROPOSITION 2. Soit $f : A \rightarrow F$, où $A \subset E$, définie comme ci-dessus, F étant supposé l.c. Si f est p fois s -dérivable en $x_0 \in A$, alors l'application p -linéaire $D^p f(x_0) : E^p \rightarrow F$ est symétrique.

L'énoncé étant établi pour $p=2$ en conséquence du lemme précédent, on suppose $p > 2$. Il suffit de démontrer :

$$D^p f(x_0)(b_1, \dots, b_p) = D^p f(x_0)(b_1, \dots, b_{r-1}, b_{r+1}, b_r, b_{r+2}, \dots, b_p)$$

quels que soient $(b_1, \dots, b_p) \in E$ et $r = 1, \dots, p-1$. Tout d'abord, dans le cas particulier où $r=1$, compte tenu de la remarque 2 de II.3 et de ce que l'énoncé est établi pour $p=2$, il vient :

$$\begin{aligned} D^p f(x_0)(b_1, \dots, b_p) &= D^2(x \rightarrow D^{p-2} f(x)(b_3, \dots, b_p))(x_0)(b_1, b_2) \\ &= D^2(x \rightarrow D^{p-2} f(x)(b_3, \dots, b_p))(x_0)(b_2, b_1) \end{aligned}$$

$$= D^p f(x_0)(b_2, b_1, b_3, \dots, b_p).$$

Dans le cas général, où $1 < r < p$, on obtient, compte tenu de ce qui précède :

$$\begin{aligned} D^p f(x_0)(b_1, \dots, b_p) &= D^{r-1} (x \rightarrow D^{p-r+1} f(x)(b_r, \dots, b_p))(x_0)(b_1, \dots, b_{r-1}) \\ &= D^{r-1} (x \rightarrow D^{p-r+1} f(x)(b_{r+1}, b_r, b_{r+2}, \dots, b_p))(x_0)(b_1, \dots, b_{r-1}) \\ &= D^p f(x_0)(b_1, \dots, b_{r-1}, b_{r+1}, b_r, b_{r+2}, \dots, b_p). \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. Soit $f : A \rightarrow F$ où $A \subset E$ une application p fois s -dérivable en $x_0 \in A$. Si F est l.c., alors $D^p f(x_0) : E^p \rightarrow F$ est hypocontinue.

Ceci résulte de ce que l'application p -linéaire symétrique $D^p f(x_0)$ est hypocontinue par rapport au 1^{er} argument.

Compte tenu de la remarque de II.4, on peut énoncer aussi :

COROLLAIRE 2. Soit $f : A \rightarrow F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_n$ et où F est l.c., une application p fois s -dérivable en $x_0 \in A$. Pour toute suite (i_1, \dots, i_p) de p éléments de $\{1, \dots, n\}$, l'application p -linéaire

$$D_{i_1 \dots i_p} f(x_0) : E_{i_1} \times \dots \times E_{i_p} \rightarrow F$$

est hypocontinue et on a :

$$D_{i_1 \dots i_p} f(x_0)(b_1, \dots, b_p) = D_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} f(x_0)(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(p)})$$

quels que soient $(b_1, \dots, b_p) \in E_{i_1} \times \dots \times E_{i_p}$ et la permutation σ de $\{1, \dots, p\}$.

II.6. Transitivité.

Etant donnés des e.v.t. E_1, \dots, E_p, F et un ensemble de parties \mathcal{S} de E_1 , on généralise une définition de I.3 en disant que u est \mathcal{S} -admissible, où $u \in L(E_1, \dots, E_p; F)$ si l'image \bar{u} de u par l'homéomorphisme linéaire canonique $L(E_1, \dots, E_p; F) \sim L(E_1, L(E_2, \dots, E_p; F))$ est \mathcal{S} -admissible au sens de I.3. Etant donnés des entiers $m, n, p > 0$ tels que $m \leq n$ et $p \leq (n - m) + 1$, on désignera par $P_{[m, n]}^p$ l'ensemble des suites $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ formées de p sous-suites $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_i | \alpha_i |)$, $i = 1, \dots, p$, de $(m, m + 1, \dots, n)$, vérifiant $\alpha_1 | \alpha_1 | < \alpha_2 | \alpha_2 | < \dots < \alpha_p | \alpha_p |$, et telles que

$$(\alpha_{11}, \dots, \alpha_1 | \alpha_1 |; \alpha_{21}, \dots, \alpha_{p1}, \dots, \alpha_p | \alpha_p |)$$

soit une permutation de $\{m, m+1, \dots, n\}$. On écrira P_{np} au lieu de $P[1, n]_p$.

PROPOSITION. Soient $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$ et $g: B \rightarrow G$, où $B \subset F$, comme ci-dessus avec $f(A) \subset B$. Etant donné un recouvrement \mathcal{S} de E , on suppose f $n-1$ fois \mathcal{S} -dérivable dans A et n fois \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$. Si $n > 1$, on suppose que les applications multilinéaires

$$D^n f(x_0) \in L_n(E; F) \text{ et } D^k f(x) \in L_k(E; F), \quad x \in A, \quad k=2, \dots, n-1,$$

sont \mathcal{S} -admissibles. Pour que $g \circ f: A \rightarrow G$ soit n fois \mathcal{S} -dérivable en x_0 , il suffit qu'il existe un recouvrement (resp. séquentiellement stable) \mathcal{J} de F vérifiant les conditions suivantes :

i) f est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -lipschitzienne en x_0 (resp. $Df(x_0)$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -admissible) et, si $n > 1$, f est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -lipschitzienne en x (resp. $Df(x)$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -admissible) quel que soit $x \in A$.

ii) g est $n-1$ fois \mathcal{J} -dérivable dans B et n fois \mathcal{J} -dérivable en $f(x_0)$.

iii) Si $n > 1$, les applications multilinéaires $D^n g(f(x_0)) \in L_n(F; G)$ et $D^k g(f(x)) \in L_k(F; G)$, $x \in A$, $k=2, \dots, n-1$, sont \mathcal{J} -admissibles.

iv) Si $n > 2$, F est métrisable ou de Baire, à moins que G ne soit l.c. et \mathcal{J} segmentiel.

Quel que soit $(b_1, \dots, b_n) \in E^n$, on a alors :

$$(1) \quad D^n(g \circ f)(x_0)(b_1, \dots, b_p) = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{np} \\ p=1, \dots, n}} D^p g(f(x_0)) \left(D^{|\alpha_1|} f(x_0)(b_{\alpha_1 1}, \dots, b_{\alpha_1 |\alpha_1|}), \dots, D^{|\alpha_p|} f(x_0)(b_{\alpha_p 1}, \dots, b_{\alpha_p |\alpha_p|}) \right).$$

L'énoncé étant déjà établi en I.5 pour $n=1$, supposons-le vérifié à l'ordre $n-1 \geq 1$ et démontrons-le à l'ordre n . L'hypothèse de récurrence entraîne que $g \circ f$ est $n-1$ fois \mathcal{S} -dérivable dans A et que l'on a :

$$(2) \quad D^{n-1}(g \circ f) = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{(n-1)p} \\ p=1, \dots, n-1}} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \circ (D^p g \circ f, D^{|\alpha_1|} f, \dots, D^{|\alpha_p|} f),$$

où $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ désigne l'application multilinéaire

$$\text{de } L_{pb}(F; G) \times L_{|\alpha_1|}(E; F) \times \dots \times L_{|\alpha_p|}(E; F) \text{ dans } L_{n-1}(E; G)$$

qui à (v, u_1, \dots, u_p) fait correspondre $v \circ (u_1 \circ \pi_{\alpha_1}, \dots, u_p \circ \pi_{\alpha_p})$; on a désigné par π_{α_i} la projection

$$(b_1, \dots, b_n) \rightarrow (b_{\alpha_i 1}, \dots, b_{\alpha_i |\alpha_i|}) \text{ de } E^{n-1} \text{ sur } E^{|\alpha_i|}.$$

