CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JOSEPH CHACRON

Sous-catégories semi-pleines maximales d'une catégorie

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, n° 3 (1971), p. 323-332

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_3_323_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XII,3

C. Bastiani

SOUS-CATEGORIES SEMI-PLEINES MAXIMALES D'UNE CATEGORIE

par Joseph CHACRON

Nous définissons une sous-catégorie semi-pleine d'une catégorie comme une sous-catégorie qui est saturée par rapport à l'équivalence: x et x' sont équivalents s'ils ont même source et même but. Certaines sous-catégories semi-pleines simples sont construites explicitement: si la catégorie est transitive, ce sont les sous-catégories semi-pleines maximales, et toute sous-catégorie semi-pleine propre est l'intersection des sous-cagories de ce type qui la contiennent.

On détermine de même les sous-groupoïdes semi-pleins maximaux d'un groupoïde transitif. Alors qu'une sous-catégorie semi-pleine maximale n'est pas nécessairement maximale en tant que sous-catégorie, les sous-groupoïdes semi-pleins maximaux sont des sous-groupoïdes maximaux. Ceci permet de caractériser complètement les sous-groupoïdes maximaux quelconques d'un groupoïde.

L'étude générale appliquée au groupoïde des couples associé à un ensemble redonne les préordres maximaux sur un ensemble et les équivalences maximales d'Ore.

Certains résultats ont été annoncés dans [1-1] et établis moins directement dans [1-2] (où le problème est envisagé plus systématiquement, à l'aide d'une correspondance de Galois).

Notations.

C désigne une catégorie, C_0 l'ensemble de ses unités, α et β ses applications source et but, ab le composé de a et b. On note γ l'application de C dans $C_0 \times C_0$ qui associe $(\beta(x), \alpha(x))$ à $x \in C$. Des notations analogues sont utilisés pour un groupoïde, que l'on notera G.

1. Sous-catégories semi-pleines d'une catégorie.

DEFINITION 1. Une partie A de C sera dite *semi-pleine* si

$$[\, a \in A,\ x \in C,\ \gamma(x) = \gamma(a)\,] \rightarrow x \in A$$

(c'est-à-dire si $A = \overset{-1}{\gamma}(\gamma(A))$.

En appelant I_α et I_β les équivalences déduites des applications α et β, il est clair que A est semi-pleine si, et seulement si, A est $I_\alpha \cap I_\beta$-saturée. En outre, l'ensemble des parties semi-pleines de C forme un sous-treillis complet du treillis des parties de C.

DEFINITION 2. On appelle *sous-catégorie semi-pleine de* C une sous-catégorie de C définie par une partie semi-pleine.

PROPOSITION 1. *Pour toute partie* X_0 *de* C_0 *l'ensemble* $C(X_0)$, *où*

$$C(X_0) = \{\, x \mid x \in C,\ [\gamma(x) \in X_0 \times X_0 \text{ ou } \alpha(x) \notin X_0\,]\,\},$$

définit une sous-catégorie semi-pleine de C *qui de plus contient* C_0.

PREUVE. 1° Il est évident que $C_0 \subset C(X_0)$ et que $C(X_0)$ est semi-pleine.
2° Soient x et y des éléments de $C(X_0)$ tels que $\alpha(x) = \beta(y)$. On vérifie que xy appartient à $C(X_0)$ en envisageant les divers cas possibles:

- $x \in C(X_0)$ et $\alpha(y) \notin X_0$; dans ce cas $\alpha(xy) \notin X_0$,
- $\gamma(x) \in X_0 \times X_0$ et $\gamma(y) \in X_0 \times X_0$; alors $\gamma(xy) \in X_0 \times X_0$,
- $\alpha(x) \notin X_0$ et $\gamma(y) \in X_0 \times X_0$, ce qui est impossible, car $\alpha(x) = \beta(y)$.

DEFINITION 3. On appelle *sous-groupoïde semi-plein* d'un groupoïde G un sous-groupoïde de G défini par une partie semi-pleine.

PROPOSITION 2. *Soit* X_0 *une partie de l'ensemble* G_0 *des unités d'un groupoïde* G *et soit* $X_0' = G_0 - X_0$. *L'ensemble* $G[X_0]$, *où*

$$G[X_0] = \{\, x \mid x \in G,\ [\gamma(x) \in X_0 \times X_0 \text{ ou } \gamma(x) \in X_0' \times X_0']\,\},$$

définit un sous-groupoïde semi-plein de G *qui de plus contient* G_0.

