

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

MICHEL SIMONNET

Calcul différentiel dans les espaces non normables

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, n° 1 (1973), p. 3-40

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_1_3_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL DIFFERENTIEL DANS LES ESPACES NON NORMABLES

par Michel SIMONNET

SOMMAIRE.

<i>Généralités</i>	4
1. <i>Applications B-différentiables</i>	10
2. <i>Applications différentiables en un point</i>	14
3. <i>Applications C^n</i>	19
4. <i>Théorème de corrélation</i>	20
5. <i>Différentiabilité de la composition</i>	28
6. <i>Théorème de Frobenius</i>	38
7. <i>Espaces pseudo-topologiques</i>	44
8. <i>Sur le théorème des fonctions implicites</i>	48
<i>Bibliographie</i>	64

La première partie de cet article (sections 1, 2, 3 et 4) a paru dans le Volume XIII-4, pages 411 à 437.

5. DIFFERENTIABILITE DE LA COMPOSITION

Soient E, F, G trois espaces admissibles. Le but de ce chapitre est de montrer que, si F est équable, l'application composition c de l'espace $C^{k+p}(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$ est C^p , pour tous entiers k et p même nuls. Le résultat analogue de [2] semble inexact, reposant sur 11-2-8. La démonstration nécessite les mêmes lemmes que dans l'article [2]. On les établit parfois d'une manière très différente.

Signalons d'abord les résultats suivants dont nous aurons souvent besoin:

a) Soient F un espace vectoriel quasi-topologique (en abrégé un evqt) et E_1, \dots, E_n des evqt équables. L'application d'évaluation de $L(F; E_1, \dots, E_n) \times E_1 \times \dots \times E_n$ vers F est équable.

b) Soient G un evqt, F un evqt équable, et E_1, \dots, E_n des evqt. L'application composition de $L(G, F) \times L(F; E_1, \dots, E_n)$ vers l'espace $L(G; E_1, \dots, E_n)$ (notations de [2]) est bilinéaire équable.

PROPOSITION 11. Soient E_1, E_2, E_3 trois espaces vectoriels admissibles et u un élément de $L(E_3; E_2, E_1)$. Désignons par \tilde{u} l'application de l'espace $C^k(E_2, E) \times C^k(E_1, E)$ vers l'espace $C^k(E_3, E)$ définie par $(g, f) \rightarrow u.[g, f]$, où E est un eqlc. Alors \tilde{u} est bilinéaire équable.

Δ .a) Rappelons d'abord que, si (x_1, x_2) est un point de $E_1 \times E_2$ et (b_1, b_2) un vecteur de $E_1 \times E_2$ (respectivement $((b'_1, b'_2), (b''_1, b''_2))$ un couple de vecteurs de $E_1 \times E_2$), alors:

$$D u(x_1, x_2).(b_1, b_2) = u(x_1, b_2) + u(b_1, x_2)$$

et

$$D^2 u(x_1, x_2).((b'_1, b'_2), (b''_1, b''_2)) = u(b'_1, b''_2) + u(b''_1, b'_2).$$

Pour tout $n \geq 3$, $D^n u$ est l'application constante sur l'origine de l'espace $L^n(E_3; E_1 \times E_2)$.

b) Soient $\mathcal{U}\mathcal{G} \downarrow C^k(E_1, E)$ et $\mathcal{F} \downarrow C^k(E_2, E)$. Prouvons alors que $\tilde{u}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \downarrow C^k(E_3, E)$. En d'autres termes, prouvons que le filtre $D^n [\tilde{u}(\mathcal{G}, \mathcal{F})]$ converge vers 0 dans $\mathcal{C}_\lambda(L^n(E_3, \vec{E}), E)$ pour tout $n \leq k$, ou encore prouvons que $D^n [\tilde{u}(\mathcal{G}, \mathcal{F})] \cdot \mathcal{X}$ converge vers 0 dans $L^n(E_3, \vec{E})$, lorsque \mathcal{X} est un filtre convergeant dans E . Compte tenu de la partie a, cela résulte immédiatement de l'expression donnée au cours de la démonstration de la proposition 6, pour tout point x de E , de $D^n(u. [g, f])(x)$.

c) Soient $\mathcal{G} \downarrow C^k(E_1, E)$ et $\mathcal{U}\mathcal{F} \downarrow C^k(E_2, E)$. De même $\tilde{u}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ converge vers 0 dans $C^k(E_3, E)$. ∇

THEOREME 4. Soient E, F, G trois eqlc. L'application de composition de $C^k(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$ est C^0 (c'est-à-dire continue).

Δ . Compte tenu de la formule de Ver Eecke qui donne les k premières différentielles de $g.f$ en fonction des k premières différentielles de g et f (voir proposition 6), la proposition est évidente. ∇

Désormais E, F, G sont des eqlc. On supposera toujours F équilibré. Convenons aussi de désigner par e l'application d'évaluation de $L(\vec{G}, \vec{F}) \times \vec{F}$ vers \vec{G} , par e' l'application d'évaluation de $L(L(\vec{G}, \vec{F}), \vec{F}) \times \vec{F}$ vers $L(\vec{G}, \vec{F})$, et enfin par b l'application de composition de $L(\vec{G}, \vec{F}) \times L(\vec{F}, \vec{E})$ vers $L(\vec{G}, \vec{E})$. Alors, convenons que \tilde{e}, \tilde{e}' , et \tilde{b} seront les applications associées à e, e' et b de la même manière que dans la proposition 11 on associe \tilde{u} à u . Notons enfin que c désignera toujours l'application de composition de $C^k(G, F) \times C^k(F, E)$ ou de $C^{k+p}(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$, tandis que c' sera l'application de composition de $C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), E)$.

PROPOSITION 12. Soit g un élément de $C^{k+1}(G, F)$. Désignons par g_* l'application de $C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$ définie par $f \rightarrow g.f$. C'est une application différentiable en tout point de $C^k(F, E)$ telle que l'on ait $D(g_*)(f). \phi = \tilde{e}(Dg.f, \phi)$ pour tout point f de $C^k(F, E)$ et tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F}, E)$.

Δ . Soit f un point de $C^k(F, E)$. Notons r l'application $Rg_*(f)$ de $C^k(\vec{F}, E)$ vers $C^k(\vec{G}, E)$ définie par:

$$\phi \longrightarrow g.(f+\phi) - g.f - e. [Dg.f, \phi],$$

et prouvons par récurrence sur k que c'est une application tangente à 0 en 0 pour tout f .

a) Supposons que $k=0$. Soient \mathcal{F} et \mathcal{X} des filtres convergeant respectivement dans $C^0(\vec{F}, E)$ et E . Prouvons que $\theta_r(\mathbb{W}, \mathcal{F}).\mathcal{X}$ converge vers 0 dans \vec{G} . Or, pour tout nombre réel t , pour tout ϕ appartenant à $C^0(\vec{F}, E)$ et tout point x de E , $\theta_r(t, \phi).x = \theta Rg(f(x))(t, \phi(x))$, en sorte que $\theta_r(\mathbb{W}, \mathcal{F}).\mathcal{X}$ contient $\theta [Rg(f(\mathcal{X}))].(\mathbb{W}, \mathcal{F}(\mathcal{X}))$. D'après la section 5-3-5 de [2], et compte tenu du fait que pour tout point x de E et tout vecteur b de \vec{E} ,

$$D [Rg(f(x))].b = Dg(f(x+b)) - Dg(f(x)),$$

le filtre $\theta [Rg(f(\mathcal{X}))].(\mathbb{W}, \mathcal{F}(\mathcal{X}))$ contient le filtre convergeant vers 0 dans \vec{G} suivant:

$$[Dg(f(\mathcal{X}) + \mathbb{W}\mathcal{F}(\mathcal{X})) - Dg(f(\mathcal{X}))].\mathcal{F}(\mathcal{X})^{\circ-}.$$

$\theta_r(\mathbb{W}, \mathcal{F}).\mathcal{X}$ contenant un filtre convergeant vers 0 dans \vec{G} converge lui-même vers 0 dans \vec{G} .

b) Supposons l'assertion du début vraie à l'ordre k et prouvons -la à l'ordre $k+1$. Par hypothèse g appartient à $C^{k+2}(G, F)$. Soit \mathcal{F} un filtre convergeant dans $C^{k+1}(\vec{F}, E)$, et prouvons que $\theta_r(\mathbb{W}, \mathcal{F})$ converge vers 0 dans $C^{k+1}(\vec{G}, E)$. Compte tenu de la partie a, il nous suffit de montrer que $D(\theta_r(\mathbb{W}, \mathcal{F}))$ converge vers 0 dans $C^k(L(\vec{G}, \vec{E}), E)$. Rappelons d'abord la définition de l'opérateur Δ dont nous aurons très souvent besoin par la suite. Si f est une application d'un eqlc E_1 vers un eqlc E_2 , on désigne par Δf l'application de $E_1 \times \vec{E}_1$ vers \vec{E}_2 définie par: $(x, b) \longrightarrow f(x+b) - f(x)$. Ceci dit, étant donné un nombre réel t et un élément ϕ de $C^{k+1}(\vec{F}, E)$, calculons la différentielle de $\theta_r(t, \phi)$ en tout point x de E . C'est l'application linéaire continue de \vec{E} vers \vec{G} définie par (si $t \neq 0$):

$$\begin{aligned}
 b \longrightarrow & (1/t)([D g . (f+t\phi)(x) - D g . f(x)] . D f(x)b) \\
 & + [D g . (f+t\phi)(x)] . [D \phi(x)b] \\
 & - D g(f(x)) . [D \phi(x)b] \\
 & - D^2 g(f(x)) . (D f(x)b, \phi(x)).
 \end{aligned}$$

Somme toute

$$\begin{aligned}
 D \theta r(t, \phi)(x) = & \\
 = (1/t)([D g . (f+t\phi) - D g . f - \tilde{e}'(D^{(2)} g . f, t\phi)] (x) . D f(x)) & \\
 + [D g . (f+t\phi) - D g . f] (x) . D \phi(x). &
 \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$D [\theta r(t, \phi)] = \tilde{b}(\theta r'(t, \phi), D f) + \tilde{b}(\Delta((Dg)_*)(f, t\phi), D \phi),$$

r' désignant l'application associée comme au départ à Dg et f , autrement dit l'application de $C^k(\vec{F}, E)$ vers $C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), E)$ définie par:

$$\hat{\phi} \longrightarrow Dg . (f + \hat{\phi}) - Dg . f - \tilde{e}'(D^{(2)} g . f, \hat{\phi}).$$

Il est alors évident que le filtre $D [\theta r(\mathbb{U}, \mathcal{F})]$ contient le filtre

$$\tilde{b}(\theta r'(\mathbb{U}, \mathcal{F}), D f) + \tilde{b}(\Delta((Dg)_*)(f, \mathbb{U}\mathcal{F}), D \mathcal{F}).$$

Vu l'hypothèse de récurrence, l'application $(Dg)_*$ de $C^k(F, E)$ vers $C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), E)$ définie par $\hat{f} \longrightarrow Dg . \hat{f}$ est différentiable en tout point de $C^k(F, E)$. Comme elle est en particulier différentiable en f , le filtre $\theta r'(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ converge vers 0 dans $C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), E)$. De plus la différentielle de $(Dg)_*$ est continue de $C^k(F, E)$ vers $L(C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), E), C^k(\vec{F}, E))$ comme on le prouve facilement. On en déduit que $(Dg)_*$ est une application C^0 . Il est alors immédiat que $\Delta((Dg)_*)(f, \mathbb{U}\mathcal{F})$ converge vers 0 dans l'espace $C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), E)$. Comme \tilde{b} est continue,

$$\tilde{b}(\theta r'(\mathbb{U}, \mathcal{F}), D f) + \tilde{b}(\Delta((Dg)_*)(f, \mathbb{U}\mathcal{F}), D \mathcal{F})$$

converge vers 0 dans $C^k(L(\vec{G}, \vec{E}), E)$ ainsi que $D [\theta r(\mathbb{U}, \mathcal{F})] . \nabla$

On voit facilement que g_* est une application C^1 de $C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$.

COROLLAIRE. Si g appartient à $C^{k+p}(G, F)$, alors g_* est C^p .

Δ . On vient de montrer la proposition lorsque $p=1$. Admettant maintenant la proposition à l'ordre p , on la démontre facilement à l'ordre $p+1$. En effet, on prouve que $D(g_*)$ est C^p . ∇

Admettons que l'assertion indiquée au début du chapitre sur la différentiabilité de la composition soit vraie lorsque G est un espace vectoriel admissible. Il résulte immédiatement du corollaire précédent qu'elle est encore vraie lorsque G est un espace affine admissible. Ceci explique que désormais G sera toujours supposé espace vectoriel admissible.

Convenons de désigner par c_2 l'application de $C^k(F, E)$ vers l'espace $L(C^k(G, E), C^{k+1}(G, F))$ (ou vers $L(C^k(G, E), C^{k+p}(G, F))$ si $p > 0$) définie par $c_2(f) = f^*$, où f^* est donné par $f^*(g) = g \cdot f$ pour tout élément g de $C^{k+1}(G, F)$.