Dans le second membre de (2), chaque application $D^p g \circ f: A \rightarrow L_p(F; G)$ peut en effet, moyennant un abus véniel de notation, être considérée comme prenant ses valeurs dans le sous-espace $L_{pb}(F, G)$, compte tenu de l'hypothèse (iv) et de la proposition 1 ainsi que du corollaire 1 de II.5. Il s'agit maintenant en premier lieu d'observer que

$$D^{n-1}(g \circ f): A \rightarrow L_{n-1}(E; G)$$

est \mathcal{S} -dérivable en x_0 . Compte tenu de (2), ceci revient à vérifier que chaque $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \circ (D^p g \circ f, D^{|\alpha_1|} f, \dots, D^{|\alpha_p|} f)$ est \mathcal{S} -dérivable en x_0 . Or l'application multilinéaire $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ est bornée sur les bornés et séparément continue. D'après le corollaire 2 de I.6, il suffit donc d'observer d'une part que, par hypothèse, les \mathcal{S} -dérivées

$$D(D^{|\alpha_i|} f)(x_0) \in L(E, L_{|\alpha_i|}(E; F)), \quad i = 1, \dots, p,$$

sont définies et \mathcal{S} -admissibles, d'autre part que la \mathcal{S} -dérivée

$$D(D^p g \circ f)(x_0), \text{ définie et égale à } D(D^p g)(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

d'après I.5, est aussi \mathcal{S} -admissible. Or soit Ω un ouvert équilibré de F , relativement auquel $D(D^p g)(f(x_0))$ est \mathcal{J} -admissible. Il existe un voisinage V de $0 \in F$ et un ouvert équilibré Ω_1 de E relativement auquel f est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -lipschitzienne en x_0 tels que l'on ait:

$$(3) \quad Df(x_0)(\Omega_1) + V \subset \Omega.$$

On observera alors que $D(D^p g)(f(x_0)) \circ Df(x_0)$ est \mathcal{S} -admissible relativement à Ω_1 . Soient en effet (b_n) une suite subordonnée à $\mathcal{S}|_{\Omega_1}$ et (t_n) une suite de $[-1, 1] - \{0\}$ convergant vers 0. Il existe n_0 tel que $n > n_0$ entraîne

$$\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \in Df(x_0)(b_n) + V;$$

donc, compte tenu de (3), la suite $(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n})_{n > n_0}$ est

subordonnée à $\mathcal{J} | \Omega$. On a :

$$D(D^p g)(f(x_0))(Df(x_0)(b_n)) = D(D^p g)(f(x_0)) \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \right) \\ - D(D^p g)(f(x_0)) \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(b_n) \right).$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(b_n) = 0$$

et que la suite

$$\left(D(D^p g)(f(x_0)) \left(\frac{f(x_0 + t_n b_n) - f(x_0)}{t_n} \right) \right)_{n > n_0}$$

est bornée d'après ce qui précède, $D(D^p g)(f(x_0))$ étant \mathcal{J} -admissible relativement à Ω , il vient finalement que la suite

$$(D(D^p g)(f(x_0))(Df(x_0)(b_n)))$$

est bornée. Il reste à vérifier (1). Compte tenu de la remarque 2 de II.3 et de l'hypothèse de récurrence, ceci revient à démontrer que le second membre de (1) égale

$$(4) \quad D(x \rightarrow \sum_M D^p g(f(x)) (D^{|\alpha_1|} f(x) b_{\alpha_1}, \dots, D^{|\alpha_p|} f(x) b_{\alpha_p}))(x_0)(b_1).$$

On a posé:

$$b_{\alpha_i} = (b_{\alpha_{i1}}, \dots, b_{\alpha_i | \alpha_i}) \quad \text{et} \quad M = \left[\begin{array}{l} (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P[2, n]_p \\ p = 1, \dots, n-1 \end{array} \right]$$

Or (4) admet pour expression

$$(5) \quad D(\sum_M \phi_p \circ (D^p g \circ f, \bar{b}_{\alpha_1} \circ D^{|\alpha_1|} f, \dots, \bar{b}_{\alpha_p} \circ D^{|\alpha_p|} f))(x_0)(b_1).$$

$\phi_p : L_p(F; G) \times F^p \rightarrow G$ étant l'application $(v, k_1, \dots, k_p) \rightarrow v(k_1, \dots, k_p)$

et $\bar{b}_{\alpha_i} : L_{|\alpha_i|}(E; F) \rightarrow F$ l'application linéaire continue

$$u \rightarrow u(b_{\alpha_{i1}}, \dots, b_{\alpha_i | \alpha_i}).$$

On observe que les ϕ_p ci-dessus sont multilinéaires, séparément continues et bornées sur les bornés. Il résulte alors du corollaire 2 de I.6 que (5) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sum_M (\phi_p(D(D^p g \circ f)(x_0)(b_1), \bar{b}_{\alpha_1}(D^{|\alpha_1|} f(x_0)), \dots, \bar{b}_{\alpha_p}(D^{|\alpha_p|} f(x_0))) \\ & + \sum_{i=1, \dots, p} \phi_p(D^p g(f(x_0)), \bar{b}_{\alpha_1}(D^{|\alpha_1|} f(x_0)), \dots \\ & \dots, \bar{b}_{\alpha_{i-1}}(D^{|\alpha_{i-1}|} f(x_0)), D(\bar{b}_{\alpha_i} \circ D^{|\alpha_i|} f)(x_0)(b_1), \\ & \bar{b}_{\alpha_{i+1}}(D^{|\alpha_{i+1}|} f(x_0)), \dots, \bar{b}_{\alpha_p}(D^{|\alpha_p|} f(x_0))) = \\ & = \sum_M ((D(D^p g)(f(x_0))(D f(x_0)(b_1)))(D^{|\alpha_1|} f(x_0) b_{\alpha_1}, \dots, D^{|\alpha_p|} f(x_0) b_{\alpha_p}) \\ & + \sum_{i=1, \dots, p} D^p g(f(x_0))(D^{|\alpha_1|} f(x_0) b_{\alpha_1}, \dots, D^{|\alpha_{i-1}|} f(x_0) b_{\alpha_{i-1}}, \\ & (D(D^{|\alpha_i|} f)(x_0)(b_1)) b_{\alpha_i}, D^{|\alpha_{i+1}|} f(x_0) b_{\alpha_{i+1}}, \dots, D^{|\alpha_p|} f(x_0) b_{\alpha_p})) = \\ & = \sum_M (D^{p+1} g(f(x_0))(D f(x_0) b_{\alpha_0^{(0)}}, D^{|\alpha_1^{(0)}|} f(x_0) b_{\alpha_1^{(0)}}, \dots, D^{|\alpha_p^{(0)}|} f(x_0) b_{\alpha_p^{(0)}}) \\ & + \sum_{i=1, \dots, p} D^p g(f(x_0))(D^{|\alpha_i^{(i)}|} f(x_0) b_{\alpha_i^{(i)}}, \dots, D^{|\alpha_p^{(i)}|} f(x_0) b_{\alpha_p^{(i)}})). \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration, compte tenu de ce que l'on a

$$\bigcup_{p=1, \dots, n} P_{np} = \bigcup_M \{(\alpha_0^{(0)}, \dots, \alpha_p^{(0)}), (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_p^{(1)}), \dots, (\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_p^{(p)})\},$$

où on a posé, d'une part,

$$\alpha_0^{(0)} = (1), \quad \alpha_k^{(0)} = \alpha_k \quad \text{pour } k = 1, \dots, p,$$

et, d'autre part, pour $i = 1, \dots, p$:

$$\alpha_i^{(i)} = (1, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_i | \alpha_i |) \quad \text{et} \quad \alpha_j^{(i)} = \alpha_j \quad \text{si } j \neq i.$$

COROLLAIRE 1. Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est n fois dérivable en $x_0 \in A$ et si $g: B \rightarrow G$, où $B \subset F$, est $n-1$ fois dérivable dans $B \supset f(A)$ et n fois dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f: A \rightarrow G$ est n fois dérivable en x_0 dans les cas suivants :

i) $n = 1$;

ii) $n = 2$ et E est normable;

iii) $n > 2$, E est normable, G est l.c., à moins que F ne soit métrisable ou de Baire.