PREUVE. 1° Il est évident que $G[X_0]$ contient G_0, est une partie semi-pleine et est stable pour l'inversion.
2° Soient x et y des éléments de $G[X_0]$ tels que $\alpha(x) = \beta(y)$. On vérifie que xy appartient à $G[X_0]$ en envisageant les divers cas:

- $\gamma(x) \in X_0 \times X_0$ et $\gamma(y) \in X_0 \times X_0$; alors $\gamma(xy) \in X_0 \times X_0$,
- $\gamma(x) \in X_0 \times X_0$ et $\gamma(y) \in X_0' \times X_0'$, ce qui est impossible, car
$$\alpha(x) = \beta(y).$$
- $\gamma(x) \in X_0' \times X_0'$ et $\gamma(y) \in X_0 \times X_0$, ce qui est encore impossible.
- $\gamma(x) \in X_0' \times X_0'$ et $\gamma(y) \in X_0' \times X_0'$; dans ce cas $\gamma(xy) \in X_0' \times X_0'$.

REMARQUES. 1° Si C est un demi-groupe, la seule sous-catégorie semi-pleine est C. Si G est un groupe, le seul sous-groupoïde semi-plein est G.

2° Soit E un ensemble, C la catégorie des couples associée à E et X un sous-ensemble de E. Nous pouvons associer à X le sous-ensemble X_0 de C_0 formé des couples (x, x), où $x \in X$. La proposition 1 montre que la relation R de E vers E définie par

$$(a, b) \in R \quad \text{ssi} \quad [(a, b) \in X \times X \text{ ou } b \notin X]$$

est un préordre sur E [1-1].

3° Avec les mêmes notations, comme C est un groupoïde, la proposition 2 montre que la relation R' de E vers E définie par

$$(a, b) \in R' \quad \text{ssi} \quad [(a, b) \in X \times X \text{ ou } [a \notin X, \ b \notin X]]$$

est une équivalence sur E [2].

2. Sous-catégories semi-pleines maximales.

On dit qu'une sous-catégorie A de C (resp. un sous-groupoïde A de G) est *propre* si $A \neq C$ (resp. $A \neq G$).

DEFINITION 4. Nous dirons qu'une sous-catégorie semi-pleine A de la catégorie C est *maximale* (resp. qu'un sous-groupoïde semi-plein du groupoïde G est *maximal*) lorsque:

1° A est propre.

2° Si A' est une sous-catégorie semi-pleine de C (resp. un sous-groupoïde semi-plein de G) qui soit propre et qui contienne A, alors $A = A'$.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant:

THEOREME 1. *Soit C une catégorie transitive (c'est-à-dire telle que: $\gamma(C) = C_0 \times C_0$). Pour toute partie X_0 non vide et strictement contenue dans C_0, la sous-catégorie semi-pleine $C(X_0)$ est maximale; toutes les*

sous-catégories semi-pleines maximales sont du type $C(X_0)$*; leur nombre* † *est* $2^{|C_0|}-2$*; enfin toute sous-catégorie semi-pleine propre de* C *qui contient* C_0 *est une intersection de sous-catégories semi-pleines de type* $C(X_0)$ *(et par suite maximales).*

Au préalable, précisons la terminologie. Soit E un ensemble, P un préordre sur E. Une partie X de E est dite P*-saturée* si

$$[(a,b)\in P,\ b\in X] \rightarrow a\in X.$$

Pour tout $a\in E$, la section $\overleftarrow{a}$ est l'ensemble des $x\in E$ tels que $(x,a)\in P$; c'est donc la plus petite partie P-saturée qui admet a pour élément.

LEMME 1. *Si* C *est une catégorie transitive,* X_0 *et* Y_0 *deux parties de* C_0 *non vides et distinctes de* C_0*, l'égalité* $C(X_0)=C(Y_0)$ *entraîne* $X_0=Y_0$.

PREUVE. Supposons $X_0\neq Y_0$. Il existe par exemple $e\in X_0$ tel que $e\notin Y_0$. D'autre part, il existe $e'\in C_0-X_0$. Puisque C est transitive, il existe $x\in C$ tel que $\gamma(x)=(e',e)$. Donc $x\in C(Y_0)$ et $x\notin C(X_0)$, ce qui entraîne $C(X_0)\neq C(Y_0)$.