THEOREME 5. *L'application de composition de $C^{k+1}(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$, c , est différentiable en tout point de l'espace produit $C^{k+1}(G, F) \times C^k(F, E)$, et sa différentielle en (g, f) est telle que $Dc(g, f) \cdot (\psi, \phi) = \tilde{e}(Dg \cdot f, \phi) + \psi \cdot f$ pour tout couple (ψ, ϕ) de vecteurs de $C^{k+1}(G, F) \times C^k(\vec{F}, E)$.*

Δ . c est partiellement continûment-dérivable en tout point (g, f) de $C^{k+1}(G, F) \times C^k(F, E)$. En effet, l'application f^* est linéaire continue de $C^{k+1}(G, F)$ vers $C^k(G, E)$, donc est continûment-dérivable en tout point de $C^{k+1}(G, F)$. Quant à l'application g_* de $C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$, on a démontré dans la proposition 12 qu'elle était différentiable en tout point de $C^k(F, E)$. Comme les différentielles partielles D_1c et D_2c sont continues de $C^{k+1}(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $L_\lambda(C^k(G, E), C^{k+1}(G, F))$ et $L_\lambda(C^k(G, E), C^k(F, E))$ respectivement, d'après les propositions 8 et 2, c est B-différentiable. ∇

Nous allons maintenant prouver que c_2 est continue de $C^k(F, E)$ vers $L(C^k(G, E), C^{k+1}(G, F))$.

LEMME 1. Soient \mathcal{G} un filtre quasi-borné de $C^{k+1}(G, F)$, \mathcal{F} un filtre convergeant vers 0 dans $C^k(\overrightarrow{F}, E)$ et f un élément de $C^k(F, E)$. Alors le filtre $R(\mathcal{G}_*)(f)$. \mathcal{F} converge vers 0 dans $C^k(G, E)$.

Δ . Le filtre $[R(\mathcal{G}_*)(f)] \cdot \mathcal{F}^o$ contient $(D[R(\mathcal{G}_*)(f)] \mathcal{F}^o \cdot \mathcal{F}^o)^{\circ-}$. Ceci dit,

$$D[R(g_*)(f)](\phi) = D(g_*)(f + \phi) - D(g_*)(f)$$

pour tout g appartenant à $C^{k+1}(G, F)$ et tout élément ϕ de $C^k(\overrightarrow{F}, E)$. Pour tout élément $\hat{\phi}$ de $C^k(\overrightarrow{F}, E)$,

$$\begin{aligned} D[R(g_*)(f)](\phi) \cdot \hat{\phi} &= \tilde{e}(Dg \cdot (f + \phi), \hat{\phi}) - \tilde{e}(Dg \cdot f, \hat{\phi}) \\ &= \tilde{e}(Dg \cdot (f + \phi) - Dg \cdot f, \hat{\phi}). \end{aligned}$$

On en déduit que $(D[R(\mathcal{G}_*)(f)] \mathcal{F}^o \cdot \mathcal{F}^o)^{\circ-}$ contient le filtre suivant:

$$\tilde{e}(D\mathcal{G} \cdot (f + \mathcal{F}^o) - D\mathcal{G} \cdot f, \mathcal{F}^o)^{\circ-}$$

Il converge donc vers 0 dans $C^k(G, E)$. Il est alors immédiat que les filtres $[R(\mathcal{G}_*)(f)] \cdot \mathcal{F}^o$ et $[R(\mathcal{G}_*)(f)] \cdot \mathcal{F}$ convergent vers 0 dans $C^k(G, E)$. ∇

PROPOSITION 13. c_2 est continue de $C^k(F, E)$ vers $L(C^k(G, E), C^{k+1}(G, F))$.

Δ . Soient \mathcal{G} un filtre quasi-borné de $C^{k+1}(G, F)$, \mathcal{F} un filtre convergeant vers 0 dans $C^k(\overrightarrow{F}, E)$ et f un élément de $C^k(F, E)$. Prouvons que le filtre $\Delta_{c_2}(f, \mathcal{F}) \cdot \mathcal{G}$ converge vers 0 dans $C^k(G, E)$. Comme, pour tous ψ et ϕ éléments de $C^{k+1}(G, F)$ et $C^k(\overrightarrow{F}, E)$,

$$\Delta_{c_2}(f, \phi) \cdot \psi = \psi \cdot (f + \phi) - \psi \cdot f = \tilde{e}(D\psi \cdot f, \phi) + R(\psi_*)(f) \cdot \phi,$$

le filtre $\Delta_{c_2}(f, \mathcal{F}) \cdot \mathcal{G}$ contient $\tilde{e}(D\mathcal{G} \cdot f, \mathcal{F}) + R(\mathcal{G}_*)(f) \cdot \mathcal{F}$. Compte tenu du lemme précédent, on en déduit que le filtre $\Delta_{c_2}(f, \mathcal{F}) \cdot \mathcal{G}$ converge vers 0 dans $C^k(G, E)$. ∇

THEOREME 6. c est une application C^1 de $C^{k+1}(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$.

Δ . C'est une conséquence immédiate des théorème 5 et proposition 13. ∇

Nous allons maintenant démontrer que c_2 est une application C^p (où $p \geq 0$) de $C^k(F, E)$ vers $L(C^k(G, E), C^{k+p+1}(G, F))$.

LEMME 1. Soit f un point de $C^k(F, E)$. Pour tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F}, E)$, convenons de désigner par $\hat{r}(\phi)$ l'application de $C^{k+2}(G, F)$ vers $C^k(G, E)$ donnée par

$$\hat{r}(\phi) \cdot \psi = R(\psi_*)(f) \cdot \phi = \psi \cdot (f + \phi) - \psi \cdot f - \tilde{e}(D\psi \cdot f, \phi)$$

pour tout élément ψ de $C^{k+2}(G, F)$. Si \mathcal{G} est un filtre quasi-borné de $C^{k+2}(G, F)$ et \mathcal{F} un filtre convergent de $C^k(\vec{F}, E)$, alors le filtre $\theta \hat{r}(\mathbb{W}, \mathcal{F}) \cdot \mathcal{G}$ converge vers 0 dans $C^k(G, E)$.

Δ . Soit \hat{c}_2 l'application de $C^k(F, E)$ vers $L(C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), E), C^{k+1}(L(\vec{G}, \vec{F}), F))$ donnée par $\hat{c}_2(\hat{f}) \cdot g' = g' \cdot \hat{f}$ pour tout \hat{f} appartenant à $C^k(F, E)$ et tout élément g' de $C^{k+1}(L(\vec{G}, \vec{F}), F)$. C'est une application continue (voir proposition 13). D'après la section 5-3-5 de [2], le filtre $\theta \hat{r}(\mathbb{W}, \mathcal{F}) \cdot \mathcal{G}$ contenant le filtre $\theta R(\mathcal{G}_*)(f) \cdot (\mathbb{W}, \mathcal{F})$ contient aussi $[D [R(\mathcal{G}_*)(f)] (\mathbb{W}, \mathcal{F}) \cdot \mathcal{F}]^{\circ-}$

Remarquons que

$$\begin{aligned} D [R(\psi_*)(f)] (\phi_1) \cdot \phi_2 &= \Delta D(\psi_*)(f, \phi_1) \cdot \phi_2 \\ &= \tilde{e}(\Delta((D\psi)_*)(f, \phi_1), \phi_2) \end{aligned}$$

pour tout élément ψ de $C^{k+2}(G, F)$ et tous ϕ_1, ϕ_2 appartenant à $C^k(\vec{F}, E)$. Or $\Delta((D\psi)_*)(f, \phi_1) = \Delta \hat{c}_2(f, \phi_1) \cdot D\psi$, en sorte que $D [R(\psi_*)(f)] (\phi_1) \cdot \phi_2$ est l'élément de $C^k(G, E)$ suivant:

$$\tilde{e}(\Delta \hat{c}_2(f, \phi_1) \cdot D\psi, \phi_2).$$

D'après ce qui précède le filtre $[D [R(\mathcal{G}_*)(f)] (\mathbb{W}, \mathcal{F}) \cdot \mathcal{F}]^{\circ-}$ contient le filtre $\tilde{e}(\Delta \hat{c}_2(f, \mathbb{W}, \mathcal{F}) \cdot D\mathcal{G}, \mathcal{F})^{\circ-}$. Il converge donc vers 0 dans $C^k(G, E)$, ainsi que le filtre $\theta \hat{r}(\mathbb{W}, \mathcal{F}) \cdot \mathcal{G}$. ∇

LEMME 2. c_2 est une application C^1 de $C^k(F, E)$ vers $L(C^k(G, E), C^{k+2}(G, F))$.

Δ . a) Commençons par démontrer que c_2 est différentiable en tout point de $C^k(F, E)$. Soit f un élément arbitraire de $C^k(F, E)$, et prouvons que c_2 est différentiable en f . Compte tenu de

$$(c_2(f + \phi) - c_2(f)) \cdot \psi = \tilde{e}(D\psi \cdot f, \phi) + R(\psi_*)(f) \cdot \phi$$

pour tout ψ appartenant à $C^{k+2}(G, F)$ et tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F}, E)$, il nous suffit de prouver que l'application $Dc_2(f)$ de $C^k(\vec{F}, E)$ vers $L(C^k(G, E), C^{k+2}(G, F))$ donnée par $Dc_2(f)(\phi) \cdot \psi = \tilde{e}(D\psi \cdot f, \phi)$ pour tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F}, E)$ et tout point ψ de $C^{k+2}(G, F)$ est continue, l'application $Rc_2(f)$ de $C^k(\vec{F}, E)$ vers $L(C^k(G, E), C^{k+2}(G, F))$ donnée par $Rc_2(f)(\phi) \cdot \psi = R(\psi_*)(f) \cdot \phi$ pour tout point ψ de $C^{k+2}(G, F)$ et tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F}, E)$ étant tangente à 0 en 0 d'après le lemme 1. Or il est immédiat que $Dc_2(f)$ est continue.

b) Nous allons maintenant démontrer que la différentielle Dc_2 de c_2 est une application continue de $C^k(F, E)$ vers l'espace suivant:

$$L(L(C^k(G, E), C^{k+2}(G, F)), C^k(\vec{F}, E)).$$

Soient \mathcal{G} un filtre quasi-borné de $C^{k+2}(G, F)$, \mathcal{B} un filtre quasi-borné de $C^k(\vec{F}, E)$, \mathcal{F} un filtre convergeant vers 0 dans $C^k(\vec{F}, E)$, et f un élément de $C^k(F, E)$. Prouvons que $[Dc_2(f+\mathcal{F}) - Dc_2(f)](\mathcal{B}) \cdot \mathcal{G}$ converge vers 0 dans $C^k(G, E)$. Pour tout point ψ de $C^{k+2}(G, F)$ et tous vecteurs ϕ et $\hat{\phi}$ de $C^k(\vec{F}, E)$,

$$[Dc_2(f+\phi) - Dc_2(f)](\hat{\phi}) \cdot \psi = \tilde{e}(D\psi \cdot (f+\phi) - D\psi \cdot f, \hat{\phi}).$$

Or

$$D\psi \cdot (f+\phi) - D\psi \cdot f = \tilde{e}'(D^{(2)}\psi \cdot f, \phi) + R((D\psi)_*)(f) \cdot \phi$$

d'après la proposition 12. On en déduit

$$\begin{aligned} & [Dc_2(f+\phi) - Dc_2(f)](\hat{\phi}) \cdot \psi = \\ & = \tilde{e}(\tilde{e}'(D^{(2)}\psi \cdot f, \phi) + R((D\psi)_*)(f) \cdot \phi, \hat{\phi}). \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que le filtre $[Dc_2(f+\mathcal{F}) - Dc_2(f)](\mathcal{B}) \cdot \mathcal{G}$ contient $\tilde{e}(\tilde{e}'(D^{(2)}\mathcal{G} \cdot f, \mathcal{F}) + R((D\mathcal{G})_*)(f) \cdot \mathcal{F}, \mathcal{B})$. Or ce dernier filtre converge vers 0 d'après le lemme 1. ∇

PROPOSITION 14. c_2 est une application C^p de $C^k(F, E)$ vers l'espace $L(C^k(G, E), C^{k+p+1}(G, F))$.