On a remarqué que les hypothèses (i) et (ii) dans la proposition précédente entraînent, compte tenu de (I.5), que les \mathfrak{S} -dérivées

$$D(D^{n-1} g \circ f)(x_0) \text{ et } D(D^k g \circ f)(x), \quad x \in A, \quad k = 1, \dots, n-2,$$

sont définies. On peut alors dans la proposition précédente, et sans affecter le résultat, remplacer l'hypothèse (iii) par la \mathfrak{S} -admissibilité des applications linéaires ci-dessus. Cette hypothèse étant un fait trivial quel que soit \mathfrak{S} lorsque E est normable, il vient que l'énoncé du corollaire résulte de la proposition précédente.

COROLLAIRE 2. Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, est n fois b -dérivable (resp. c -dérivable) en $x_0 \in A$ et si $g: B \rightarrow G$, où $B \subset F$, est $n-1$ fois b -dérivable (resp. c -dérivable) dans $B \supset f(A)$ et n fois b -dérivable (resp. c -dérivable) en $f(x_0)$, alors $g \circ f: A \rightarrow G$ est n fois b -dérivable (resp. c -dérivable) en x_0 , lorsque $n \leq 2$ ou que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

i) F est métrisable ou de Baire,

ii) G est l.c..

COROLLAIRE 3. Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, supposée n fois b -dérivable dans A , est de classe C^n en $x_0 \in A$ et si $g: B \rightarrow G$, où $B \subset F$, supposée n fois b -dérivable dans $B \supset f(A)$ est de classe C^n en $f(x_0)$, alors $g \circ f: A \rightarrow G$ est de classe C^n en x_0 pourvu que $n \leq 2$, ou que F soit métrisable ou de Baire, ou encore que G soit l.c..

Il résulte alors du corollaire précédent que $g \circ f$ est n fois b -dérivable dans A et il s'agit de vérifier que $D^n(g \circ f): A \rightarrow L_n(E; G)$ est b -

continue en x_0 . Or, ceci est déjà démontré pour $n=1$, d'après I.5. Dans le cas $n=2$, on a :

$$D^2(g \circ f) = \phi \circ (D^2 g \circ f, Df, Df) + \psi \circ (Dg \circ f, D^2 f),$$

où

$$\phi : L_2(F, G) \times L(E, F) \times L(E, F) \rightarrow L_2(E; G)$$

désigne l'application $(v, u_1, u_2) \rightarrow v \circ (u_1, u_2)$, et où

$$\psi : L(F, G) \times L_2(E; F) \rightarrow L_2(E; G)$$

désigne l'application $(v, u) \rightarrow v \circ u$. On observe d'abord que l'application bilinéaire ψ est hypocontinue par rapport au 1^{er} argument, donc séquentiellement continue, ce qui entraîne,

$$(Dg \circ f, D^2 f) : A \rightarrow L(F, G) \times L_2(E; F)$$

étant b -continue en x_0 (en effet, f est b -dérivable en x_0 , donc b -lipschitzienne en x_0 , et Dg est b -continue en x_0 , donc $Dg \circ f$ est b -continue en x_0), que $\psi \circ (Dg \circ f, D^2 f)$ est b -continue en x_0 . D'autre part pour les raisons suivantes $\phi \circ (D^2 g \circ f, Df, Df)$ est b -continue en x_0 : d'une part, l'application trilinéaire ϕ , parce que bornée sur les bornés et continue par rapport au 1^{er} argument, vérifie la propriété suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(u_0 + u_n, v_0 + t_n b_n, w_0 + t'_n w_n) = \phi(u_0, v_0, w_0)$$

quels que soient

$$(u_0, v_0, w_0) \in L_2(F; G) \times L(E, F) \times L(E, F),$$

les suites bornées (v_n) , (w_n) de $L(E, F)$, la suite (u_n) de $L_2(F; G)$ convergeant vers 0 et enfin les suites réelles (t_n) , (t'_n) convergeant vers 0. Puisque d'autre part $D^2 g \circ f$ est b -continue en x_0 (du fait que f est b -lipschitzienne en x_0 et que $D^2 g$ est b -continue en $f(x_0)$) et que Df est b -lipschitzienne en x_0 , parce que b -dérivable en ce point, il vient que $\phi \circ (D^2 g \circ f, Df, Df)$ est b -continue en x_0 , ce qui achève de montrer que $D^2(g \circ f)$ est b -continue en x_0 . Soit $n > 2$; avec les notations précédentes, compte tenu des hypothèses sur F ou G , on a :

$$D^n(g \circ f) = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{n,p} \\ p = 1, \dots, n}} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \circ (D^p g \circ f, D^{\alpha_1} f, \dots, D^{\alpha_p} f)$$

et il s'agit donc pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{np}$, $p=1, \dots, n$ fixés, d'observer que

$$\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \circ (D^p g \circ f, D^{|\alpha_1|} f, \dots, D^{|\alpha_p|} f) : A \rightarrow L_n(E; G)$$

est b -continue en x_0 . Or d'une part,

$$\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} : L_{pb}(F; G) \times L_{|\alpha_1|}(E; F) \times \dots \times L_{|\alpha_p|}(E; F) \rightarrow L_n(E; G)$$

est hypocontinue par rapport au 1^{er} argument, donc séquentiellement continue. D'autre part $D^p g \circ f$ et les $D^{|\alpha_i|} f$ sont b -continues en x_0 .

COROLLAIRE 4. Si $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, et $g: B \rightarrow G$, où $f(A) \subset B \subset F$, sont de classe C^n , alors $g \circ f$ est de classe C^n , pourvu que $n < 2$, à moins que F soit métrisable ou de Baire, ou encore que G soit l.c. .

III FONCTIONS IMPLICITES

III.1. \mathcal{S} -dérivabilité des fonctions implicites.

On vérifie le lemme suivant de la même façon que la remarque 2 de I.1.

LEMME. Soit f une application définie dans l'ouvert $A \times B$ de l'e.v.t. produit $E \times F$ à valeurs dans l'e.v.t. G . Soit \mathcal{S} (resp. \mathcal{T}) un recouvrement de E (resp. F) homothétiquement stable, \mathcal{T} étant en outre supposé borné. Pour que f soit $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ -dérivable en $(x_0, y_0) \in A \times B$, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ de E et $u \in L(E \times F, G)$ tels que l'on ait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_n b_n, y_0 + t_n k_n) - f(x_0, y_0)}{t_n} - u(b_n, k_n) = 0,$$

quelles que soient la suite (b_n) de E (resp. la suite (k_n) de F) subordonnée à $\mathcal{S}|_{\Omega}$ (resp. à \mathcal{T}) et la suite réelle (t_n) de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers 0. On a alors $u = Df(x_0, y_0)$.