LEMME 2. *Si* C *est une catégorie transitive et* X_0 *une partie de* C_0 *non vide et distincte de* C_0*, la sous-catégorie semi-pleine* $C(X_0)$ *est maximale.*

PREUVE. Soit $e'\in C_0-X_0$ et $e\in X_0$. Puisque C est transitive, il existe $x\in C$ tel que $\gamma(x)=(e',e)$. On a $x\notin C(X_0)$, de sorte que $C(X_0)$ est propre. — Supposons maintenant que A soit une sous-catégorie semi-pleine propre de C qui contienne strictement $C(X_0)$. Il existe a et b tels que l'on ait

$$a\in A-C(X_0) \quad \text{et} \quad b\in C-A \qquad (1).$$

Les relations $a\notin C(X_0)$, $b\notin C(X_0)$ signifient

$$[\alpha(a)\in X_0,\ \beta(a)\notin X_0] \quad \text{et} \quad [\alpha(b)\in X_0,\ \beta(b)\notin X_0].$$

Il existe $a'\in C$ et $b'\in C$ tels que

$$\gamma(a')=(\beta(b),\beta(a)) \quad \text{et} \quad \gamma(b')=(\alpha(a),\alpha(b)).$$

† Ceci signifie que le cardinal de l'ensemble des sous-catégories semi-pleines maximales de C est 2^n-2 si le cardinal $|C_0|$ de C_0 est l'entier n et $2^{|C_0|}$ si $|C_0|$ est infini.

Il en résulte $a' \epsilon C(X_0)$, $b' \epsilon C(X_0)$ et, comme $C(X_0)$ contient A, les éléments a', a et b' appartiennent à A. Le composé $a'ab'$ étant défini et A étant stable, il vient $a'ab' \epsilon A$. Or

$$\beta(a'ab') = \beta(a') = \beta(b) \quad \text{et} \quad \alpha(a'ab') = \alpha(b') = \alpha(b).$$

Comme A est semi-pleine et $a'ab' \epsilon A$, on doit avoir $b \epsilon A$. Ceci est contraire à (1) et démontre le lemme.

COROLLAIRE. Les lemmes 1 et 2 nous montrent déjà qu'une catégorie transitive C possède au moins $2^{|C_0|} - 2$ sous-catégories semi-pleines maximales.

LEMME 3. *Soit C une catégorie quelconque, A une sous-catégorie de C contenant C_0. L'ensemble $\gamma(A)$ est un préordre sur C_0, noté P_A.*

PREUVE. Il est clair que P_A est réflexive. Supposons $(e, e') \epsilon P_A$ et $(e', e'') \epsilon P_A$. Il existe $x \epsilon A$ et $y \epsilon A$ tels que

$$(e, e') = \gamma(x) \quad \text{et} \quad (e', e'') = \gamma(y).$$

Comme xy est défini et que A est une sous-catégorie, il vient $xy \epsilon A$. Donc $(e, e'') = \gamma(xy) \epsilon P_A$ et P_A est transitive.

LEMME 4. *Si A est une sous-catégorie de C contenant C_0 et si P_A est le préordre défini ci-dessus, pour toute partie X_0 de C_0 qui est P_A-saturée, on a $A \subset C(X_0)$.*

PREUVE. Soit $a \epsilon A$. Par définition, $\gamma(a) \epsilon P_A$. Si $\alpha(a) \notin X_0$, alors a appartient à $C(X_0)$. Si $\alpha(a) \epsilon X_0$, comme $\gamma(a) \epsilon P_A$ et que X_0 est P_A-saturé, il vient $\gamma(a) \epsilon X_0$. Donc $\gamma(a) \epsilon X_0 \times X_0$, soit $a \epsilon C(X_0)$.

COROLLAIRE. Dans une catégorie transitive C, toute sous-catégorie semi-pleine maximale A est du type $C(X_0)$. En effet, A contient C_0. Par ailleurs, il existe une partie X_0 de C_0 qui est P_A-saturée et distincte de C_0, sans quoi la section associée à tout $e \epsilon C_0$ serait $C_0 \times C_0$ et on aurait $P_A = C_0 \times C_0$, d'où $A = C$. Pour une telle partie, d'après le lemme 4, on a $A \subset C(X_0)$. Par suite $A = C(X_0)$.