Δ . Nous avons déjà démontré la proposition lorsque $p=0$. Supposons-la vraie à l'ordre p et prouvons-la à l'ordre $p+1$. Pour simplifier nous

poserons

$$E_1 = C^k(F, E), \quad E_2 = C^{k+p+2}(G, F), \quad E_3 = C^k(G, E), \\ E_4 = C^{k+p+1}(L(G, \vec{F}), F) \quad \text{et} \quad E_5 = C^k(L(G, \vec{F}), E).$$

En vertu du lemme 2, c_2 est une application C^1 de E_1 vers $L(E_3, E_2)$. Prouvons que Dc_2 est une application C^p de E_1 vers $L(L(E_3, E_2), \vec{E}_1)$, ou mieux, que l'application \bar{c}_2 de E_1 vers $L(E_3; E_2, \vec{E}_1): f \rightarrow \bar{c}_2(f)$ définie par

$$(\psi, \phi) \rightarrow (Dc_2(f). \phi). \psi = \tilde{e}(D\psi. f, \phi)$$

est C^p . Soient π_1 et π_2 les projections de $E_2 \times \vec{E}_1$ sur \vec{E}_1 et E_2 respectivement. Convenons de désigner par \hat{e} l'application de l'espace produit $L(E_5, E_2) \times L(\vec{E}_1, \vec{E}_1)$ vers $L(E_3; E_2, \vec{E}_1)$ définie par:

$$(\rho', \rho) \rightarrow \tilde{e}. [\rho'. \pi_2, \rho. \pi_1].$$

C'est une application bilinéaire équable. Soit c'_2 l'application de E_1 vers $L(E_5, E_4)$ donnée par $c'_2(f). g' = g'. f$. C'est une fonction C^p , la proposition ayant été supposée vraie à l'ordre p . Soit par ailleurs D l'application linéaire continue $g \rightarrow Dg$ de E_2 dans E_4 . L'application D^* de $L(E_5, E_4)$ vers $L(E_5, E_2)$ définie par $l \rightarrow l. D$ est aussi linéaire continue donc C^∞ . Ceci dit, notons que $\bar{c}_2(f) = \tilde{e}. [c'_2(f). D. \pi_2, \pi_1]$ pour tout élément f de E_1 , en sorte que $\bar{c}_2 = \hat{e}. [\tau_2, \tau_1]$, si τ_1 est l'application de E_1 vers $L(\vec{E}_1, \vec{E}_1)$ constante sur l'identité de \vec{E}_1 et si $\tau_2 = D^*. c'_2$. On en déduit que \bar{c}_2 est C^p . ∇

THEOREME 7. L'application composition c de $C^{k+p}(G, F) \times C^k(F, E)$ vers l'espace $C^k(G, E)$ est C^p .

Δ . Nous avons déjà démontré le théorème lorsque $p=0$ (voir théorème 4). Supposons le théorème vrai à l'ordre p et prouvons-le à l'ordre $p+1$. Posons pour simplifier

$$E_1 = C^k(F, E), \quad E_2 = C^{k+p+1}(G, F), \quad E_3 = C^k(G, E), \\ E_4 = C^{k+p}(L(G, \vec{F}), F) \quad \text{et} \quad E_5 = C^k(L(G, \vec{F}), E).$$

On sait (voir théorème 6) que l'application composition c de $E_2 \times E_1$

vers E_3 est C^1 . Prouvons que sa différentielle Dc est une application C^p de $E_2 \times E_1$ vers $L(E_3, E_2 \times \vec{E}_1)$. Convenons de désigner par π_2 et π_1 les projections de $E_2 \times \vec{E}_1$ sur E_2 et \vec{E}_1 respectivement. Soient π_2^* et π_1^* les applications de $L(E_3, E_2)$ et $L(E_3, \vec{E}_1)$ vers l'espace $L(E_3, E_2 \times \vec{E}_1)$ définies par $l_2 \rightarrow l_2 \cdot \pi_2$ et par $l_1 \rightarrow l_1 \cdot \pi_1$. Ce sont des applications linéaires continues. \tilde{e} appartient à l'espace $L(E_3; E_2, E_1)$. Nous désignerons par \bar{e} l'élément de l'espace $L(L(E_3, E_2), E_1)$ qui lui est associé.

L'application composition de $E_2 \times E_1$ vers E_3 , que nous écrirons c' , est C^p , le théorème ayant été supposé vrai à l'ordre p . On sait que

$$Dc(g, f) \cdot (\psi, \phi) = \tilde{e}(Dg \cdot f, \phi) + \psi \cdot f$$

pour tous points g et f de E_2 et E_1 ainsi que pour tous vecteurs ψ et ϕ de E_2 et \vec{E}_1 . On en déduit

$$Dc = \pi_1^* \cdot \bar{e} \cdot c' \cdot (D \times j) + \pi_2^* \cdot c_2 \cdot \pi_1,$$

où j désigne l'identité de E_1 , D l'application canonique de E_2 vers E_2 qui à une fonction associe sa différentielle. Ce qui précède montre que Dc est une application C^p , puisque c_2 est une application C^p en vertu de la proposition 14. ∇

On a ainsi démontré que l'application composition de l'espace $C^{k+p}(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$ est C^p si E, F, G sont des espaces affines admissibles et si F est équable.

Désormais E, F, G désigneront des espaces affines admissibles et X un ouvert de E . On supposera toujours F équable.

On aurait pu en fait prouver que l'application composition de $C^{k+p}(G, F) \times C^k(F, X)$ vers $C^k(G, X)$ est C^p , et même, si \vec{E} est de dimension finie, que l'application composition de l'espace produit $C^{k+p}(G, Y) \times C^k(Y, X)$ vers $C^k(G, X)$ est C^p , où $C^k(Y, X)$ désigne l'ouvert de $C^k(F, X)$ formé des fonctions à valeurs dans Y , si Y est un ouvert de F .

Ceci dit, on prouve sensiblement comme dans [2] les résultats suivants:

a) L'application d'évaluation de $C^k(G, Y) \times Y$ dans G est C^k .

b) L'application composition de $C^\infty(G, F) \times C^\infty(F, X)$ vers $C^\infty(G, X)$ est C^∞ .

c) θ est un isomorphisme linéaire continu de $C^\infty(G, X \times Y)$ sur $C^\infty(C^\infty(G, Y), X)$ pourvu que E comme F soit équable, θ désignant l'application de $C^\infty(G, X \times Y)$ vers $C^\infty(C^\infty(G, Y), X)$ donnée par $\theta f(x).y = f(x, y)$. On suppose ici E, F, G espaces vectoriels admissibles.

On démontre facilement à l'aide des lemmes qui précèdent le théorème de corrélation que, si f est une application C^∞ de l'eqlc E_1 vers l'eqlc E_2 , alors f est une application C^∞ de E_1^* vers E_2^* (où E_1 et E_2 sont des eqlc admissibles arbitraires). On en déduit que l'application composition de $C^\infty^*(G, F) \times C^\infty^*(F, E)$ vers $C^\infty^*(G, E)$ est C^∞ et que $C^\infty^*(G, E \times F)$ et $C^\infty^*(C^\infty^*(G, F), E)$ sont isomorphes, si E, F, G sont des espaces vectoriels admissibles équables. Il en découle immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 15. Soit \overline{C}^∞ la catégorie des applications C^∞ entre espaces vectoriels admissibles équables, et soit D le foncteur de $\overline{C}^\infty \times (\overline{C}^\infty)^*$ vers \overline{C}^∞ surjacent au foncteur homomorphismes tel que $D(F, E) = C^\infty^*(F, E)$ pour tout couple d'objets de \overline{C}^∞ . Alors (\overline{C}^∞, D) est une catégorie tensoriellement dominée et \overline{C}^∞ est une catégorie cartésienne fermée (voir [6]).

6. THEOREME DE FROBENIUS

Suivant une méthode indiquée par J. A. Leslie (voir [7]), nous allons généraliser le théorème de Frobenius.

LEMME 1. Soit F un espace de Banach. Soient $S_1 = [0, a_1]$, où $a_1 > 0$, un segment de \mathbf{R} et V une boule ouverte de F de centre 0 de rayon r , et soit \tilde{T} une application lipschitzienne et C^n de $S_1 \times V$ vers $L(F, \mathbf{R})$.

Désignons par T l'application de $S_1 \times V \times \mathbf{R}$ dans F définie par $(x, y, b) \rightarrow \tilde{T}(x, y).b$. Supposons $T(S_1 \times V \times S_1)$ borné dans F . Alors il existe une unique application C^{n+1} , disons f , de $S_0 = [0, a_0]$, où $a_0 = \text{Sup} \{ d \leq a_1 \mid T(S_1 \times V \times [0, d]) \text{ inclus dans } V/2 \}$, dans V telle que $f(0) = 0$ et que $Df(x) = \tilde{T}(x, f(x))$ pour tout élément x de S_0 .

Δ . Posons

$$L = \text{Sup} \{ \|\tilde{T}(x, y)\| \mid (x, y) \in S_0 \times V \}.$$

On a $a_0 \cdot L \leq r/2$. En effet

$$a_0 \cdot L = \text{Sup} \{ \|T(x, y, a_0)\| \mid (x, y) \in S_0 \times V \}$$

et $T(x, y, a_0)$ appartient à l'adhérence de $V/2$ pour tout élément (x, y) de $S_0 \times V$, puisque $T(x, y, d)$ appartient à $V/2$ quel que soit $0 < d < a_0$.

Comme $a_0 \cdot L < r$, d'après le théorème de Cauchy (voir [8]), il existe une unique application C^1 de S_0 dans V telle que $f(0) = 0$ et que $Df(x) = \tilde{T}(x, f(x))$ pour tout élément x de S_0 . On prouve par récurrence que f est une application C^{n+1} . ∇

LEMME 2. Soient F un espace de Banach et S l'espace de Banach qui a \mathbf{R}^2 pour ensemble sous-jacent et dont la norme est définie par $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ quel que soit (x, y) élément de \mathbf{R}^2 . Posons $S_1 = [0, a] \times [0, b]$ (où $a > 0$ et $b > 0$); soit V une boule ouverte de F de centre 0 de rayon β , et soit \tilde{T} une application lipschitzienne et C^n de $S_1 \times V$ dans $L(F, S)$. Désignons par T l'application de $S_1 \times V \times S$ dans F définie par $((x, y), z, b) \rightarrow \tilde{T}((x, y), z).b$. Supposons que $T(S_1 \times V \times S_1)$ soit borné dans F . Enfin supposons que l'expression

$$\begin{aligned} & (\partial \tilde{T} / \partial S [(x, y), z].k).b \\ & + (\partial \tilde{T} / \partial F [(x, y), z].\tilde{T} [(x, y), z].k).b \end{aligned}$$

soit symétrique en b et k pour tout élément $((x, y), z)$ de $S_1 \times V$. Alors il existe une unique application C^{n+1} , disons f , de l'espace $S_0 = [0, a_0] \times [0, a_0]$ dans V telle que $f(0) = 0$ et que pour tout

élément (x, y) de S_0 , $Df(x, y) = \tilde{T}((x, y), f(x, y))$ (avec $a_0 = \text{Sup} \{ \text{Inf} \{ 1/2 \cdot d, a, b \} \mid T(S_1 \times V \times [0, d]^2 \subset V/4) \}$).

Δ . Pour tout élément (x, y) de S_0 , nous désignerons par $\tilde{T}(x, y)$ l'application lipschitzienne et C^1 de $I \times V$, où $I = [0, 1]$, dans $L(F, \mathbf{R})$ donnée par

$$\tilde{T}(x, y)(\xi, z) \cdot 1 = T(\xi(x, y), z, (x, y))$$

pour tout point (ξ, z) de $I \times V$, et par $T(x, y)$ l'application de $I \times V \times \mathbf{R}$ dans F canoniquement associée à $\tilde{T}(x, y)$.

Remarquons que, si f est une application C^1 de S_0 dans V telle que $f(0) = 0$ et que $Df(b) = \tilde{T}(b, f(b))$ pour tout élément b de S_0 , alors l'application $g(x, y)$ de I dans V définie par $\xi \rightarrow f(\xi(x, y))$ est la solution de l'équation différentielle $Dz = \tilde{T}(x, y)(\xi, z)$ qui s'annule en 0 . On en déduit que $f(x, y) = g(x, y)1$ est parfaitement déterminé. Donc s'il existe une application C^1 , disons f , de S_0 dans V telle que $f(0) = 0$ et que $Df(b) = \tilde{T}(b, f(b))$ pour tout élément b de S_0 , alors cette application est unique.

L'application $\tilde{T}(x, y)$ de $I \times V$ dans $L(F, \mathbf{R})$ est lipschitzienne et C^1 . De plus $T(x, y)(I \times V \times I)$ est borné dans F . Enfin $T(x, y)(I \times V \times I)$, qui est inclus dans $T(S_1 \times V \times S_0)$, est inclus dans l'adhérence de $V/4$ donc dans $V/2$. D'après le lemme 1, il existe une unique application $g(x, y)$ de I dans V telle que

$$g(x, y)0 = 0 \text{ et que } Dg(x, y)(\xi) \cdot 1 = T(\xi(x, y), g(x, y)\xi, (x, y))$$

pour tout élément ξ de I .