On précisera, s'il y a lieu, que f est $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ -dérivable en (x_0, y_0) relativement à Ω et on peut adapter les remarques de I.6 au cas présent.

PROPOSITION. Soit $f: A \times B \rightarrow G$, où $A \times B \subset E \times F$, comme ci-dessus; soit $g: A \rightarrow F$, telle que $g(A) \subset B$ et $f(x, g(x)) = 0$ quel que soit $x \in A$; soit enfin \mathcal{S} un recouvrement homothétiquement stable de E . Pour que g soit \mathcal{S} -dérivable en $x_0 \in A$, il suffit qu'il existe un recouvrement borné et homothétiquement stable \mathcal{J} de F , tel que f soit $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$ -dérivable en $(x_0, g(x_0))$ avec $D_2 f(x_0, g(x_0)) \in \text{Is}(F, G)$ et que g soit $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -lipschitzienne en x_0 . On a alors

$$Dg(x_0) = -(D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1} \circ D_1 f(x_0, g(x_0)).$$

Soit Ω un ouvert équilibré de E , relativement auquel f est $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$ -dérivable en $(x_0, g(x_0))$ au sens ci-dessus, et relativement auquel g est $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ -lipschitzienne en x_0 . D'après les remarques de I.6, adaptées au cas présent, on observe que l'application $\bar{f}: A \times B \rightarrow F$ qui à (x, y) fait correspondre $y - (D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1}(f(x, y))$ est $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$ -dérivable en $(x_0, g(x_0))$ relativement à Ω . On a :

$$D_1 \bar{f}(x_0, g(x_0)) = -(D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1} \circ D_1 f(x_0, g(x_0)),$$

$$D_2 \bar{f}(x_0, g(x_0)) = 0.$$

Il s'agit donc de vérifier :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_0 + t_n b_n) - g(x_0)}{t_n} - D_1 \bar{f}(x_0, g(x_0))(b_n) = 0,$$

quelles que soient la suite (b_n) de E subordonnée à $\mathcal{S}|_\Omega$ et la suite (t_n) de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers 0. Or la relation précédente équivaut à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}(x_0 + t_n b_n, g(x_0 + t_n b_n)) - \bar{f}(x_0, g(x_0))}{t_n}$$

$$- D_1 \bar{f}(x_0, g(x_0))(b_n) = 0.$$

Puisque $D_2 \bar{f}(x_0, g(x_0)) = 0$, ceci équivaut aussi à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}(x_0 + t_n b_n, g(x_0) + t_n (\frac{g(x_0 + t_n b_n) - g(x_0)}{t_n})) - \bar{f}(x_0, g(x_0))}{t_n}$$

$$- D\bar{f}(x_0, g(x_0))(b_n, \frac{g(x_0 + t_n b_n) - g(x_0)}{t_n}) = 0.$$

Cette dernière relation résulte de ce que f est $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$ -dérivable au point $(x_0, g(x_0))$ relativement à Ω et de ce que la suite

$$\left(\frac{g(x_0 + t_n b_n) - g(x_0)}{t_n} \right)$$

est par hypothèse subordonnée à \mathcal{J} .

COROLLAIRE. Soient, comme ci-dessus, $f: A \times B \rightarrow G$, où $A \times B \subset E \times F$, et $g: A \rightarrow F$ telles que $g(A) \subset B$ et $f(x, g(x)) = 0$ quel que soit $x \in A$. Soit $x_0 \in A$ tel que f soit dérivable (resp. b -dérivable, resp. c -dérivable) en $(x_0, g(x_0))$ et que $D_2 f(x_0, g(x_0)) \in \text{Is}(F, G)$. Pour que g soit dérivable (resp. b -dérivable, resp. c -dérivable) en x_0 , il suffit (resp. il faut et il suffit) que g soit lipschitzienne (resp. b -lipschitzienne, resp. c -lipschitzienne) en x_0 .

Ceci résulte de la proposition précédente, compte tenu du corollaire 2 de I.3.

III.2. \mathcal{S} -dérivabilité à l'ordre supérieur.

Etant donnée une suite (i_1, \dots, i_p) de p éléments de $\{1, 2\}$, on désigne par $P_{n; i_1 \dots i_p}$, où $n \geq p$, le sous-ensemble de P_{np} , défini en II.6, formé des $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ tels que $i_k = 1$, $k = 1, \dots, p$, entraînent $|\alpha_k| = 1$. On désignera par $S_{np}^{(2)}$ l'ensemble des suites (i_1, \dots, i_p) de p éléments de $\{1, 2\}$ telles que $P_{n; i_1 \dots i_p}$ ne soit pas vide. Avec ces notations et celles de II.6 on peut énoncer:

LEMME. Soit f une application définie dans l'ouvert $A_1 \times A_2$ de l'e.v.t. produit $E_1 \times E_2$, à valeurs dans l'e.v.t. F et soit $g: A_1 \rightarrow E_2$ telle que $g(A_1) \subset A_2$. Soit enfin \mathcal{S}_1 un recouvrement de E_1 tel que g soit $n-1$ fois \mathcal{S}_1 -dérivable dans A_1 et n fois \mathcal{S}_1 -dérivable en $x_0 \in A_1$. Si $n > 1$, on suppose que les applications multilinéaires

$$D^n g(x_0) \in L_n(E_1; E_2) \text{ et } D^k g(x) \in L_k(E_1; E_2), \quad x \in A_1, \quad k = 2, \dots, n-1,$$

sont δ_1 -admissibles. Pour que l'application $x \rightarrow f(x, g(x))$ définie dans $A_1 \subset E_1$ soit n fois δ_1 -dérivable en x_0 , il suffit qu'il existe un recouvrement δ_2 de E_2 vérifiant les conditions suivantes :

i) g est (δ_1, δ_2) -lipschitzienne en x_0 et, si $n > 1$, g est (δ_1, δ_2) -lipschitzienne en tout $x \in A_1$.

ii) f est $n-1$ fois $\delta_1 \times \delta_2$ -dérivable dans $A_1 \times A_2$ et n fois $\delta_1 \times \delta_2$ -dérivable en $(x_0, g(x_0))$

iii) Si $n > 1$, les applications multilinéaires

$D^n f(x_0, g(x_0)) \in L_n(E_1 \times E_2; F)$ et $D^k f(x, g(x)), x \in A_1, k=2, \dots, n-1$ sont $\delta_1 \times \delta_2$ -admissibles.

iv) Si $n > 2$, E_2 est métrisable ou de Baire, à moins que F ne soit l.c. et δ_1, δ_2 segmentiels.

On a alors :

$$(1) D^n(x \rightarrow f(x, g(x)))(x_0)(b_1, \dots, b_n) = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{n; i_1 \dots i_p} \\ (i_1, \dots, i_p) \in S_{np}^{(2)} \\ p=1, \dots, n}} D_{i_1 \dots i_p} f(x_0, g(x_0)) (\delta_{i_1}^{\alpha_1} b_{\alpha_1} + \delta_{i_2}^{\alpha_2} (D^{\alpha_1} |_{g(x_0)} b_{\alpha_1}), \dots, \delta_{i_p}^{\alpha_p} b_{\alpha_p} + \delta_{i_p}^{\alpha_p} (D^{\alpha_p} |_{g(x_0)} b_{\alpha_p}))$$

quels que soient $b_k \in E_1, k=1, \dots, n$.