LEMME 5. *Si A est une sous-catégorie semi-pleine de la catégorie transitive C contenant C_0 et si $f(P_A)$ désigne l'ensemble des parties P_A-sa-*

turées, on a $A = \bigcap_{X_0 \in f(P_A)} C(X_0)$.

PREUVE. 1° L'inclusion dans un sens résulte du lemme 4.

2° Soit réciproquement a un élément de l'intersection. Considérons la section $S = \overleftarrow{a}(a)$ dans C_0 relativement à P_A. Comme $S \in f(P_A)$, on trouve $a \in C(S)$. La relation $a(a) \in S$ entraîne $\gamma(a) \in S \times S$, d'où $\gamma(a) \in P_A$. Il existe donc $a' \in A$ tel que $\gamma(a) = \gamma(a')$. Comme A est semi-pleine, $a \in A$. Ceci achève la démonstration du lemme, et celle du théorème 1.

Appliquons le théorème 1 lorsque C est la catégorie des couples associée à un ensemble. Nous obtenons:

THEOREME 2. *Si E est un ensemble, pour toutes les parties X de E qui sont non vides et distinctes de E, les relations P_X définies par*

$$(a, b) \in P_X \quad ssi \quad (a, b) \in X \times X \ ou \ b \notin X$$

sont les préordres maximaux sur E. Tout préordre sur E qui est distinct de $E \times E$ est une intersection de préordres maximaux.

REMARQUES.

1° γ définit un foncteur de C vers la catégorie des couples associée à C_0. Si C est transitive, les sous-catégories semi-pleines A de C sont les images réciproques par γ des préordres sur C_0 ; en associant P_A à A, on définit un isomorphisme de l'ensemble ordonné des sous-catégories semi-pleines de C sur l'ensemble ordonné des préordres sur C_0. Donc les sous-catégories semi-pleines maximales de C correspondent aux préordres maximaux sur C_0.

2° Appelons *sous-catégorie maximale de C* une sous-catégorie propre A de C telle que, si A' est une sous-catégorie propre de C contenant A, on ait $A' = A$. Une sous-catégorie maximale contient évidemment C_0, mais elle n'est pas toujours semi-pleine. Inversement, une sous-catégorie semi-pleine maximale de C peut ne pas être une sous-catégorie maximale de C, comme le montre l'exemple suivant: Soit G et G' deux groupes abéliens d'ordre 2 ; soit C la sous-catégorie pleine de la catégorie des homomorphismes entre groupes abéliens ayant G et G' pour objets. La sous-catégorie semi-pleine maximale $C(X_0)$ associée à l'ensemble X_0 ayant

pour seul élément l'homomorphisme identique de G n'est pas une sous-catégorie maximale; en effet, elle est contenue strictement dans la sous-catégorie propre de C formée de tous les éléments de C à l'exception de l'isomorphisme de G sur G'.

3. Sous-groupoïdes maximaux d'un groupoïde.

DEFINITION 5. On appelle *sous-groupoïde maximal* d'un groupoïde G un sous-groupoïde propre A de G tel que, pour tout sous-groupoïde propre A' de G contenant A, on ait $A' = A$.

Soit G un groupoïde. Un sous-groupoïde maximal contient évidemment G_0. Si A est un sous-groupoïde maximal et un sous-groupoïde semi-plein de G, alors A est un sous-groupoïde semi-plein maximal.

THEOREME 3. *Soit G un groupoïde transitif. Pour toute partie X_0 de G_0 non vide et strictement contenue dans G_0, le sous-groupoïde semi-plein $G[X_0]$ (proposition 2) est un sous-groupoïde maximal; tous les sous-groupoïdes semi-pleins maximaux sont du type $G[X_0]$, et leur nombre est $(2^{|G_0|}-2)/2$; enfin tout sous-groupoïde semi-plein propre de G qui contient G_0 est une intersection de sous-groupoïdes du type $G[X_0]$.*

LEMME 5. *Si G est un groupoïde transitif et si X_0 et Y_0 sont deux parties non vides de G_0 distinctes de G_0, on a*

$$G[X_0] = G[Y_0] \quad ssi \quad [X_0 = Y_0 \ ou \ X_0 = G_0 - Y_0].$$

PREUVE. 1° Dans un sens, la propriété est immédiate.