Posons

$$L = \text{Sup} \{ \|\tilde{T}((x, y), z)\| \mid ((x, y), z) \in S_0 \times V \},$$

et prouvons que $a_0 \cdot 2L < \beta$. Si d est un nombre réel positif non nul tel que $T(S_1 \times V \times [0, d]^2) = dT(S_1 \times V \times I^2)$ soit inclus dans $V/4$, alors $T(S_1 \times V \times I^2)$ est inclus dans $V/4d$. On en déduit immédiatement que, si B désigne la boule unité de centre 0 dans S , alors $\tilde{T}(S_1 \times V) \cdot B$, donc $\tilde{T}(S_0 \times V) \cdot B$, est inclus dans $V/2d$, en sorte que $L \leq \beta/2d$. Ainsi $2dL$ est inférieur ou égal à β pour tout $d < 2a_0$; comme $4a_0L \leq \beta$, on a $2a_0L < \beta$.

On prouve alors (grâce au même raisonnement que celui utilisé dans [9] pour démontrer le théorème de Frobenius) que l'application f de S_0 dans V , définie par $(x, y) \rightarrow g(x, y)1$, est une application C^1 telle que $f(0) = 0$ et que $Df(x, y) = \tilde{T}((x, y), f(x, y))$ pour tout point (x, y) de S_0 . ∇

THEOREME DE FROBENIUS. *Si G est un espace localement-convexe et z un point de G , convenons d'appeler disque en z tout translaté en z d'un voisinage convexe équilibré de 0 dans G .*

Soient F un espace de Banach et E un espace localement-convexe séparé. Soient \tilde{U} et \tilde{V} des disques ouverts de E et F respectivement en x_0 et y_0 , et \tilde{T} une application C^n , où $n \geq 1$, de $\tilde{U} \times \tilde{V}$ dans $L(F, E)$. Supposons que l'expression

$$[\partial \tilde{T} / \partial E(x, y).k] . b + [\partial \tilde{T} / \partial F(x, y) . \tilde{T}(x, y).k] . b$$

soit symétrique relativement à b et k pour tout point (x, y) de $\tilde{U} \times \tilde{V}$. Alors il existe une unique application C^{n+1} , disons f , d'un disque ouvert U_0 de E en x_0 , inclus dans \tilde{U} , vers \tilde{V} telle que $f(x_0) = y_0$ et que $Df(x) = \tilde{T}(x, f(x))$ pour tout point x de U_0 .

Δ . Nous supposons pour simplifier que $x_0 = 0$ et que $y_0 = 0$. Désignons par T l'application de $\tilde{U} \times \tilde{V} \times E$ dans F canoniquement associée à \tilde{T} .

Par hypothèse $\partial \tilde{T} / \partial F$ est une application C^0 de $\tilde{U} \times \tilde{V}$ vers l'espace $L(L(F, E), F)$. On en déduit qu'il existe des disques ouverts \hat{U} et V de E et F , inclus dans \tilde{U} et \tilde{V} , tels que $[\partial \tilde{T} / \partial F(\hat{U} \times V).B_1] . \hat{U}$ soit inclus dans une boule fermée B_k (de rayon k), où B_1 désigne la boule fermée de F de centre 0 et de rayon 1 . On supposera que V est une boule ouverte, pour simplifier. Comme T est une application continue de $\hat{U} \times V \times E$ dans F , on peut supposer que $T(\hat{U} \times V \times \hat{U})$ est borné dans F . Soit alors r un réel positif non nul tel que $rT(\hat{U} \times V \times \hat{U})$ soit inclus dans $V/8$. Nous désignerons par U l'ensemble $\hat{U} \cap r\hat{U}$ et par U_0 l'ensemble $U/4$.

Pour tout élément x de U , notons \tilde{T}_x l'application de $I \times V$ dans l'espace $L(F, \mathbf{R})$ donnée par $\tilde{T}_x(\tau, \alpha).1 = T(\tau x, \alpha, x)$ quel que soit

l'élément (τ, α) de $I \times V$. C'est une application lipschitzienne et C^n de $I \times V$ dans $L(F, \mathbf{R})$ telle que $T_x(I \times V \times I)$ soit inclus dans $T(\hat{U} \times V \times U)$ donc dans $rT(\hat{U} \times V \times \hat{U})$ et dans $V/2$, si T_x désigne l'application de $I \times V \times \mathbf{R}$ dans F canoniquement associée à \tilde{T}_x . D'après le lemme 1, il existe une unique fonction C^{n+1} , disons g_x , de I vers V telle que $g_x(0) = 0$ et que $Dg_x(\tau) = \tilde{T}_x(\tau, g_x(\tau))$ pour tout élément τ de I . Il est évident que $g_x(t) = \int_0^t T_x(\tau, g_x(\tau), 1) d\tau$ pour tout t appartenant à I . On en déduit

$$g_x(at) = \int_0^{at} T_x(\tau, g_x(\tau), 1) d\tau = \int_0^t a T_x(a\tau, g_x(a\tau), 1) d\tau,$$

donc

$$g_x(at) = \int_0^t T_{ax}(\tau, g_x(a\tau), 1) d\tau \text{ pour tous éléments } a \text{ et } t \text{ de } I.$$

Mais alors, si b est l'application de I dans V définie par $t \rightarrow g_x(at)$, b est une application C^{n+1} telle que $b(0) = 0$ et que, pour tout t appartenant à I , $Db(t) = \tilde{T}_{ax}(t, b(t))$. On en déduit $b = g_{ax}$. En conséquence $g_x(at) = g_{ax}(t)$ pour tout point x de U et tous éléments a et t de I . Désignons par f l'application de U dans V définie par $x \rightarrow g_x(1)$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 T_x(\tau, g_x(\tau), 1) d\tau = \int_0^1 T_x(\tau, g_{\tau x}(1), 1) d\tau \\ &= \int_0^1 T_x(\tau, f(\tau x), 1) d\tau. \end{aligned}$$

Imaginons qu'il existe une fonction C^{n+1} , disons f' , de U_0 dans \tilde{V} telle que $f'(0) = 0$ et que $Df'(x) = \tilde{T}(x, f'(x))$ pour tout élément x de U_0 . Pour tout élément x de U_0 , désignons par g'_x l'application de I dans \tilde{V} définie par $t \rightarrow f'(tx)$. C'est une application C^{n+1} telle que $g'_x(0) = 0$ et que $Dg'_x(\tau) = \tilde{T}_x(\tau, g'_x(\tau))$ pour tout τ de I . On en déduit $g'_x = g_x$, en sorte que $f'(x) = f(x)$.

En conclusion, si f est une application C^{n+1} de U_0 dans \tilde{V} telle que $f(0) = 0$ et que $Df(x) = \tilde{T}(x, f(x))$ pour tout élément x de U_0 , alors c'est l'unique telle application.

Prouvons maintenant que f est une application C^1 de U_0 dans V telle que $f(0) = 0$ et que $Df(x) = \tilde{T}(x, f(x))$ pour tout élément x de U_0 . Par récurrence on pourrait alors facilement prouver que c'est une fonc-

tion C^{n+1} . Soient x_1 et x_2 deux éléments arbitraires de $U/2$. Désignons par A l'application de $I^2 \times V \times \mathbf{R}^2$ dans F :

$$((s, t), z, (u, v)) \rightarrow T(sx_1 + tx_2, z, ux_1 + vx_2),$$

et par \tilde{A} l'application de $I^2 \times V$ dans $L(F, \mathbf{R}^2)$ canoniquement associée. \tilde{A} est une application lipschitzienne et C^n de $I^2 \times V$ vers $L(F, \mathbf{R}^2)$ isomorphe à F^2 . De plus $A(I^2 \times V \times [0, 2]^2)$ est inclus dans l'ensemble $2A(I^2 \times V \times I^2)$, donc $2T(U \times V \times U)$ et dans $2rT(U \times V \times \hat{U})$. On en déduit que $A(I^2 \times V \times [0, 2]^2)$ est inclus dans $2rT(\hat{U} \times V \times \hat{U})$, donc dans $2V/8$, c'est-à-dire dans $V/4$. D'après le lemme 2, il existe une unique fonction C^{n+1} , disons g , de I^2 dans V telle que

$$g(0, 0) = 0 \text{ et que } Dg(s, t) = \tilde{A}((s, t), g(s, t))$$

pour tout élément (s, t) de I^2 . Pour tout élément (s, t) de I^2 , désignons par $g'_{sx_1+tx_2}$ l'application de I dans V définie par $\tau \rightarrow g(\tau s, \tau t)$. C'est une application C^{n+1} telle que

$$g'_{sx_1+tx_2}(0) = 0 \text{ et que } Dg'_{sx_1+tx_2}(\tau) = \tilde{T}_{sx_1+tx_2}(\tau, g'_{sx_1+tx_2}(\tau))$$

pour tout élément τ de I . Ceci montre que $g'_{sx_1+tx_2} = g_{sx_1+tx_2}$, en sorte que $g(s, t)$ est égal à $f(sx_1 + tx_2)$ pour tout élément (s, t) de I^2 .

En résumé, l'application g de I^2 dans V définie par

$$(s, t) \rightarrow f(sx_1 + tx_2)$$

est une application C^{n+1} telle que

$$g(0, 0) = 0 \text{ et que } Dg(s, t) = \tilde{A}((s, t), g(s, t))$$

pour tout élément (s, t) de I^2 . Il est d'ailleurs évident que:

$$g(s, t) = \int_0^1 A((\tau s, \tau t), g(\tau s, \tau t), (s, t)) d\tau.$$

Ceci dit, si y_1 et y_2 sont des points de U_0 , alors

$$x_1 = y_1 \quad \text{et} \quad x_2 = (y_2 - y_1)$$

sont des éléments de $U/2$. De plus $f(y_2) - f(y_1) = g(1, 1) - g(1, 0)$ est égal à

$$\int_0^1 Dg(1, \sigma) \cdot (0, 1) d\sigma = \int_0^1 \tilde{A}((1, \sigma), g(1, \sigma)) \cdot (0, 1) d\sigma,$$

donc à

$$\begin{aligned} & \int_0^1 T(x_1 + \sigma x_2, f(x_1 + \sigma x_2), x_2) d\sigma = \\ & = \int_0^1 T(y_1 + \sigma(y_2 - y_1), f(y_1 + \sigma(y_2 - y_1)), y_2 - y_1) d\sigma. \end{aligned}$$

On déduit immédiatement de ce qui précède que f est continue de U_0 dans V , car, $\tilde{T}(\hat{U} \times V)$. \hat{U} étant borné dans F et \hat{U} ouvert dans E , $\tilde{T}(\hat{U} \times V)$ est équicontinu. Soient maintenant x un point de U_0 , b un vecteur de E , et t un nombre réel tel que $x + tb$ appartienne à U_0 . D'après ce qui précède, et si $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} & (f(x + tb) - f(x)) / t - T(x, f(x), b) = \\ & = \int_0^1 [T(x + \sigma tb, f(x + \sigma tb), b) - T(x, f(x), b)] d\sigma. \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f(x + tb) - f(x)) / t = T(x, f(x), b) = \tilde{T}(x, f(x)) \cdot b.$$

f est une application B-différentiable sur U_0 telle que $Df(x) = \tilde{T}(x, f(x))$ pour tout point x de U_0 . C'est donc une application C^1 . ∇

7. ESPACES PSEUDO-TOPOLOGIQUES

Nous dirons qu'un espace quasi-topologique X est *pseudo-topologique* ssi un filtre \mathcal{A} sur X converge vers un élément x de X lorsque tout ultrafiltre contenant \mathcal{A} converge vers x . Les pseudo-topologies ont été introduites par Gustave CHOQUET [11], qui a énoncé le théorème suivant pour les espaces topologiques. La démonstration qui va suivre est due à Armando MACHADO (elle figure dans un texte de cet auteur non encore publié).

THEOREME 8. Soient Y un espace pseudo-topologique et X un espace quasi-topologique. Alors $\mathcal{C}_\lambda(Y, X)$ est un espace pseudo-topologique.

Δ . Soit f un élément de $\mathcal{C}(Y, X)$. Soit \mathcal{F} un filtre sur $\mathcal{C}(Y, X)$ ne convergeant pas vers f dans $\mathcal{C}_\lambda(Y, X)$. Nous allons prouver l'existence

d'un ultrafiltre \mathcal{G} contenant \mathcal{F} et ne convergeant pas vers f .