Pour $n=1$, l'énoncé résulte de I.5, puisque $(j_{A_1}, g): A_1 \rightarrow E_1 \times E_2$ est $(\delta_1, \delta_1 \times \delta_2)$ -lipschitzienne en x_0 ($j_{A_1}: A_1 \rightarrow E_1$ désignera l'injection naturelle), et que

$$D(f \circ (j_{A_1}, g))(x_0) = Df(x_0, g(x_0)) \circ D(j_{A_1}, g)(x_0) = D_1 f(x_0, g(x_0)) + D_2 f(x_0, g(x_0)) \circ Dg(x_0).$$

L'énoncé étant supposé établi à l'ordre $n-1 \geq 1$, démontrons-le à l'ordre n . L'hypothèse de récurrence entraîne alors que $f \circ (j_{A_1}, g)$ est $n-1$ fois δ_1 -dérivable dans A_1 et que l'on a :

$$(2) D^{n-1}(f \circ (j_{A_1}, g)) =$$

$$= \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{n-1; i_1 \dots i_p} \\ (i_1, \dots, i_p) \in S_{(n-1)p}^{(2)} \\ p=1, \dots, n-1}} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} \circ (D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g), D|_{\alpha_1}|_g, \dots, D|_{\alpha_p}|_g),$$

où $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p}$:

$$L_b^{(2)}(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F) \times L|_{\alpha_1}|(E_{i_1}; F) \times \dots \times L|_{\alpha_p}|(E_{i_p}; F) \rightarrow L_{n-1}(E_1; F)$$

est l'application multilinéaire qui à (v, u_1, \dots, u_p) fait correspondre

$$v \circ (\delta_{i_1}^1 \pi_{\alpha_1} + \delta_{i_1}^2 (u_1 \circ \pi_{\alpha_1}), \dots, \delta_{i_p}^1 \pi_{\alpha_p} + \delta_{i_p}^2 (u_p \circ \pi_{\alpha_p})),$$

où $\pi_{\alpha_k} : E_1^{n-1} \rightarrow E_1^k$ est la projection naturelle, déjà définie en II.6, et où $L_b^{(2)}(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F)$ est le sous-espace vectoriel de $L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F)$ qui est formé des applications multilinéaires $u : E_{i_1} \times \dots \times E_{i_p} \rightarrow F$ telles que $i_k = 2, k = 1, \dots, p$, entraînent que u est hypocontinue par rapport au $k^{\text{ième}}$ argument. Dans le second membre de (2), chaque application

$$D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g) : A_1 \rightarrow L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F)$$

peut en effet moyennant un abus véniel de notation être considérée comme prenant ses valeurs dans l'e.v.t. $L_b^{(2)}(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F)$ en vertu de la proposition 1 et du corollaire 2 de II.5, compte tenu de l'hypothèse (iv). Il s'agit maintenant, en premier lieu, de montrer que

$$D^{n-1}(f \circ (j_{A_1}, g)) : A_1 \rightarrow L_{n-1}(E_1; F)$$

est \mathcal{S}_1 -dérivable en x_0 , c'est-à-dire, compte tenu de (2), que

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} \circ (D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g), D|_{\alpha_1}|_g, \dots, D|_{\alpha_p}|_g)$$

est \mathcal{S}_1 -dérivable en x_0 , quels que soient

$$(i_1, \dots, i_p) \in S_{(n-1)p}^{(2)}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P_{n; i_1, \dots, i_p}, p = 1, \dots, n-1, \text{ fixés.}$$

Or l'application multilinéaire $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p}$ est bornée sur les bornés et séparément continue. D'après le corollaire 2 du I.6, il suffit donc d'observer d'une part que, par hypothèse, les \mathcal{S}_1 -dérivées

$$D(D|_{\alpha_i}|_g)(x_0) \in L(E_1, L|_{\alpha_i}|(E_1; E_2))$$

sont définies et \mathfrak{S}_1 -admissibles, et d'autre part que la \mathfrak{S}_1 -dérivée

$$D(D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g))(x_0), \text{ définie et égale à}$$

$$D_1(D_{i_1 \dots i_p} f)(x_0, g(x_0)) + D_2(D_{i_1 \dots i_p} f)(x_0, g(x_0)) \circ Dg(x_0)$$

est \mathfrak{S}_1 -admissible. Or, compte tenu de la remarque de II.4 et de l'hypothèse (iii), on observe que

$$D(D_{i_1 \dots i_p} f)(x_0, g(x_0)) \in L(E_1 \times E_2, L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F)).$$

est $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ -admissible donc

$$D_1(D_{i_1 \dots i_p} f)(x_0, g(x_0)) \in L(E_1, L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F))$$

est \mathfrak{S}_1 -admissible et

$$D_2(D_{i_1 \dots i_p} f)(x_0) \in L(E_2, L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F))$$

est \mathfrak{S}_2 -admissible. Puisque g est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ -lipschitzienne en x_0 , on observe, comme dans le passage analogue de la démonstration de la proposition de II.6, que $D_2(D_{i_1 \dots i_p} f)(x_0, g(x_0)) \circ Dg(x_0)$ est \mathfrak{S}_1 -admissible, ce qui achève de montrer que $D(D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)$ est \mathfrak{S}_1 -admissible. Il reste à vérifier (1), dont le second membre égale :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{np} \\ p=1, \dots, n}} \left(\sum_{\substack{1 \leq i_k \leq 2 \\ k=1, \dots, p}} D_{i_1 \dots i_p} f(x_0, g(x_0)) (\delta_{i_1}^1 | \delta_{\alpha_1}^1 | b_{\alpha_1}) \right. \\ & \quad \left. + \delta_{i_2}^2 (D^{|\alpha_1|} g(x_0) b_{\alpha_1}), \dots, \delta_{i_p}^1 (\delta_{\alpha_p}^1 | b_{\alpha_p}) + \delta_{i_p}^2 (D^{|\alpha_p|} g(x_0) b_{\alpha_p}) \right) = \\ & \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{np} \\ p=1, \dots, n}} D^p f(x_0, g(x_0)) ((\delta_{\alpha_1}^1 | b_{\alpha_1}, D^{|\alpha_1|} g(x_0) b_{\alpha_1}), \dots, \\ & \quad \dots, (\delta_{\alpha_p}^1 | b_{\alpha_p}, D^{|\alpha_p|} g(x_0) b_{\alpha_p})). \end{aligned}$$

C'est-à-dire qu'il faut vérifier :

$$\begin{aligned} (3) \quad D^n(f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)(b_1, \dots, b_n) = \\ \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{np} \\ p=1, \dots, n}} D^p f(x_0, g(x_0)) (D^{|\alpha_1|} (j_{A_1}, g)(x_0) b_{\alpha_1}, \dots, \\ \dots, D^{|\alpha_p|} (j_{A_1}, g)(x_0) b_{\alpha_p}). \end{aligned}$$

Or $\psi_p : L_p(E_1 \times E_2; F) \times (E_1 \times E_2)^p \rightarrow F$ désignant l'application multilinéaire, bornée sur les bornés et séparément continue

$$(v, k_1, \dots, k_p) \rightarrow v(k_1, \dots, k_p),$$

il vient, comme dans II.6 et compte tenu de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & D^n (f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)(b_1, \dots, b_n) = \\ & D(x \rightarrow D^{n-1}(f \circ (j_{A_1}, g))(x)(b_2, \dots, b_n))(x_0)(b_1) = \\ & D \left(\sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P[2, n] \\ p=1, \dots, n-1}} \psi_p \circ (D^p f \circ (j_{A_1}, g), \bar{b}_{\alpha_1} \circ D^{|\alpha_1|}(j_{A_1}, g), \dots \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \dots, \bar{b}_{\alpha_p} \circ D^{|\alpha_p|}(j_{A_1}, g)) \right)(x_0)(b_1) = \\ & = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{np} \\ p=1, \dots, n}} D^p f(x_0, g(x_0))(D^{|\alpha_1|}(j_{A_1}, g)(x_0)h_{\alpha_1}, \dots \\ & \qquad \qquad \qquad \dots, D^{|\alpha_p|}(j_{A_1}, g)(x_0)h_{\alpha_p}), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration, compte tenu de (3).