2° Supposons $G[X_0] = G[Y_0]$ et $X_0 \neq Y_0$. Il existe, par exemple, $e \in X_0$ tel que $e \notin Y_0$. Soit $e' \in X_0$; il existe $x \in G$ tel que $\gamma(x) = (e', e)$, d'où $x \in G[X_0]$; comme $\alpha(x)$ n'appartient pas à Y_0 et que $G[X_0] = G[Y_0]$, il vient $\beta(x) \notin Y_0$. Ainsi $e' \notin Y_0$ et X_0 est contenu dans $G_0 - Y_0$.

Supposons réciproquement $e'' \in G_0 - Y_0$. Il existe $x' \in G$ tel que $\gamma(x') = (e, e'')$; il vient $x' \in G[Y_0] = G[X_0]$; la relation $\beta(x') \in X_0$ entraîne que $\alpha(x') \in X_0$, c'est-à-dire $e'' \in X_0$.

LEMME 6. *Pour toute partie X_0 non vide et strictement contenue dans G_0 le sous-groupoïde semi-plein $G[X_0]$ est un sous-groupoïde maximal de G.*

PREUVE. Puisque X_0 est propre, il existe $e \in X_0$ et $e' \in G_0 - X_0$. Comme x n'appartient pas à $G[X_0]$ si $\gamma(x) = (e', e)$, $G[X_0]$ est propre.

Supposons que A soit un sous-groupoïde propre de G qui contient strictement $G[X_0]$. Il existe

$$a \in A - G[X_0] \quad \text{et} \quad b \in G - A \qquad (1).$$

Puisque $G[X_0]$ et A sont des groupoïdes, on peut supposer (en remplaçant éventuellement a ou b par leurs inverses) que les relations $a \notin G[X_0]$ et $b \notin G[X_0]$ se traduisent par

$$[\beta(a) \in X_0 \text{ et } \alpha(a) \notin X_0] \quad \text{et} \quad [\beta(b) \in X_0 \text{ et } \alpha(b) \notin X_0].$$

Il existe $a' \in G$ tel que $\gamma(a') = (\beta(a), \beta(b))$, d'où $a' \in G[X_0] \subset A$. Posons $b' = a^{-1} a' b$; puisque $\gamma(b') = (\alpha(a), \alpha(b))$, on a $b' \in G[X_0] \subset A$. L'égalité $b = a'^{-1} a\, b'$ entraîne $b \in A$, car A est un sous-groupoïde auquel appartiennent a', a et b'. Ceci étant contraire à (1), on en déduit que $G[X_0]$ est un sous-groupoïde maximal de G.

COROLLAIRE. Les lemmes 5 et 6 montrent qu'un groupoïde transitif G possède au moins $(2^{|G_0|} - 2)/2$ sous-groupoïdes semi-pleins maximaux (si le cardinal $|G_0|$ est infini, ceci signifie que l'ensemble des sous-groupoïdes semi-pleins de G admet $2^{|G_0|}$ pour cardinal).

LEMME 7. *Si A est un sous-groupoïde de G contenant G_0, la relation $\gamma(A)$ sur G_0 est une équivalence notée P'_A.*

La démonstration est analogue à celle du lemme 3.

LEMME 8. *Si A est un sous-groupoïde de G qui contient G_0 et si X_0 est une classe d'équivalence modulo P'_A, on a $A \subset G[X_0]$.*

PREUVE. Soit $a \in A$. Si $\alpha(a) \notin X_0$, comme $\gamma(a) \in P'_A$, il vient $\beta(a) \notin X_0$. Si $\alpha(a) \in X_0$, on a aussi $\beta(a) \in X_0$. Donc $a \in G[X_0]$.

COROLLAIRE. Le lemme 8 montre que tous les sous-groupoïdes semi-pleins maximaux de G sont du type $G[X_0]$.

LEMME 9. *Si A est un sous-groupoïde semi-plein propre de G qui contient G_0, alors* $A = \bigcap_{X_0 \in G_0 / P'_A} G[X_0]$.

PREUVE. 1° Dans un sens l'inclusion résulte du lemme 8.

2° Supposons que a soit un élément de l'intersection. Soit X_0 la classe de $\alpha(a)$ modulo P'_A. Comme $a \in G[X]$ et $\alpha(a) \in X_0$, il vient $\beta(a) \in X_0$, donc $\gamma(a) \in P'_A$. Il existe par conséquent $a' \in A$ tel que $\gamma(a) = \gamma(a')$, d'où, A étant semi-plein, il vient $a \in A$.