Soit donc \mathcal{X} un filtre convergeant vers un point x dans X , tel que $\mathcal{F}\mathcal{X}$ ne converge pas vers $f(x)$ dans Y . Alors il existe un ultrafiltre \mathcal{Y} contenant $\mathcal{F}\mathcal{X}$ tel que \mathcal{Y} ne converge pas vers $f(x)$. Quels que soient ϕ appartenant à \mathcal{F} , A appartenant à \mathcal{X} et B appartenant à \mathcal{Y} , posons

$$\phi(B, A) = \{ f' \in \phi \mid B \cap f'(A) \neq \emptyset \}.$$

On voit que $\phi(B, A)$ est non vide, puisque $B \cap \phi(A)$, qui appartient à \mathcal{Y} , est non vide. Désignons par \mathcal{F}' le filtre ayant pour base l'ensemble des $\phi(B, A)$. Soit \mathcal{G} un ultrafiltre quelconque contenant \mathcal{F}' donc \mathcal{F} . Raisonnons par l'absurde. Supposons que \mathcal{G} converge vers f dans l'espace $\mathcal{C}_\lambda(Y, X)$. Comme $\mathcal{G}\mathcal{X}$ converge vers $f(x)$ dans Y , le filtre \mathcal{Y} ne contient pas $\mathcal{G}\mathcal{X}$. Il existe donc des éléments $\hat{\phi}$ de \mathcal{G} et A de \mathcal{X} tels que $\hat{\phi}(A)$ n'appartienne pas à \mathcal{Y} . Comme \mathcal{Y} est un ultrafiltre, on voit que $Y - \hat{\phi}(A)$ appartient à \mathcal{Y} . Soit ϕ un élément quelconque de \mathcal{F} . Les ensembles $\hat{\phi}$ et $\phi(Y - \hat{\phi}(A), A)$ sont tous deux des éléments de \mathcal{G} . Si l'on tient compte de $\hat{\phi} \cap \phi(Y - \hat{\phi}(A), A) = \emptyset$, on voit que \emptyset appartient à \mathcal{G} , ce qui est une absurdité. ∇

THEOREME 9. Soient F un espace vectoriel pseudo-topologique et E un espace vectoriel quasi-topologique. Alors $L(F, E)$ est un espace vectoriel pseudo-topologique.

Δ . La démonstration est analogue à celle donnée ci-dessus (où l'on prend $f=0$). ∇

Reprenons les hypothèses du théorème 9. Il est immédiat que $L^{(n)}(F, E)$ et $L^n(F, E)$ sont des espaces vectoriels pseudo-topologiques pour tout entier n .

DEFINITION 7. Nous dirons qu'un espace quasi-topologique X est compact si tout ultrafiltre sur X converge dans X . Lorsque X est pseudo-topologique, on retrouve la notion d'espace compact donnée dans [1].

Soit désormais E un espace vectoriel quasi-localement-convexe.

Nous désignerons par τ la topologie localement-convexe sous-jacente à E et par \mathcal{U} le filtre des voisinages de 0 dans τ . Si ϕ est une partie de E , nous désignerons par $\tilde{\phi}$ son enveloppe convexe équilibrée. Si \mathcal{A} est un filtre sur E , nous désignerons par $\tilde{\mathcal{A}}$ le filtre engendré par les enveloppes convexes équilibrées des éléments de \mathcal{A} .

PROPOSITION 16. Soit B une partie de E et soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de B . Posons $H = \{a_i \mid i \in I\}$. Alors, quel que soit ϕ appartenant à $\mathcal{W}\tilde{B}$, il existe une famille finie $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de \tilde{H} telle que \tilde{H} soit inclus dans $\bigcup_{j \in J} x_j + \phi$.

Δ . Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par B . Pour tout réel δ , $\delta\tilde{B}$ est une partie convexe symétrique absorbante de F . On en déduit que $\mathcal{W}\tilde{B}/F$ est inclus dans le filtre des voisinages de 0 pour la topologie fine de F . Ceci montre que, si G est le sous-espace vectoriel de F engendré par H , alors $\mathcal{W}\tilde{B}/G$ est inclus dans le filtre \mathcal{U}/G des voisinages de 0 pour la topologie canonique de G . Comme \tilde{H} est précompact dans τ , quel que soit V élément de \mathcal{U}/G , il existe une famille finie $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de \tilde{H} telle que \tilde{H} soit inclus dans $\bigcup_{j \in J} x_j + \phi$. On en déduit immédiatement la proposition cherchée. ∇

DEFINITION 8. Nous dirons qu'une partie A de E est *précompacte dans E* ssi on peut trouver un filtre \mathcal{A} convergeant vers 0 dans E (appelé *filtre de A -précompacité*) possédant la propriété suivante: quel que soit ϕ appartenant à \mathcal{A} , il existe une famille finie $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de A telle que A soit inclus dans $\bigcup_{i \in I} a_i + \phi$.

PROPOSITION 17. Supposons que E soit un espace vectoriel admissible. Soit K un ensemble précompact et borné. Alors \tilde{K} est précompact.

Δ . Soit \mathcal{A} un filtre de K -précompacité. Soit θ un élément de $\mathcal{W}\tilde{K} + \mathcal{A}$. Il existe ϕ appartenant à \mathcal{A} , convexe équilibré, et $\delta\tilde{K}$ appartenant à $\mathcal{W}\tilde{K}$ tels que $\delta\tilde{K} + \phi$ soit inclus dans θ . Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de K telle que K soit inclus dans $\bigcup_{i \in I} a_i + \phi$. Posons $H = \{a_i \mid i \in I\}$. On voit que \tilde{K} est inclus dans $\tilde{H} + \phi$. Or, d'après la proposition 16, il existe une famille finie $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de \tilde{H} telle que \tilde{H} soit

inclus dans $\bigcup_{j \in J} x_j + \delta \tilde{K}$. Il est alors évident que \tilde{K} est inclus dans $\bigcup_{j \in J} x_j + (\delta \tilde{K} + \phi)$, donc dans $\bigcup_{j \in J} x_j + \theta$. Comme $\mathcal{W}\tilde{K} + \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{W}K + \tilde{\mathcal{A}}$ converge vers 0 dans E , ceci montre que \tilde{K} est précompact. ∇

PROPOSITION 18. *Supposons toujours E admissible. Alors l'adhérence dans τ de tout précompact de E est précompacte dans E .*

PROPOSITION 19. *Toute partie précompacte A de l'espace vectoriel E qui est complète (au sens de [1]) est compacte.*

Δ . Soit \mathcal{A} un filtre de A -précompacité. Soit \mathcal{X} un ultrafiltre sur A . Soit ϕ un élément de \mathcal{A} et $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de A telle que A soit inclus dans $\bigcup_{i \in I} a_i + \phi$. Puisque \mathcal{X} est un ultrafiltre, l'un au moins des ensembles $a_i + \phi$ appartient à \mathcal{X} . On en déduit que $\phi - \phi$ appartient à $\mathcal{X} - \mathcal{X}$. Ceci montre que $\mathcal{X} - \mathcal{X}$ contient $\mathcal{A} - \mathcal{A}$, donc converge vers 0 dans E . Ainsi le filtre \mathcal{X} converge dans A . ∇

Notons maintenant que, si E est pseudo-topologique et si K est un compact de E , alors τ et la quasi-topologie de E induisent sur K la même quasi-topologie.

PROPOSITION 20. *Supposons E pseudo-topologique. Alors tout compact de E est précompact dans E .*

Δ . Puisque K est τ -précompact, quel que soit ϕ appartenant à \mathcal{U} , il existe une famille finie $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de K telle que K soit inclus dans $\bigcup_{i \in I} a_i + \phi$, donc dans $\bigcup_{i \in I} a_i + \phi \cap (K - K)$. On en déduit alors que $\mathcal{U} / (K - K)$ est un filtre de K -précompacité. ∇

PROPOSITION 21. *Supposons toujours que E soit pseudo-topologique. Tout compact K de E est borné dans E .*

Δ . Il suffit de montrer que toute partie équilibrée compacte de E est bornée dans E . Or une telle partie K , qui est τ -compacte, est aussi τ -bornée. Quel que soit U appartenant à \mathcal{U} , il existe donc $0 < \delta \leq 1$ tel que δK soit inclus dans U et par suite dans $U \cap K$. On en déduit que le filtre \mathcal{U} / K est inclus dans $\mathcal{W}K$, ce qui prouve que $\mathcal{W}K$ converge vers 0 dans E . ∇

THEOREME 10. *Supposons que E soit un espace vectoriel pseudo-topologique admissible complet. Alors l'enveloppe convexe équilibrée fermée dans τ de tout compact de E est compacte dans E .*

Δ . Ce théorème résulte des propositions précédentes. ∇

8. SUR LE THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

Soient G et F deux espaces localement-convexes séparés complets. Soit E un espace localement-convexe séparé. Supposons que le sous-espace de G (resp. F) engendré par tout compact de G (resp. F) soit normable.

Soit f une application C^r ($r \geq 1$, r fini ou infini) d'un ouvert \mathcal{O} de $E \times F$ vers G .

THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES. *Soit U un ouvert de E . Soit ϕ une application continue de U dans F telle que $(x, \phi(x))$ appartienne à \mathcal{O} et que $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout x de U . Supposons que, quel que soit x appartenant à U , $D_2 f(x, \phi(x))$ induise un isomorphisme de tout sous-espace F' de F engendré par un compact de F sur l'espace image $D_2 f(x, \phi(x))F'$. Alors*

a) ϕ est dérivable en tout point de U et dans toute direction. Si $D\phi(x)$ est sa dérivée en x , on a

$$D_2 f(x, \phi(x)) \cdot D\phi(x) + D_1 f(x, \phi(x)) = 0.$$

b) Si E est métrisable, ϕ est une application C^r .

c) Supposons toujours E métrisable. Posons $f^1 = f$. Quel que soit $2 \leq k \leq r$, désignons par f^k l'application de $U \times L^{(k-1)}(F, E)$ dans $L^{(k-1)}(G, E)$ définie par:

$$(x, \theta) \longrightarrow D_2 f^{k-1}(x, D^{(k-2)}\phi(x)) \cdot \theta + D_1 f^{k-1}(x, D^{(k-2)}\phi(x)).$$

Alors $f^k(x, D^{(k)}\phi(x)) = 0$ pour tout x de U .

Δ . Avant de commencer la démonstration, expliquons quelles notations nous utiliserons.

Soit x un point de U et x' un élément de E . Posons $P = \{ \delta > 0 \mid [x, x + \delta x'] \subset U \}$. Soit $\tilde{\phi}$ l'application de P dans F définie par

$$\delta \longrightarrow \phi(x + \delta x') - \phi(x).$$

Soit alors D l'ensemble

$$\{ \delta > 0 \mid \delta \in P, [x, x + \delta x'] \times (\phi(x) + [0, 1] \tilde{\phi}[0, \delta]) \subset \mathcal{O} \}.$$

Nous désignerons par \tilde{f} l'application de D dans G définie par:

$$\delta \longrightarrow f(x + \delta x', \phi(x) + \tilde{\phi}(\delta)) - f(x + \delta x', \phi(x)).$$

De toute évidence on a

$$(\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{f}(\delta) / \delta) + D_1 f(x, \phi(x)) x' = 0,$$

puisque

$$f(x + \delta x', \phi(x) + \tilde{\phi}(\delta)) - f(x, \phi(x)) = 0$$

quel que soit δ appartenant à D . L'ensemble

$$K(\delta_0) = D_2 f[x, x + \delta_0 x'] \times (\phi(x) + [0, 1] \tilde{\phi}[0, \delta_0])$$

est compact dans $L(G, F)$ pour tout δ_0 de D . D'après le théorème 10, son enveloppe convexe fermée $L(\delta_0)$ dans la topologie localement-convexe sous-jacente à $L(G, F)$ est donc compacte dans $L(G, F)$. Quel que soit δ_0 appartenant à D et quel que soit $0 < \delta \leq \delta_0$, l'ensemble $L(\delta_0) \cdot \tilde{\phi}(\delta) / \delta$ est donc convexe compact dans G . Compte tenu de l'expression de $\tilde{f}(\delta)$, on voit que $\tilde{f}(\delta) / \delta$ appartient à $L(\delta_0) \cdot \tilde{\phi}(\delta) / \delta$.

Nous abordons maintenant la démonstration proprement dite qui comprend de nombreuses parties.

a) Soient G' et F' deux espaces normés. Soit i une application linéaire continue de F' dans G' telle que i soit un isomorphisme de F' sur $i(F')$. Désignons par \mathcal{F} le filtre des voisinages de i dans l'espace $L(G', F')$ et par $\mathcal{U}(G')$ le filtre des voisinages de 0 dans G' . Soit $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{U}(G')$ le filtre engendré par les ensembles de la forme suivante :

$\theta^{-1}V = \bigcup_{u \in \theta} u^{-1}(V)$, où θ appartient à \mathcal{F} et V à $\mathcal{V}(G')$.

Prouvons que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{V}(G')$ converge vers 0 dans F' .

