CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

MARIO CHARTRELLE

Sur la catégorie des applications quasi-continues

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 2 (1969), p. 215-226

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_2_215_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE Vol. XI,2
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

SUR LA CATEGORIE DES APPLICATIONS QUASI-CONTINUES

par Mario CHARTRELLE

Introduction.

Les quasi-topologies s'introduisent d'une manière naturelle dès qu'on veut considérer de «bonnes» structures sur l'ensemble des applications continues entre deux espaces topologiques quelconques [2]. Dans cet article nous allons étudier les propriétés algébriques de la catégorie P^o des applications quasi-continues associée à un univers U, et de son foncteur d'oubli $\hat{\theta}$ vers la catégorie $\mathfrak{M}^o$ des applications.

Le 1er paragraphe commence par rappeler les définitions relatives aux quasi-topologies (introduites par Kowalsky sous le nom de Limesraüme [8]) et les premières propriétés de la catégorie P^o [2]. Nous démontrons ensuite que toute quasi-topologie π sur $E \in U$ peut être «universellement» plongée dans une quasi-topologie séparée et dans une quasi-topologie compacte associées à U.

Le 2ème paragraphe est consacré à l'étude de la quasi-topologie $\lambda(\pi', \pi)$ de la convergence locale [2] sur l'ensemble des applications quasi-continues de π vers π'. Nous montrons que celle-ci a des propriétés analogues à celles [3] de la topologie de la convergence compacte sur l'ensemble des applications continues entre espaces topologiques localement compacts (à laquelle elle s'identifie si π et π' s'identifient à des topologies et si π est localement compacte : (P^o, λ) est une catégorie fortement $\hat{\theta}$-dominée [5], $\hat{\theta}$-hyperdominée et tensoriellement $\hat{\theta}$-dominée [3]. En particulier P^o est une catégorie cartésienne fermée au sens de [7], et $(P^o, \hat{\theta})$ est un couple complet fermé selon [1] (résultat implicitement admis dans la dernière phrase de [1]).

Les notations et la terminologie sont celles de [4].

1. Quasi-topologies.

Soient E un ensemble et $(F(E), \subset)$ la classe locale de tous les filtres sur E ordonnée par la relation d'inclusion.

On appelle *idéal* de $F(E)$ un filtre de $(F(E), \subset)$. c'est-à-dire une partie I de $F(E)$ saturée par co-induction ($F \in I$ et $F \subset F'$ entraînent $F' \in I$) et telle que, si $F \in I$ et $F' \in I$, alors $F \wedge F' \in I$ (en notant $F \wedge F'$ le filtre intersection dont les éléments sont les ensembles $A \cup A'$, où $A \in F$ et $A' \in F'$).

Si (E', f, E) est une application et F un filtre sur E, on note fF le filtre sur E' engendré par $f(F)$.

1. DEFINITIONS.

a) On appelle *quasi-topologie sur* E une application π de E dans l'ensemble des idéaux de $F(E)$ telle que le filtre $x^{\mathfrak{E}}$ des sur-ensembles de x appartienne à $\pi(x)$ pour tout $x \in E$.

Si $F \in \pi(x)$, on dit que F *quasi-converge* vers x et on écrit $F \pi x$.

(E, π) est appelé *espace quasi-topologique.*

(b) La quasi-topologie π est *séparée* si $\pi(x) \wedge \pi(y) = \emptyset$ lorsque $x \neq y$.

(c) Point pseudo-adhérent. Ensemble pseudo-fermé : Soit (E, π) un espace quasi-topologique. Si F est un filtre sur E, tel qu'il existe un ultrafiltre F' qui contient F et qui quasi-converge vers x, on dit que x est un *point pseudo-adhérent à* F. Une partie $E' \subset E$ est dite *pseudo-fermée* (pour π) si elle contient ses points pseudo-adhérents, i.e. les points pseudo-adhérents à un filtre auquel appartient E'.

d) Quasi-topologie compacte : On dit que l'espace quasi-topologique (E, π) est *compact* si tout ultrafiltre sur E quasi-converge, si tout filtre qui admet un seul point pseudo-adhérent quasi-converge et si π est séparée.

e) On appelle *application quasi-continue* un triplet (π', f, π), où π' et π sont des quasi-topologies sur E' et E respectivement, et où (E', f, E) est une application telle que $F \pi x$ entraîne $fF \pi' f(x)$ pour

tout $x \in E$. On pose :

$$\pi = \alpha(\pi', f, \pi) \text{ et } \pi' = \beta(\pi', f, \pi).$$

PROPRIETES.

a) Si π est une quasi-topologie sur E, l'ensemble des parties V de E telles que $V \in \Lambda\pi(x)$ pour tout $x \in V$ définit une topologie $\hat{\tau}(\pi)$ sur E. Et tout filtre quasi-convergeant vers x dans π converge vers x dans $\hat{\tau}(\pi)$.

b) Si (π', f, π) est une application quasi-continue, $(\hat{\tau}(\pi'), f, \hat{\tau}(\pi))$ est continue.