Avec les notations ci-dessus, on peut énoncer :

PROPOSITION. Soient $f : A_1 \times A_2 \rightarrow F$, où $A_1 \times A_2 \subset E_1 \times E_2$, et $g : A_1 \rightarrow E_2$ telles que $g(A_1) \subset A_2$ et $f(x, g(x)) = 0$ quel que soit $x \in A_1$. Soit \mathcal{S}_1 un recouvrement homothétiquement stable de E_1 . Pour que g soit n fois \mathcal{S}_1 -dérivable en $x_0 \in A_1$, il suffit qu'il existe un recouvrement borné et homothétiquement stable \mathcal{S}_2 de E_2 tel que f soit $n-1$ fois $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ -dérivable en $(x_0, g(x_0))$, les conditions suivantes étant en outre remplies :

i) $D_2 f(x_0, g(x_0)) \in \text{Is}(E_2, F)$ et, si $n > 1$, $D_2 f(x, g(x)) \in \text{Is}(E_2, F)$ quel que soit $x \in A_1$.

ii) Si $n > 1$,

$$D_{1i_2 \dots i_n} f(x_0, g(x_0)) \in L(E_1, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}; F)$$

et

$$D_{1i_2 \dots i_p} f(x, g(x)) \in L(E_1, E_{i_2}, \dots, E_{i_p}; F)$$

sont \mathcal{S}_1 -admissibles quels que soient, d'une part, la suite (i_2, \dots, i_n) de

$n-1$ éléments de $\{1, 2\}$, et, d'autre part, $x \in A$ et la suite (i_2, \dots, i_p) de $1 \leq p-1 \leq n-2$ éléments de $\{1, 2\}$.

iii) g est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ -lipschitzienne en tout $x \in A_1$.

iv) Si $n > 1$, E_2 est un b -espace.

v) Si $n > 2$, E_2 est métrisable ou de Baire, à moins d'être l.c. et que $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ soient segmentiels.

Les $D^k g(x_0)$, $k=1, \dots, n$, vérifient alors :

$$(1_1) \quad Dg(x_0) = -(D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1} \circ D_1 f(x_0, g(x_0)),$$

$$(1_m) \quad D^m g(x_0) = -(D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1} \circ \left(\sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{m; i_1, \dots, i_p} \\ (i_1, \dots, i_p) \in S_{mp}^{(2)} \\ p=2, \dots, m}} D_{i_1 \dots i_p} f(x_0, g(x_0)) \right) \circ (\delta_{i_1}^1 \pi_{\alpha_1} + \delta_{i_2}^2 (D^{\alpha_1} |_{g(x_0) \circ \pi_{\alpha_1}}), \dots, \delta_{i_p}^1 \pi_{\alpha_p} + \delta_{i_p}^2 (D^{\alpha_p} |_{g(x_0) \circ \pi_{\alpha_p}})).$$

L'énoncé étant déjà démontré en III.1 dans le cas $n=1$, supposons-le établi à l'ordre $n-1 \geq 1$ et vérifions-le à l'ordre n . Il résulte des hypothèses générales et de l'hypothèse de récurrence que g est $n-1$ fois \mathfrak{S}_1 -dérivable dans A_1 et on a, avec les notations du lemme :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^{n-1} g = \phi_{n-1} \circ (D_1 f \circ (j_{A_1}, g), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g))) \\ \text{ou bien} \\ D^{n-1} g = \phi_{n-1} \circ \left(\sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{n-1; i_1, \dots, i_p} \\ (i_1, \dots, i_p) \in S_{(n-1)p}^{(2)} \\ p=2, \dots, n-1}} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} \circ (D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g), \right. \\ \left. D^{\alpha_1} |_{g}, \dots, D^{\alpha_p} |_{g}), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)) \right) \end{array} \right.$$

selon que $n=2$ ou $n > 2$. Pour $k \geq 1$, on a désigné par ϕ_k l'application

$$(u, v) \rightarrow -v \circ u \text{ de } L_k(E_1, F) \times L(F, E_2) \text{ dans } L_k(E_1, E_2)$$

et par σ l'application

$$u \rightarrow u^{-1} \text{ de } Is(E_2, F) \text{ dans } L(F, E_2).$$

Vérifions donc d'abord que $D^{n-1}g: A_1 \rightarrow L_{n-1}(E_1; E_2)$ est \mathcal{S}_1 -dérivable en x_0 . Puisque l'application bilinéaire ϕ_{n-1} est bornée sur les bornés et séparément continue, il suffit de vérifier que les \mathcal{S}_1 -dérivées

$$\begin{aligned} D(D_1 f \circ (j_{A_1}, g))(x_0) &\in L(E_1, L(E_1, F)), \\ D(\sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)))(x_0) &\in L(E_1, L(F, E_2)), \\ D(\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} \circ (D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g), D^{\alpha_1} |_{g, \dots, D^{\alpha_p} |_{g}}))(x_0) \\ &\in L(E_1, L_{n-1}(E_1; F)) \end{aligned}$$

sont définies et \mathcal{S}_1 -admissibles. Puisque \mathcal{S}_2 est borné et que g est $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ -lipschitzienne en x_0 , il résulte d'abord de la remarque de I.3 que la \mathcal{S}_1 -dérivée $Dg(x_0)$ est \mathcal{S}_1 -admissible. Mais alors les \mathcal{S}_1 -dérivées $D(D_i f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)$, $i=1, 2$, définies et égales à

$$\begin{aligned} &D(D_i f)(x_0, g(x_0)) \circ D(j_{A_1}, g)(x_0) = \\ &D_1(D_i f)(x_0, g(x_0)) + D_2(D_i f)(x_0, g(x_0)) \circ Dg(x_0) \end{aligned}$$

d'après I.5, sont \mathcal{S}_1 -admissibles, compte tenu de l'hypothèse (ii).

Puisque la \mathcal{S}_1 -dérivée $D(D_2 f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)$ est définie et \mathcal{S}_1 -admissible, il résulte du corollaire de I.7, compte tenu de l'hypothèse (iv), que la \mathcal{S}_1 -dérivée $D(\sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)))(x_0)$ est définie et \mathcal{S}_1 -admissible. En vue de montrer que la \mathcal{S}_1 -dérivée

$$D(\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} \circ (D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g), D^{\alpha_1} |_{g, \dots, D^{\alpha_p} |_{g}}))(x_0)$$

est définie et \mathcal{S}_1 -admissible, il suffit, compte tenu du corollaire 2 de I.6, de vérifier d'abord que la \mathcal{S}_1 -dérivée $D(D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)$ est définie et \mathcal{S}_1 -admissible, ce que l'on voit comme pour les

$$D(D_i f \circ (j_{A_1}, g))(x_0), \quad i=1, 2,$$

ci-dessus compte tenu de l'hypothèse (ii). Ensuite, il faut observer que les \mathcal{S}_1 -dérivées

$$D(D^{\alpha_i} |_{g})(x_0) \in L(E_1, L_{|\alpha_i|}(E_1; E_2)), \quad i=1, \dots, p,$$