Soit $0 < \varepsilon < 1$. Si θ désigne l'ensemble

$$\{i+u \mid u \in L(G', F'), \|u\| < \varepsilon\},$$

prouvons que $\theta^{-1}(B_1(G'))$ est inclus dans $B_{1/(1-\varepsilon)}(F')$, étant entendu que $B_1(G')$ et $B_{1/(1-\varepsilon)}(F')$ désignent les boules fermées de centre 0 dans G' et F' de rayon 1 et $1/(1-\varepsilon)$ respectivement. Soit y un quelconque élément de F' tel que $\|y\| > 1/(1-\varepsilon)$. Alors quel que soit $i+u$ appartenant à θ , supposant que la norme de F' est image réciproque par i de la norme sur $i(F')$ induite par la norme de G' , on a

$$\|(i+u)y\| \geq \|i(y)\| - \|u(y)\| \geq \|y\|(1 - \|u(y)\|) \geq \|y\|(1 - \varepsilon),$$

donc

$$\|(i+u)y\| > 1.$$

On en déduit que l'intersection de $\theta^{-1}(B_1(G'))$ et du complémentaire par rapport à F' de $B_{1/(1-\varepsilon)}(F')$ est vide, c'est-à-dire que l'ensemble $\theta^{-1}(B_1(G'))$ est inclus dans $B_{1/(1-\varepsilon)}(F')$. Mais alors il est immédiat que $\theta^{-1}(B_{k(1-\varepsilon)}(G'))$ est inclus dans $B_k(F')$ pour tout réel positif k , ce qui prouve que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{V}(G')$ converge vers 0 dans F' . Si maintenant \mathcal{F} est un filtre quelconque convergeant vers i dans l'espace $L(G', F')$ et $\mathcal{V}(G')$ un filtre quelconque convergeant vers 0 dans G' , alors $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{V}(G'))$ converge vers 0 dans F' .

b) Désignons par \mathcal{A}' et \mathcal{A} les filtres sur G et F engendrés respectivement par les ensembles

$$A'(\delta_0) = \{f(\delta)/\delta \mid 0 < \delta \leq \delta_0, \delta_0 \in D\}$$

et

$$A(\delta_0) = \{\phi(\delta)/\delta \mid 0 < \delta \leq \delta_0, \delta_0 \in D\}.$$

Prouvons que \mathcal{A} est un filtre quasi-borné de F .

Soit η un réel arbitraire de D . Désignons par F' le sous-espace de F engendré par $\tilde{\phi}[0, \eta]$, et par G' le sous-espace de G engendré par $L(\eta) \cdot \tilde{\phi}[0, \eta]$. Si i est la restriction de $D_2 f(x, \phi(x))$ à (G', F') ,

c'est par hypothèse un isomorphisme de F' sur $i(F')$. Soit \mathcal{F} le filtre engendré par les ensembles $L(\delta_0)/(G', F')$, où $0 < \delta_0 \leq \eta$. Il converge vers i dans $L(G', F')$. D'après la partie a, le filtre $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{U}\mathcal{Q}')$ converge vers 0 dans F' . Puisque $\tilde{f}(\delta)/\delta$ appartient à $L(\delta_0)$. $\tilde{\phi}(\delta)/\delta$ quel que soit δ_0 appartenant à D , $\delta_0 \leq \eta$, et quel que soit $0 < \delta \leq \delta_0$, on voit que $\mathcal{U}\mathcal{Q}$ contient $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{U}\mathcal{Q}')$; il en résulte que $\mathcal{U}\mathcal{Q}$ converge vers 0 dans F' .

c) Nous allons maintenant prouver que \mathcal{Q} est un filtre de Cauchy sur l'espace F .

Soient δ' et δ deux éléments de D . Soient v et u des points de $L(\delta')$ et $L(\delta)$ tels que

$$\tilde{f}(\delta')/\delta' = v [\tilde{\phi}(\delta')/\delta'] \text{ et } \tilde{f}(\delta)/\delta = u [\tilde{\phi}(\delta)/\delta].$$

On voit que:

$$u(\tilde{\phi}(\delta')/\delta' - \tilde{\phi}(\delta)/\delta) = (u-v)\tilde{\phi}(\delta')/\delta' + (\tilde{f}(\delta')/\delta' - \tilde{f}(\delta)/\delta).$$

Il s'ensuit que $\tilde{\phi}(\delta')/\delta' - \tilde{\phi}(\delta)/\delta$ appartient à

$$u^{-1} [(u-v)\tilde{\phi}(\delta')/\delta' + (\tilde{f}(\delta')/\delta' - \tilde{f}(\delta)/\delta)].$$

Ceci montre que $A(\delta_0) - A(\delta_0)$ est inclus dans

$$L(\delta_0)^{-1} \cdot [(L(\delta_0) - L(\delta_0))A(\delta_0) + (A'(\delta_0) - A'(\delta_0))]$$

quel que soit δ_0 appartenant à D , $0 < \delta_0 \leq \eta$. Compte tenu de la partie b, on en déduit immédiatement (grâce à a) que $\mathcal{Q} - \mathcal{Q}$ converge vers 0 dans F .

d) Puisque F est complet, \mathcal{Q} converge dans F vers un élément $D\phi(x)x'$. Soit $D\phi(x)$ l'application de E dans F définie par $x' \rightarrow D\phi(x)x'$. Le filtre \mathcal{Q}' , qui contient $\mathcal{F}\mathcal{Q}$, converge vers

$$D_2 f(x, \phi(x)). D\phi(x)x'.$$

Ceci montre que

$$D_2 f(x, \phi(x)). D\phi(x)x' + D_1 f(x, \phi(x))x' = 0.$$

On voit donc que

$$D_2 f(x, \phi(x)). D\phi(x) + D_1 f(x, \phi(x)) = 0.$$

e) Supposons désormais E métrisable. Quel que soit n appartenant à \mathbf{N} , nous désignerons par U_n la boule de E de centre 0 et de rayon $1/n$. Nous supposons dans ce qui suit $x+U_1$ inclus dans U , pour simplifier.

Appelons $D\phi$ l'application de U dans l'ensemble $\mathcal{L}(F, E)$ des applications linéaires de E dans F définie par $x \rightarrow D\phi(x)$. Pour que $D\phi$ soit continue vers $L(F, E)$ en un point x de U , il faut et il suffit que l'assertion suivante soit exacte:

Etant donnée une suite (x_n) de points de U convergeant vers x et une suite bornée (a_n) de points de E , le filtre

$$\langle [D\phi(x_n) - D\phi(x)] a_n \rangle$$

converge vers 0 dans F .

En effet, supposons l'assertion ci-dessus vérifiée. Nous allons prouver que, quel que soit le filtre quasi-borné $\hat{\mathcal{X}}$ de E , le filtre

$$[D\phi(x+\mathcal{U}) - D\phi(x)] \hat{\mathcal{X}}$$

converge vers 0 dans F , où \mathcal{U} désigne le filtre des voisinages de 0 dans E , ce qui montrera que $D\phi$ est continue en x vers $L(F, E)$.

Quel que soit n appartenant à \mathbf{N} , il existe $\varepsilon_n > 0$ et X_n appartenant à $\hat{\mathcal{X}}$ tels que $[-\varepsilon_n, +\varepsilon_n] X_n$ soit inclus dans U_n . Supposons X_{n+1} inclus dans X_n quel que soit n appartenant à \mathbf{N} . Désignons par \mathcal{X} le filtre engendré par les X_n . C'est un filtre quasi-borné de E . De plus \mathcal{X} est inclus dans $\hat{\mathcal{X}}$. Nous allons prouver que $[D\phi(x+\mathcal{U}) - D\phi(x)] \mathcal{X}$ est un filtre convergeant vers 0 dans F .

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $[D\phi(x+\mathcal{U}) - D\phi(x)] \mathcal{X}$ ne converge pas vers 0 dans F . Puisque ce filtre admet une base dénombrable, il est l'intersection des filtres élémentaires qui le contiennent. Il existe donc une suite (y_n) d'éléments de F ne convergeant pas vers 0 dans F telle que $\langle y_n \rangle$ contienne $[D\phi(x+\mathcal{U}) - D\phi(x)] \mathcal{X}$. Il existe un voisinage V de 0 dans F tel que, quel que soit n appartenant à \mathbf{N} , il existe un entier $r_n \geq n$ pour lequel y_{r_n} n'appartient pas à V . D'ailleurs on peut choisir r_n supérieur à tout entier donné à l'avance. Or

$$H_n = [D\phi(x + U_n) - D\phi(x)] X_n$$

appartient à $\langle y_n \rangle$ quel que soit n appartenant à \mathbf{N} . Il existe donc q_n appartenant à \mathbf{N} tel que $\{y_q \mid q \geq q_n\}$ soit inclus dans H_n . Choisissons r_n supérieur ou égal à q_n . Alors on peut trouver x_n dans $x + U_n$ et a_n dans X_n tels que $y_{r_n} = [D\phi(x_n) - D\phi(x)] a_n$. Comme la suite (x_n) converge vers x dans U , et comme la suite (a_n) est bornée dans E (puisque $\langle a_n \rangle$ contient \mathcal{X}), le filtre

$$\langle y_{r_n} \rangle = \langle [D\phi(x_n) - D\phi(x)] a_n \rangle$$

converge vers 0 dans F , ce qui est absurde.

f) Démontrons effectivement que, étant données une suite (x_n) de points de U convergeant vers x et une suite bornée (a_n) dans E , le filtre $\langle [D\phi(x_n) - D\phi(x)] a_n \rangle$ converge vers 0 dans F .

Soit (λ_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0 et ne contenant pas 0. On sait que $(\lambda_n a_n)$ converge vers 0 dans E . Soit ε un réel positif tel que

$$Q = (\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}) + [0, \varepsilon] \{\lambda_n a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

soit inclus dans U . Comme Q est compact dans U , son image K par ϕ est compacte dans F .

Désignons par F' le sous-espace de F engendré par K . Compte tenu de:

$$D\phi(x_n) a_n = \lim_{\delta > 0, \delta \rightarrow 0} [\phi(x_n + \delta a_n) - \phi(x_n)] / \delta \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

et de

$$D\phi(x) a_n = \lim_{\delta > 0, \delta \rightarrow 0} [\phi(x + \delta a_n) - \phi(x)] / \delta \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

on voit que $D\phi(x_n) a_n$ et $D\phi(x) a_n$ appartiennent à F' pour tout $n \in \mathbf{N}$, en sorte que $[D\phi(x_n) - D\phi(x)] a_n$ appartient à F' . Soit G' le sous-espace de G engendré par

$$(\{D_2 f(x_n, \phi(x_n)) \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{D_2 f(x, \phi(x))\}) K.$$

Par hypothèse la restriction i de $D_2 f(x, \phi(x))$ à (G', F') est un isomorphisme de F' sur $i(F')$. Soit

$$\mathcal{G}' = \langle D_2 f(x_n, \phi(x_n)). ([D\phi(x_n) - D\phi(x)] a_n) \rangle.$$

Compte tenu de la partie d, on voit que \mathcal{G}' converge vers 0 dans G .
Le filtre $\langle [D\phi(x_n) - D\phi(x)] a_n \rangle$, qui contient le filtre

$$\langle D_2 f(x_n, \phi(x_n)) \rangle^{-1} \cdot \mathcal{G}',$$

converge vers 0 dans F d'après la partie a.

g) Nous avons montré que ϕ est C^1 et que

$$D_2 f(x, \phi(x)) \cdot D\phi(x) + D_1 f(x, \phi(x)) = 0$$

quel que soit x appartenant à U . Nous allons maintenant prouver par récurrence que ϕ est C^r . On suppose bien entendu $r > 1$.

Soit k un entier, $1 \leq k < r$. Supposons déjà démontré que ϕ est C^k . Posons $f^1 = f$, et, si $2 \leq i < k$, désignons par f^i l'application de l'espace $U \times L^{(i-1)}(F, E)$ dans $L^{(i-1)}(G, E)$ définie par:

$$(x, \theta) \longrightarrow D_2 f^{i-1}(x, D^{(i-2)}\phi(x)) \cdot \theta + D_1 f^{i-1}(x, D^{(i-2)}\phi(x)).$$

Supposons que $f^i(x, D^{(i)}\phi(x)) = 0$ pour tout entier i , $1 \leq i \leq k$, et quel que soit x appartenant à U . Désignons alors par f^{k+1} l'application de $U \times L^{(k)}(F, E)$ dans $L^{(k)}(G, E)$ définie par:

$$(x, \theta) \longrightarrow D_2 f^k(x, D^{(k-1)}\phi(x)) \cdot \theta + D_1 f^k(x, D^{(k-1)}\phi(x)).$$

Nous nous proposons de démontrer que ϕ est C^{k+1} et que, quel que soit x appartenant à U , $f^{k+1}(x, D^{(k+1)}\phi(x)) = 0$.

h) Soit x un point de U et x' un point de E . Nous désignerons par $\widetilde{D^k\phi}$ l'application de P dans $L^{(k)}(F, E)$ définie par:

$$\delta \longrightarrow D^{(k)}\phi(x + \delta x') - D^{(k)}\phi(x).$$

Soit $\widetilde{f^{k+1}}$ l'application de P dans $L^{(k)}(G, E)$ définie par:

$$\delta \longrightarrow \widetilde{f^{k+1}}(x + \delta x', D^{(k)}\phi(x) + \widetilde{D^k\phi}(\delta)) - \widetilde{f^{k+1}}(x + \delta x', D^{(k)}\phi(x)).$$

Compte tenu de la définition de $\widetilde{f^{k+1}}$, on voit que:

$$\widetilde{f^{k+1}}(\delta) = D_2 f^k(x + \delta x', D^{(k-1)}\phi(x + \delta x')) \cdot \widetilde{D^k\phi}(\delta) \quad \forall \delta \in P.$$

Mais alors, compte tenu de

$$D_2 f^i(x, \theta) \theta' = D_2 f^{i-1}(x, D^{(i-2)}\phi(x)) \cdot \theta'$$

pour $2 \leq i \leq k$ et pour θ, θ' de $L^{(i-2)}(F, E)$, on remarque que:

$$\widetilde{f^{k+1}}(\delta) \cdot a_1 \dots a_k = D_2 f(x + \delta x', \phi(x) + \widetilde{\phi}(\delta)) \cdot [\widetilde{D^k\phi}(\delta) \cdot a_1 \dots a_k],$$

ceci quel que soit δ appartenant à P et quels que soient a_1, \dots, a_k appartenant à E . La relation ainsi obtenue est très importante; en effet, le reste de la démonstration est basé dessus.

i) Nous désignerons par \mathcal{Q} le filtre sur $L^{(k)}(F, E)$ engendré par les ensembles

$$A^k(\delta_0) = \{ [\overline{D^k \phi(\delta)} / \delta] \mid 0 < \delta \leq \delta_0, \delta_0 \in P \}.$$

Prouvons que \mathcal{Q} est un filtre quasi-borné de $L^{(k)}(F, E)$.