Ceci achève la démontration du théorème 3.

Si G est le groupoïde des couples associé à un ensemble, il vient

THEOREME 4. *Si E est un ensemble, pour toutes les parties X de E qui sont non vides et distinctes de E, les relations C_X définies par*

$$(a, b) \in C \quad \text{ssi} \quad [(a, b) \in X \times X \text{ ou } [a \notin X \text{ et } b \notin X]]$$

sont les équivalences maximales sur E. Leur nombre est $(2^{|E|} - 2)/2$. Toute équivalence sur E qui est distincte de $E \times E$ est une intersection d'équivalences maximales †.

Soit e une unité du groupoïde G; nous désignons par G_e le sous-groupe de G en e (formé des éléments de source et but e). Si G est transitif, tous les groupes G_e sont isomorphes.

THEOREME 5. *Un sous-groupoïde A d'un groupoïde transitif G est un un sous-groupoïde maximal de G si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

1° A est un sous-groupoïde semi-plein maximal de G.

2° A est transitif, $A_0 = G_0$ et le sous-groupe plein A_e de A en e est un sous-groupe maximal de G_e.

La démonstration utilise les lemmes suivants:

LEMME 10. *Si A et B sont des sous-groupoïdes transitifs du groupoïde G tels que $A_0 = G_0 = B_0$ et $A \subset B$, on a $A = B$ si, et seulement si, on a $A_e = B_e$ pour une unité e de G.*

PREUVE. Soit $z \in G$. Il existe $x \in A$ et $x' \in A$ tels que $\gamma(x) = (\alpha(z), e)$ et $\gamma(x') = (\alpha(z), e)$; posons $y = x'^{-1} z x$. On a $z \in B$ ssi $y \in B_e$. Par suite, B est formé des éléments z de G de la forme

† Résultat dû à Ore (cf [2]).

$$z = x' y x^{-1}, \quad \text{où } x \in A,\ x' \in A,\ y \in B_e.$$

LEMME 11. *Soit A un sous-groupoïde transitif de G tel que $A_0 = G_0$. Si e est une unité de G et K un sous-groupe de G_e contenant A_e, il existe un sous-groupoïde B de G contenant A tel que $B_e = K$.*

PREUVE. On voit facilement que B est formé des éléments z de G tels qu'il existe $x \in A$, $x' \in A$ et $y \in K$ vérifiant $z = x' y x^{-1}$.

PREUVE DU THEOREME 5. 1° Si la condition 1 est vérifiée, A est un sous-groupoïde maximal de G d'après le théorème 3.

2° Si la condition 2 est satisfaite et si B est un sous-groupoïde contenant A, alors A_e est contenu dans B_e, d'où $A_e = B_e$ et $B = A$ (lemme 10).

3° Soit A un sous-groupoïde maximal de G. Il contient G_0.

- Si A n'est pas transitif, l'équivalence P'_A est propre; d'après le lemme 8, A est contenu dans $G[X_0]$, où X_0 est une classe modulo P'_A, de sorte que $A = G[X_0]$.

- Si A est transitif, $A_e \neq G_e$ d'après le lemme 10. Si K est un sous-groupe propre de G_e contenant A_e, le lemme 11 assure qu'il existe un sous-groupoïde propre B de G contenant A tel que $B_e = K$. Il s'ensuit $B = A$, d'où $K = A_e$. Ainsi la condition 2 est remplie.

COROLLAIRE. Soit G un groupoïde et I l'ensemble de ses composantes G_i. Les G_i sont des groupoïdes transitifs dont G est la somme. Par suite un sous-groupoïde A de G est maximal si, et seulement si, il existe un i tel que $A \cap G_i$ soit un sous-groupoïde maximal de G_i et que $A \cap G_j = G_j$ pour tout $j \in I$, $j \neq i$. Le théorème 5 permet donc de caractériser tous les sous-groupoïdes maximaux de G.

Bibliographie.

1. J. CHACRON, 1° Treillis des sous-catégories semi-pleines d'une catégorie, *C. R. A. S., Paris, t. 270* (1969), p. 438-440.
2° Nouvelles correspondances de Galois, *Bull. Soc. Math. Belgique* (sous presse).

2. O. ORE, Theory of equivalence relations, *Duke Math. J. IX* (1942), p.573.

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences, 33 rue Saint-Leu
80 - AMIENS