définies en vertu de l'hypothèse de récurrence, sont \mathcal{S}_1 -admissibles. On a déjà remarqué que $Dg(x_0)$ est \mathcal{S}_1 -admissible. Il résulte alors de proche

en proche des relations (I_m) , $m < n$, établies en vertu de l'hypothèse de récurrence, que chaque $D^m g(x_0)$, $m < n$, c'est-à-dire $D(D^{m-1}g)(x_0)$ est \mathcal{S}_1 -admissible. Il reste à vérifier (I_n) . Compte tenu du corollaire 2 de I.6 et de ce que les

$$D(D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g))(x_0), (i_1, \dots, i_p) \in S_{np}^{(2)}, p = 1, \dots, n-1,$$

et $D(\sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)))(x_0)$ sont \mathcal{S}_1 -admissibles, on observe que $D(D^{n-1}g)(x_0)$, c'est-à-dire, d'après ce qui précède,

$$D(\phi_{n-1} \circ \left[\sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{n-1}; i_1 \dots i_p \\ (i_1, \dots, i_p) \in S_{(n-2)p}^{(2)} \\ p=2, \dots, n-1}} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} (D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g), D^{|a_1|} g, \dots, D^{|a_p|} g), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)) \right])(x_0)$$

est \mathcal{S}_1 -admissible. Le lemme entraîne alors que la \mathcal{S}_1 -dérivée

$D^n(f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)$ est définie et égale à

$$\left[\sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{n}; i_1 \dots i_p \\ (i_1, \dots, i_p) \in S_{np}^{(2)} \\ p=1, \dots, n}} D_{i_1 \dots i_p} f(x_0, g(x_0)) \circ (\delta_{i_1}^1 \pi_{\alpha_1} + \delta_{i_1}^2 (D^{|a_1|} g(x_0) \circ \pi_{\alpha_1}), \dots, \delta_{i_p}^1 \pi_{\alpha_p} + \delta_{i_p}^2 (D^{|a_p|} g(x_0) \circ \pi_{\alpha_p})) \right]$$

Puisque $f \circ (j_{A_1}, g) = 0$, il vient :

$$D_2 f(x_0, g(x_0)) \circ D^n g(x_0) + \left[\sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{n}; i_1 \dots i_p \\ (i_1, \dots, i_p) \in S_{np}^{(2)} \\ p=2, \dots, n}} D_{i_1 \dots i_p} f(x_0, g(x_0)) \right] \circ (\delta_{i_1}^1 \pi_{\alpha_1} + \delta_{i_1}^2 (D^{|a_1|} g(x_0) \circ \pi_{\alpha_1}), \dots, \delta_{i_p}^1 \pi_{\alpha_p} + \delta_{i_p}^2 (D^{|a_p|} g(x_0) \circ \pi_{\alpha_p})) = 0,$$

d'où (I_n) .

Le corollaire de III.1 admet alors l'extension suivante à l'ordre $n > 1$.

COROLLAIRE. Soient $f: A \times B \rightarrow G$, où $A \times B \subset E \times F$ et $g: A \rightarrow F$ telles que $g(A) \subset B$ et $f(x, g(x)) = 0$ pour tout $x \in A$. On suppose que f est $n > 1$ fois c -dérivable (resp. b -dérivable; resp. dérivable, E étant supposé normable dans ce dernier cas) en $(x_0, g(x_0)) \in A \times B$ et $n-1$ fois c -dérivable (resp. b -dérivable, resp. dérivable) dans $A \times B$. On suppose aussi que $D_2 f(x, g(x)) \in \text{Is}(F, G)$ quel que soit $x \in A$, et enfin que F est un b -espace et, en outre, si $n > 2$, métrisable, de Baire ou l.c..

Pour que g soit $n-1$ fois c -dérivable (resp. b -dérivable, resp. dérivable) dans A et n fois c -dérivable (resp. b -dérivable, resp. dérivable) en x_0 , il faut et il suffit que g soit c -lipschitzienne (resp. b -lipschitzienne, resp. lipschitzienne) dans A .

III.3. Fonctions implicites de classe C^n .

PROPOSITION. Soient $f: A_1 \times A_2 \rightarrow F$, où $A_1 \times A_2 \subset E_1 \times E_2$, et $g: A_1 \rightarrow E_2$ comme ci-dessus, telles que $g(A_1) \subset A_2$ et $f(x, g(x)) = 0$ quel que soit $x \in A_1$. On suppose que f est n fois b -dérivable dans $A_1 \times A_2$, de classe C^n en $(x_0, g(x_0)) \in A_1 \times A_2$ et que $D_2 f(x, g(x)) \in \text{Is}(E_2, F)$ quel que soit $x \in A_1$. On suppose en outre les conditions suivantes:

i) si $n = 1$, l'application $u \rightarrow u^{-1}$ du sous-espace $\text{Aut}(F) \subset L(F)$ dans $L(F)$ est séquentiellement continue, à moins que F ne soit un b -espace métrisable ou de Baire.

ii) Si $n > 1$, on suppose que F est un b -espace.

iii) Si $n > 2$, on suppose que F est métrisable, de Baire ou l.c..

Alors g est n fois b -dérivable dans A_1 et de classe C^n en x_0 si et seulement si g est b -lipschitzienne dans A_1 .

La condition étant évidemment nécessaire, vérifions qu'elle est suffisante. Il résulte du corollaire de III.2 que g est n fois b -dérivable dans A_1 . Il s'agit de vérifier que $D^n g: A_1 \rightarrow L_n(E_1; F)$ est b -continue en x_0 . Soit d'abord $n = 1$. Avec les notations de III.2, on a:

$$(1) \quad Dg = \phi_1 \circ (D_1 f \circ (j_{A_1}, g), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g))).$$

On observe que $D_i f \circ (j_{A_1}, g)$, $i = 1, 2$, est b -continue en x_0 , parce que, par hypothèse, Df , et donc $D_1 f$, $D_2 f$ sont b -continues en $(x_0, g(x_0))$

et que (j_{A_1}, g) est b -lipschitzienne en x_0 . Si l'application $u \rightarrow u^{-1}$ de $Aut(F)$ dans $L(F)$ est séquentiellement continue, alors

$$(D_1 f \circ (j_{A_1}, g), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g))) : A_1 \rightarrow L(E_1, F) \times L(F, E_2)$$

est donc b -continue en x_0 et par conséquent aussi Dg , compte tenu de (1) et de ce que

$$\phi_1 : L(E_1, F) \times L(F, E_2) \rightarrow L(E_1, E_2),$$

hypocontinue par rapport au second argument est séquentiellement continue. Si F est un b -espace, alors d'une part l'image par σ de toute suite convergente est bornée, et

$$\phi_1 \circ (D_1 f \circ (j_{A_1}, g), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)))$$

est encore b -continue en x_0 , pourvu que E_2 soit métrisable ou de Baire, parce qu'alors ϕ_1 est aussi hypocontinue par rapport au 1^{er} argument en conséquence du lemme de II.1.