Supposons que, étant données k suites bornées arbitraires $(a_n^1) \dots (a_n^k)$ de E , le filtre $(\mathcal{W}\mathcal{Q}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F . Un raisonnement analogue à celui de la partie e prouve alors que $\mathcal{W}\mathcal{Q}$ converge vers 0 dans $L^{(k)}(F, E)$. Nous devons donc montrer que le filtre $(\mathcal{W}\mathcal{Q}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F . Soit (λ_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0 et ne contenant pas 0. On sait que $(\lambda_n a_n^i)$ converge vers 0 dans E , pour $1 \leq i \leq k$, en sorte que l'ensemble

$$S_i = \{ \lambda_n a_n^i \mid n \in \mathbf{N} \} \cup \{ 0 \}$$

est compact dans E . Soit F' le sous-espace vectoriel de F engendré par $\overline{D^k \phi[0, n]} \cdot S_1 \dots S_k$, et soit G' le sous-espace vectoriel de G engendré par

$$\{ D_2 f(x + \delta x', \phi(x) + \tilde{\phi}(\delta)) \mid 0 < \delta \leq \eta \} (\overline{D^k \phi[0, \eta]} \cdot S_1 \dots S_k).$$

Par hypothèse la restriction de $D_2 f(x, \phi(x))$ à (G', F') est un isomorphisme de F' sur $i(F')$. Il résulte alors de la partie a que le filtre $(\mathcal{W}\mathcal{Q}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F .

j) Prouvons maintenant que \mathcal{Q} est un filtre de Cauchy sur l'espace $L^{(k)}(F, E)$.

Un raisonnement analogue à celui que nous avons tenu dans la partie i prouve que $\mathcal{Q} - \mathcal{Q}$ converge vers 0 dans $L^{(k)}(F, E)$ ssi l'assertion suivante est exacte:

« Etant données k suites bornées arbitraires $(a_n^1) \dots (a_n^k)$ de E , le filtre $(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F ».

Démontrons effectivement l'assertion ci-dessus.

Soit γ_0 un élément quelconque de P , et soient ν_1, \dots, ν_k des entiers arbitraires. Posons

$$H(\delta_0) = \{ D_2 f(x + \delta x', \phi(x) + \tilde{\phi}(\delta)) / 0 < \delta \leq \delta_0 \}$$

et, pour $1 \leq i \leq k$, posons $H_i = \{ a_n^i \mid n \geq \nu_i \}$. Soient $0 < \delta, \delta' \leq \delta_0$, et soient n_1, \dots, n_k des entiers tels que n_i soit supérieur à ν_i pour $1 \leq i \leq k$. On sait que

$$\begin{aligned} & (f^{k+1}(\delta')/\delta' - \widetilde{f^{k+1}}(\delta)/\delta) \cdot a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k = \\ & = v(D^k \phi(\delta')/\delta' \cdot a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k) - u(D^k \phi(\delta)/\delta \cdot a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k), \end{aligned}$$

où nous posons

$$v = D_2 f(x + \delta' x', \phi(x) + \tilde{\phi}(\delta')) \quad \text{et} \quad u = D_2 f(x + \delta x', \phi(x) + \tilde{\phi}(\delta)).$$

Il s'ensuit:

$$\begin{aligned} & u [(D^k \phi(\delta')/\delta' - \widetilde{D^k \phi}(\delta)/\delta) a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k] = \\ & = (u - v) [D^k \phi(\delta')/\delta' \cdot a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k] \\ & + [f^{k+1}(\delta')/\delta' - \widetilde{f^{k+1}}(\delta)/\delta] a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k, \end{aligned}$$

en sorte que l'élément $(D^k \phi(\delta')/\delta' - \widetilde{D^k \phi}(\delta)/\delta) a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k$ de F appartient à

$$\begin{aligned} & u^{-1} [(u - v) [D^k \phi(\delta')/\delta' \cdot a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k] \\ & + [f^{k+1}(\delta')/\delta' - \widetilde{f^{k+1}}(\delta)/\delta] a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k]. \end{aligned}$$

Posant

$$A^k(\delta_0) = \{ f^{k+1}(\delta')/\delta' - \widetilde{f^{k+1}}(\delta)/\delta \mid 0 < \delta, \delta' \leq \delta_0 \},$$

ceci montre que $(A^k(\delta_0) - A^k(\delta_0))H_1 \dots H_k$ est inclus dans le sous-ensemble de F suivant:

$$\begin{aligned} & H(\delta_0)^{-1} \cdot [(H(\delta_0) - H(\delta_0)) \cdot [A^k(\delta_0)H_1 \dots H_k] \\ & + [A^k(\delta_0) - A^k(\delta_0)]H_1 \dots H_k]. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement, compte tenu de la partie i, que le filtre $(\mathcal{A} - \mathcal{A}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F .

k) D'après la partie j, le filtre \mathcal{A} converge dans $L^{(k)}(F, E)$ vers un élément que nous noterons $D^{(k+1)}\phi(x)x'$. Compte tenu de l'égalité

$f^{k+1}(\hat{x}, D^{(k)}\phi(\hat{x}))=0$ pour tout \hat{x} appartenant à U , on voit que:

$$[\lim_{\delta>0, \delta\rightarrow 0} \overbrace{f^{k+1}}(\delta)/\delta] + D_1 f^{k+1}(x, D^{(k)}\phi(x))x' = 0.$$

Puisque:

$$\overbrace{f^{k+1}}(\delta)/\delta = D_2 f^k(x + \delta x', D^{(k-1)}\phi(x) + \overbrace{D^{k-1}}\phi(\delta)) \cdot \overbrace{D^k}\phi(\delta)/\delta$$

pour tout $\delta \in P$, on en déduit:

$$D_2 f^k(x, D^{(k-1)}\phi(x)) \cdot D^{(k+1)}\phi(x)x' + D_1 f^{k+1}(x, D^{(k)}\phi(x))x' = 0.$$

Il en résulte:

$$D_2 f^{k+1}(x, D^{(k)}\phi(x)) \cdot D^{(k+1)}\phi(x) + D_1 f^{k+1}(x, D^{(k)}\phi(x)) = 0.$$

quel que soit x appartenant à U .

1) Un raisonnement analogue à celui des parties e et f prouve que l'application $D^{(k+1)}\phi$, de U dans l'espace $\mathcal{L}(L^{(k)}(F, E), E)$ des applications linéaires de E vers $L^{(k)}(F, E)$, est continue de U vers l'espace $L^{(k+1)}(F, E)$. ∇

Soit désormais E un espace localement-convexe séparé, et soit F un espace localement-convexe séparé complet tel que le sous-espace de F engendré par tout compact de F soit normable. Posons $I = [0, 1]$. Nous désignerons par C l'ensemble des applications continues de I dans F , par C_0^1 l'ensemble des applications continûment-dérivables de I dans F s'annulant en 0 , et par Δ l'application de dérivation de C_0^1 dans C qui à un élément β de C_0^1 fait correspondre sa dérivée $\dot{\beta}$. On munit C de la topologie de la convergence compacte et C_0^1 de la topologie image réciproque par Δ de la topologie de la convergence compacte sur C . Soit alors f une application C^r ($r \geq 1$, r fini ou infini) d'un ouvert $\mathcal{O}(f)$ de $E \times F$ vers $L(F, E)$. Désignons par g l'application de

$$\mathcal{O} = \{(x, y, \gamma) \in E \times F \times C_0^1 \mid (sx, y + \gamma s) \in \mathcal{O}(f), \forall s \in I\}$$

vers C donnée par:

$$g(x, y, \gamma)s = \dot{\gamma}(s) - f(sx, y + \gamma s)x \text{ pour tout } s \text{ de } I.$$

LEMME. g est une application C^r de \mathcal{O} dans C .

Δ . Désignons par b l'application de $C(L(F, E), I) \times E$ dans $C(F, I)$ donnée par $[b(u, x)] s = u(s)x$. Désignons par f_* l'application de $C(\mathcal{O}(f), I)$ dans $C(L(F, E), I)$ définie par $\hat{e} \rightarrow f.\hat{e}$. On sait (voir chapitre 5) que f_* est C^r . Enfin désignons par e l'application de \mathcal{O} dans $C(\mathcal{O}(f), I)$ donnée par $[e(x, y, \gamma)] s = (sx, y + \gamma s)$. C'est aussi une application C^r . Comme $g = \Delta.p_3 - b.[f_*.e, p_1]$, où p_1 et p_3 désignent les projections de \mathcal{O} sur E et C_0^1 respectivement, on voit que g est C^r . ∇

THEOREME 11. Soit W un ouvert de $E \times F$. Soit ϕ une application continue de W dans C_0^1 telle que $(z, \phi(z))$ appartienne à \mathcal{O} et que l'on ait $g(z, \phi(z)) = 0$ pour tout z de W . Alors

a) ϕ est dérivable en tout point de W et dans toute direction. Si $D\phi(z)$ est sa dérivée en un point z de W , on a :

$$D_3 g(z, \phi(z)) \cdot D\phi(z) + D_1 g(z, \phi(z)) \cdot p_E + D_2 g(z, \phi(z)) \cdot p_F = 0,$$

où p_E et p_F désignent les projections de $E \times F$ sur E et F respectivement.

b) Si E et F sont métrisables (F est alors normé), ϕ est une application C^r .

Δ . a) Prouvons que $D_3 g(x, y, \gamma)$ est une injection de C_0^1 dans C quel que soit (x, y, γ) appartenant à \mathcal{O} . Soit β un point de C_0^1 tel que l'on ait $D_3 g(x, y, \gamma) \cdot \beta = 0$. Nous allons montrer que $\beta = 0$.

Soit ψ l'application de I dans $L(F, F)$ donnée par

$$\psi(s)v = D_2 f(sx, y + \gamma s) \cdot v \cdot x$$

quel que soit s appartenant à I et pour tout v de F . C'est une application continue de I dans $L(F, F)$. Soient F_1 et F_2 les sous-espaces banachisables de F engendrés respectivement par $\beta(I)$ et par $\psi(I) \cdot \beta(I)$. Comme $\dot{\beta}(s) = \psi(s) \cdot \beta(s)$ quel que soit s appartenant à I , on voit que $\dot{\beta}(I)$ (donc $\beta(I)$) est inclus dans F_2 . Ceci montre que F_1 est inclus dans F_2 . Introduisons une norme sur F_2 . Quel que soit s appartenant à I , nous désignerons par $\|\psi(s)\|$ la norme de la restriction de $\psi(s)$ à (F_2, F_1) dans l'espace normé canonique $L(F_2, F_1)$. Comme

$$\dot{\beta}(s) = \int_0^s \psi(s') / (F_2, F_1) \cdot \dot{\beta}(s') ds'$$

quel que soit s appartenant à I , on a :

$$\|\beta(s)\| \leq (\text{Sup}_{\xi \in I} \|\psi(\xi)\|) \cdot \int_0^s \|\beta(s')\| ds'$$

On en déduit $\beta = 0$ (d'après le lemme de Gronwall).

b) Soit (x, y, γ) un point de \mathcal{O} . Soit K un sous-ensemble compact de C_0^1 . Prouvons que $D_3 g(x, y, \gamma)$ induit un isomorphisme i du sous-espace G_1 de C_0^1 engendré par K sur $G_2 = D_3 g(x, y, \gamma)G_1$. Montrons simplement que i^{-1} est continue en 0 de G_2 vers G_1 . Autrement dit prouvons que, si (β_n) est une suite d'éléments de G_1 , si (h_n) est une suite d'éléments de G_2 , telles que

$$\dot{\beta}_n(s) = D_2 f(sx, y + \gamma s) \cdot \beta_n(s) \cdot x + h_n(s)$$

quel que soit l'entier positif n et pour tout s de I , si (h_n) converge vers 0 dans C , alors (β_n) converge vers 0 dans C_0^1 .

Désignons par F_1 et F_2 les sous-espaces banachisables de F engendrés respectivement par $K \cdot I$ et par $\psi(I)(K \cdot I) \cup (K \cdot I)$. Alors G_1 est inclus dans $C_0^1(F_1, I)$ et G_2 dans $C(F_2, I)$. De plus F_1 est inclus dans F_2 et, quel que soit s appartenant à I , $\psi(s)$ envoie F_1 dans F_2 . Introduisons une norme sur F_2 et, quel que soit s appartenant à I , désignons par $\|\psi(s)\|$ la norme de $\psi(s)/(F_2, F_1)$ dans l'espace normé $L(F_2, F_1)$. De

$$\beta_n(s) = \int_0^s \psi(s') \cdot \beta_n(s') ds' + \int_0^s h_n(s') ds'$$

quel que soit n appartenant à \mathbf{N} et pour tout s de I , découle :

$$\|\beta_n(s)\| \leq \text{Sup} \cdot \int_0^s \|\beta_n(s')\| ds' + \varepsilon_n,$$

où l'on pose :

$$\text{Sup} = \text{Sup}_{\xi \in I} \|\psi(\xi)\| \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \int_0^I \|h_n(s')\| ds'$$

Il en résulte $\|\beta_n(s)\| \leq \varepsilon_n \cdot [\exp(\text{Sup} \cdot s)]$ d'après le lemme de Gronwall. On voit donc que (β_n) converge vers 0 dans $C(F_2, I)$ et par suite dans C . Puisque l'application ρ de $\mathcal{C}(L(F, F), I) \times \mathcal{C}^2(F, I)$ dans l'espace $\mathcal{C}(F, I)$ donnée par $\rho(\psi', h', h) \cdot s = \psi'(s)h'(s) + h(s)$ est continue, on en déduit que $(\dot{\beta}_n)$ converge vers 0 dans C . Nous avons ainsi démontré que (β_n) converge vers 0 dans C_0^1 .

c) Le théorème résulte alors du théorème des fonctions implicites. ∇

Supposons désormais que E est métrisable et F normé.

THEOREME 12 (théorème de Frobenius). Reprenons les hypothèses et les notations du théorème 11. Supposons de plus que, pour tous (x, y) de W , s de I et (a_1, a_2) de $E \times E$, l'égalité suivante ait lieu:

$$\begin{aligned} D_1 f(z) a_1 a_2 + [D_2 f(z) \cdot (f(z) a_1)] a_2 = \\ = D_1 f(z) a_2 a_1 + [D_2 f(z) \cdot (f(z) a_2)] a_1 \end{aligned}$$

où $z = (sx, y + \phi(x, y)s)$. Alors l'application α de W dans F définie par $(x, y) \rightarrow y + \phi(x, y)I$ est une application C^r telle que, pour tout (x, y) de W , $D_1 \alpha(x, y) = f(x, \alpha(x, y))$.

Δ . Soit (x, y) un point de W , et soit a un élément quelconque de E . Nous nous proposons de montrer $D_1 \alpha(x, y)a = f(x, \alpha(x, y))a$.

Soient h_1 et h_2 les éléments de C_0^1 définis respectivement par:

$$s \rightarrow (D_1 \phi(x, y)a)s \text{ et } s \rightarrow f(sx, y + \phi(x, y)s) \cdot sa.$$

Nous allons prouver que

$$[D_3 g(x, y, \phi(x, y)) \cdot h_1] s = [D_3 g(x, y, \phi(x, y)) \cdot h_2] s$$

pour tout s de I . Compte tenu du fait que $D_3 g(x, y, \phi(x, y))$ est une injection, on en déduira $h_1 = h_2$. De $h_1(1) = h_2(1)$ résultera l'égalité cherchée.

Par définition de h_1 , on a, quel que soit s appartenant à I :

$$\begin{aligned} [D_3 g(x, y, \phi(x, y)) \cdot h_1] s &= ([D_3 g(x, y, \phi(x, y)) \cdot D_1 \phi(x, y)] a) s \\ &= -[D_1 g(x, y, \phi(x, y)) a] s, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} [D_3 g(x, y, \phi(x, y)) \cdot h_1] s &= -f(sx, y + \phi(x, y)s)a \\ &\quad - D_1 f(sx, y + \phi(x, y)s) \cdot sa \cdot x. \end{aligned}$$

Par définition de $D_3 g(x, y, \phi(x, y))$, on a:

$$[D_3 g(x, y, \phi(x, y)) \cdot h_2] s = \dot{h}_2(s) - D_2 f(sx, y + \phi(x, y)s) \cdot h_2(s) \cdot x$$

pour tout s de I . A l'aide de l'égalité indiquée dans l'énoncé, on en déduit:

$$[D_3 g(x, y, \phi(x, y)). h_2] s = -f(sx, y + \phi(x, y)s) a - \\ - D_1 f(sx, y + \phi(x, y)s). s a. x. \nabla$$

La démonstration du théorème 12 est celle du théorème 1 de [10].

PROPOSITION 22. *Reprenons les hypothèses du théorème 11, et supposons que r soit strictement supérieur à 1. Supposons de plus que, pour tous (x, y) de W et s de I , (sx, y) appartienne à W et que l'on ait l'égalité $\phi(x, y)s = \phi(sx, y)1$. Alors*

$$([D_1(D_2\phi))(sx, y). x] y') 1 = \\ = D_2 f(sx, y + \phi(x, y)s). [y' + (D_2\phi(x, y)y')s]. x$$

pour tous (x, y) de W , y' de F , et s de I .

Δ . Soit (x, y) un point de W , et soit y' un point de F . On prouve facilement que $[D_2\phi(x, y)y'] s = [D_2\phi(sx, y)y'] 1$ quel que soit s appartenant à I . On en déduit

$$[D_2\phi(x, y)y'] s = ([D_1(D_2\phi))(sx, y). x] \cdot y') 1.$$

La relation

$$D_3 g(x, y, \phi(x, y)). D_2\phi(x, y) = -D_2 g(x, y, \phi(x, y))$$

entraîne

$$[D_3 g(x, y, \phi(x, y)). (D_2\phi(x, y)y')] s = -[D_2 g(x, y, \phi(x, y))y'] s$$

pour tout s de I , c'est-à-dire

$$[D_2\phi(x, y)y'] s - D_2 f(sx, y + \phi(x, y)s). [D_2\phi(x, y)y'] s]. x = \\ = -[D_2 g(x, y, \phi(x, y))y'] s.$$

On voit donc que

$$[D_2\phi(x, y)y'] s = D_2 f(sx, y + \phi(x, y)s). [y' + (D_2\phi(x, y)y')s]. x$$

pour tout x de I , d'où l'on tire l'égalité cherchée. ∇

Supposons que $\phi(0, y)$ soit égal à 0 pour tout point (x, y) de W . Si $E = \mathbf{R}$, examinant successivement les cas où $s=1$, $x \neq 0$, et $s=0$, $x \neq 0$, on déduit de la proposition précédente l'égalité

$$D_1(D_2\alpha)(x, y) \cdot I = D_2f(x, \alpha(x, y)) \cdot D_2\alpha(x, y)$$

pour tout (x, y) de W .

Reprenons les notations antérieures au théorème 11. On exige simplement F espace localement-convexe séparé complet et E espace localement-convexe séparé. Soit W un ouvert de $E \times F$. Supposons que les assertions suivantes soient exactes:

a) Quel que soit (x, y) appartenant à W , il existe une suite $(z_n(x, y))$ d'éléments de C_0^1 telle que $(x, y, z_n(x, y))$ appartienne à \mathcal{O} pour tout n , que $z_0(x, y) = 0$ et que

$$z_n(x, y) = z_{n-1}(x, y) - \Delta^{-1} [g(x, y, z_{n-1}(x, y))]]$$

pour tout n supérieur ou égal à 1.

b) La suite des applications z_n définies par $(x, y) \rightarrow z_n(x, y)$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_\lambda(C_0^1, W)$.

c) Si ϕ est sa limite, $(x, y, \phi(x, y))$ appartient à \mathcal{O} pour tout (x, y) de W .

Alors ϕ est une application continue de W dans C_0^1 telle que $\phi(0, y) = 0$ et que $g(x, y, \phi(x, y)) = 0$ pour tout (x, y) de W .

PROPOSITION 23. *Supposons que l'assertion a ci-dessus soit exacte ainsi que les suivantes:*

b') *La suite des applications z_n est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_\lambda(C, W)$.*

c') *Si ϕ est sa limite, $(sx, y + \phi(x, y)s)$ appartient à $\mathcal{O}(f)$ quel que soit (x, y) dans W et pour tout s de I .*

Alors les assertions b et c ci-dessus sont exactes.

Δ . Comme

$$z_n(x, y)s = \int_0^s f(\sigma x, y + z_{n-1}(x, y)\sigma) \cdot x d\sigma$$

pour tous (x, y) de W , $n \geq 1$ et s de I , on voit que $\dot{z}_n = \Delta \cdot z_n$ s'exprime en fonction de z_{n-1} . Il est alors immédiat que (\dot{z}_n) converge dans $\mathcal{C}_\lambda(C, W)$. ∇

REMARQUE. Si F est banachisable, si E est normable, et si $(0, y_0)$

est un point de $\mathcal{O}(f)$, on sait qu'il existe un voisinage ouvert W de $(0, y_0)$ dans $\mathcal{O}(f)$ tel que les assertions a, b' et c' ci-dessus soient satisfaites.

Appendice.

Soient E et F deux espaces normés. Notons que la quasi-topologie équivalente λ^* associée à la quasi-topologie λ de la convergence locale sur l'espace $L(F, E)$ est égale à la topologie de la convergence bornée. On voit donc qu'en général $\tau(\lambda^*)$ est différent de $\tau(\lambda)$. C'est pourquoi nous pensons que le lemme 11-2-8 de [2] est inexact.

Note ajoutée à la correction des épreuves.

1) Soit (E, π) un espace vectoriel quasi-topologique et soit \mathcal{A} un filtre sur E . Nous avons désigné (voir les Généralités) par $\mathcal{A}^{\circ-}$ le filtre engendré par les enveloppes convexes fermées dans $\tau(\pi)$ des éléments de \mathcal{A} . En fait, comme dans [2], $\mathcal{A}^{\circ-}$ ne peut être que le filtre engendré par les enveloppes convexes fermées dans $\tau(\pi)$ des éléments de $\mathcal{A} \cap 0$. Sinon les importants théorèmes 5-3-4 et 5-3-5 de [2] ne seraient pas vrais.

2) Enfin signalons qu'on trouvera dans la thèse de 3^{ème} cycle de F. Berquier d'intéressantes propositions qui complètent certains résultats exposés ici dans les chapitres 1 à 4. Mentionnons en particulier le théorème suivant:

THEOREME. Soit (E', π') un espace admissible, (E, π) un espace admissible et X un ouvert de E . Soit f une application continûment-dérivable de X dans E' telle que Df soit continue de X vers $L(\vec{E}', \vec{E})$. Alors soit x_0 un point de X . Soit r l'application de $X - x_0$ dans \vec{E}' définie par $b \rightarrow f(x_0 + b) - f(x_0) - Df(x_0)b$. Pour tout filtre quasi-borné \mathcal{A} de E , le filtre $\theta_r(\vec{0}, \mathcal{A})$ converge vers 0 dans E' .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, *Jour. d'Analyse math.*, Jérusalem, 13 (1964), p. 1-114.
- [2] A. FROLICHER - W. BUCHER, Calculus in vector spaces without norm, *Lecture Notes in Math.* 30, 1966.
- [3] C. H. COOK - H. R. FISCHER, On equicontinuity and continuous convergence, *Math. Ann.* 159 (1965), p. 94 - 104.
- [4] M. SIMONNET, *Exposé de Géométrie différentielle*, Théorie et Applications des Catégories, Paris, 1971.
- [5] P. VER EECKE, Connexions d'ordre infini, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* 11-3 (1970), p. 1 - 39.
- [6] A. BASTIANI, *Espaces fonctionnels*, Cours multigraphié, Amiens, 1969.
- [7] J. A. LESLIE, Some Frobenius theorems in Global Analysis, *Jour. of diff. Geo.* 2 (1968), p. 279 - 297.
- [8] N. BOURBAKI, *Equations différentielles*, Paris, Hermann, 1961.
- [9] J. DIEUDONNE, *Fondements de l'Analyse moderne*, livre I, Paris, Gauthier-Villars, 1969.
- [10] J. P. PENON, Sur le théorème de Frobenius, *Bull. Soc. Math. France* 98 (1970) p. 48 - 59.
- [11] G. CHOQUET, Convergences, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 23 (1947), p. 57.
- [12] A. MACHADO, *Espaces d'Antoine et pseudo-topologies* (à paraître).

20 rue Michelet
60100 CREIL