Si $n = 2$, on a :

$$(2) \quad D_2 g = \phi_2 (\psi \circ (D^2 f \circ (j_{A_1}, g), Dg, Dg), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g))),$$

où

$$\psi : L_2(E_1 \times E_2; F) \times L(E_1, E_2) \times L(E_1, E_2) \rightarrow L_2(E_2; F)$$

est l'application qui à (v, u_1, u_2) fait correspondre

$$(b_1, b_2) \rightarrow v((b_1, u_1(b_1)), (b_2, u_2(b_2))).$$

Puisque d'une part $D^2 f \circ (j_{A_1}, g)$ est b -continue en x_0 vu que (j_{A_1}, g) est elle b -lipschitzienne en x_0 et que $D^2 f$ est b -continue en x_0 , et que d'autre part Dg est b -lipschitzienne en x_0 parce que b -dérivable en x_0 , on observe, comme dans le passage analogue du corollaire 3 de II.6, que $\psi \circ (D^2 f \circ (j_{A_1}, g), Dg, Dg)$ est b -continue en x_0 . Il résulte du corollaire de I.7 et de la b -dérivabilité de $D^2 f \circ (j_{A_1}, g)$ en x_0 que

$$\sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)) \text{ est } b\text{-dérivable en } x_0,$$

donc b -continue en ce point. Puisque ϕ_2 est séquentiellement continue, on observe alors, compte tenu de (2), que $D^2 g$ est b -continue en x_0 .

Dans le cas général où $n > 2$, on a, avec les notations de III.2 :

$$D^n g = \phi_n \circ \left(\sum_{\substack{(a_1, \dots, a_p) \in P_n; \\ (i_1, \dots, i_p) \in S_n^{(2)} \\ p=2, \dots, n}} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} \circ (D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g)), \right. \\ \left. D^{|\alpha_1|} g, \dots, D^{|\alpha_p|} g, \sigma \circ D_2 f \circ (j_{A_1}, g) \right).$$

La b -continuité de $D^n g$ en x_0 résulte alors de la continuité séquentielle de ϕ_n , de la b -continuité en x_0 de $\sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g))$, déjà observée ci-dessus, de la continuité séquentielle des $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p}$, de la b -continuité en x_0 des $D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g)$ et enfin des $D^{|\alpha_i|} g$, b -dérivables en x_0 puisque $|\alpha_i| < n$.

COROLLAIRE. Soient $f: A \times B \rightarrow G$, où $A \times B \subset E \times F$, et $g: A \rightarrow F$ telles $g(A) \subset B$ et $f(x, g(x)) = 0$ quel que soit $x \in A$. On suppose que F est un b -espace l.c. métrisable, que f est de classe C^n dans $A \times B$ et que $D_2 f(x, g(x)) \in \text{Is}(F, G)$ quel que soit $x \in A$. Pour que g soit de classe C^n dans A , il faut et il suffit que g soit b -continue et quasi-lipschitzienne dans A .

La condition étant évidemment nécessaire, vérifions qu'elle est suffisante. Du fait que g est quasi-lipschitzienne dans A , il résulte de III.2 que g est quasi-dérivable dans A et on a :

$$(1) \quad Dg = \phi_1 \circ (D_1 f \circ (j_{A_1}, g), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)))$$

avec les notations définies ci-dessus. Compte tenu de la proposition précédente, il n'est que de vérifier que g est b -lipschitzienne dans A . Il suffit à cette fin de montrer que g est b -dérivable, ce qui revient à montrer que la quasi-dérivée Dg est b -continue, compte tenu du corollaire de la proposition 2 de I.4, F étant l.c.. Puisque F est métrisable,

$$\phi_1 : L(E, G) \times L(G, F) \rightarrow L(E, F)$$

est hypocontinue par rapport au 1^{er} argument; donc il s'agit, compte tenu de (1), de vérifier

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_i f(x_0 + t_n h_n, g(x_0 + t_n h_n)) = D_i f(x_0, g(x_0)),$$

et que la suite

$$(3) \quad ((D_2 f(x_0 + t_n h_n, g(x_0 + t_n h_n)))^{-1}$$

est bornée, quelles que soient la suite bornée (h_n) de E et la suite (t_n) de \mathbf{R}^* convergeant vers 0. Or par hypothèse on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_0 + t_n h_n) = g(x_0).$$

Puisque F est l.c., métrisable, il existe alors une suite bornée (k_n) de F et une suite réelle (t'_n) convergeant vers 0 telles que $(g(x_0 + t_n h_n))$ soit la suite $(g(x_0) + t'_n k_n)$. Pour $i = 1, 2$, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_i f(x_0 + t_n h_n, g(x_0 + t_n h_n)) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_i f(x_0 + t_n \left(\frac{t'_n}{t_n}\right) h_n, g(x_0) + t'_n \left(\frac{t'_n}{t_n}\right) k_n) = D_i f(x_0, g(x_0)),$$

parce que Df est b -continue; on a posé $t_n'' = \max(|t_n|, |t'_n|)$. On a ainsi vérifié (2) et aussi, F étant un b -espace, que la suite (3) est bornée, ce qui achève la démonstration.

*Supersunt mihi, quae scribam, sed parco sciens;
Primum, esse ne tibi videar molestior,
Distingit quem multarum rerum varietas
Dein, si quis eadem forte conari velit
Habere ut possit aliquid operis residui.*

Phèdre (Fables, III, épilogue)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AVERBUCK - SMOLYANOV, The theory of differentiation in linear topological spaces, *Russian Mathematical Surveys* XXII, n° 6 (1967).
- [2] BASTIANI, Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *Journal d'Analyse Mathématique* XIII (1964).
- [3] BERQUIER, Calcul différentiel dans les espaces quasi-bornologiques (Thèse 3^{ème} cycle Paris VII), *Esquisses Math.* 20, Paris (1973).
- [4] COLOMBEAU, *Différentiation et bornologie*, Thèse, Bordeaux (1973).
- [5] FRÖLICHER - BUCHER, Calculus in vector spaces without norm, *Lecture Notes in Math.* 30, Springer (1966).
- [6] SIMONNET, Calcul différentiel dans les espaces non normables, *Cahiers de Topo. et Géom. Diff.* XIII-4 (1972) et XIV-1 (1973).
- [7] VER EECKE, Connexions d'ordre infini, *Cahiers de Topo. et Géom. Diff.* XI-3 (1970).
- [8] VER EECKE, Sur le calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques, *C.R.A.S.* Paris, 276 (1973), p. 1549.
- [9] H. H. KELLER, Differential Calculus in locally convex spaces, *Lecture Notes* 417, Springer 1974.
- [10] S. YAMAMURO, Differential Calculus in topological linear spaces, *Lecture Notes* 374, Springer 1974.

U.E.R. de Mathématiques
 Université de Picardie
 33 rue Saint-Leu
 80039 AMIENS

SOMMAIRE

I Dérivées du premier ordre

| | |
|--|----|
| I.1. \mathcal{S} -dérivabilité. | 2 |
| I.2. Dérivabilité, b -dérivabilité, c -dérivabilité, quasi-dérivabilité. | 4 |
| I.3. Applications $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -lipschitziennes. | 5 |
| I.4. Applications de classe C^1 . | 6 |
| I.5. Transitivité. | 8 |
| I.6. Applications multilinéaires. | 10 |
| I.7. Algèbres semi-topologiques. | 12 |
| I.8. Dérivées partielles. | 14 |

II Dérivées d'ordre supérieur

| | |
|--|----|
| II.1. Les espaces $L(E_1, \dots, E_n; F)$. | 17 |
| II.2. \mathcal{S} -dérivées d'ordre supérieur. | 18 |
| II.3. Linéarité; dérivées d'ordre supérieur d'applications multilinéaires. | 19 |
| II.4. Dérivées partielles et dérivées totales. | 21 |
| II.5. Hypocontinuité et symétrie. | 22 |
| II.6. Transitivité. | 25 |

III Fonctions implicites

| | |
|--|----|
| III.1. \mathcal{S} -dérivabilité des fonctions implicites. | 32 |
| III.2. \mathcal{S} -dérivabilité à l'ordre supérieur. | 34 |
| III.3. Fonctions implicites de classe C^n . | 42 |
| Bibliographie. | 46 |