2. Soient U un univers et P_o l'ensemble des espaces quasi-topologiques (E, π) tels que $E \in U$, P^o la catégorie des applications quasi-continues entre éléments de P_o munie de la loi de composition :

$$(\pi'', f', \overline{\pi}') \circ (\pi', f, \pi) = (\pi'', f' \circ f, \pi)$$

si, et seulement si, $\overline{\pi}' = \pi'$.

On identifie la quasi-topologie π sur E à l'unité $i_\pi = (\pi, i_E, \pi)$ de P^o. En associant (E', f, E) à une application quasi-continue (π', f, π) on définit un foncteur d'oubli $\hat{\theta}$ de P^o vers la catégorie $\mathfrak{M}^o$ des applications associées à U.

PROPRIETES. [2]

a) $\hat{\theta}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé.

b) P^o est à I-produits pour tout $I \in U$: Si $(\pi_i)_{i \in I}$ est une famille de quasi-topologies, et si $(E_i, \pi_i) \in P_o$ et $I \in U$, la quasi-topologie produit est $\pi = \prod_{i \in I} \pi_i$, quasi-topologie sur $E = \prod_{i \in I} E_i$ telle que l'on ait $F\pi(x_i)_{i \in I}$ si, et seulement si, $p_i F \pi_i x_i$ pour tout $i \in I$, où p_i est la projection canonique de E sur E_i. Si π_i est séparée (resp. compacte) pour tout $i \in I$, il en est de même pour π.

c) $\hat{\theta}$ est $\rightarrowtail$-étalant : Si $E' \subset E$, la $\hat{\theta}$-sous-structure π/E' de π sur E' est la quasi-topologie définie par $F \in (\pi/E')(x)$, où $x \in E'$, si, et seulement si, $\overline{F}\,\pi x$ (en appelant $\overline{F}$ le filtre engendré par F sur E). On l'appelle *quasi-topologie induite par π sur E'*. Si π est séparée (resp. si π est compacte et E' pseudo-fermé), π/E' est séparée (resp.

compacte). Si π est séparée et π/E' compact, alors E' est pseudo-fermé pour π.

d) Les propriétés b et c entraînent que $\hat{\theta}$ est un foncteur à $C^{\bullet}$-limites projectives, si $C^{\bullet}$ est une catégorie et $C \in U$. Soit $\hat{\pi}$ le foncteur de P^o vers la catégorie $\mathcal{T}^o$ des applications continues qui, à une application quasi-continue (π', f, π), associe l'application continue $(\hat{\tau}(\pi'), f, \hat{\tau}(\pi))$.

PROPOSITION. *Le foncteur $\hat{\tau}$ admet un coadjoint.*

PREUVE. Si T est une topologie sur E, on peut définir une quasi-topologie $\hat{\pi}(T)$ sur E comme suit :

$$\hat{\pi}(T)(x) = \{F \in F(E) \mid V(x) \subset F\},$$

où $V(x)$ est le filtre des voisinages de x dans T, pour tout $x \in E$. Considérons

$$\hat{\tau}(\hat{\pi}(T)) = \{M \subset E \mid M \in \bigwedge \hat{\pi}(T)(x),\ \forall x \in M\}.$$

Comme $\bigwedge \hat{\pi}(T)(x) = V(x)$, on a $\hat{\tau}(\hat{\pi}(T)) = T$. Soit π' une quasi-topologie sur E', et $\hat{f} = (T, f, \hat{\tau}(\pi'))$ une application continue. Montrons que $\hat{f}$ se relève dans P^o en une application quasi-continue unique de π' vers $\hat{\pi}(T)$. Si F' est un filtre appartenant à $F(E')$ tel que $F' \pi' y$, alors F' converge vers y pour $\hat{\tau}(\pi')$. $(T, f, \hat{\tau}(\pi'))$ étant continue, fF' converge vers $f(y)$ pour T. Donc fF' quasi-converge vers $f(y)$ pour $\hat{\pi}(T)$, par définition. Ainsi f se relève en une application quasi-continue $\hat{f} = (\hat{\pi}(T), f, \pi')$. D'autre part $\hat{f}$ est unique, car on a $\hat{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in \hat{\theta}(\pi')$. Ainsi $\hat{\pi}(T)$ est une $\hat{\tau}$-structure colibre associée à T. Il s'ensuit qu'il existe un foncteur $\hat{\pi}$ de $\mathcal{T}^o$ vers P^o adjoint de $\hat{\tau}$; à l'application continue (T', f, T), il associe l'application quasi-continue $(\hat{\pi}(T'), f, \hat{\pi}(T))$.

COROLLAIRE. *Le foncteur $\hat{\pi}$ admet $\hat{\tau}$ pour adjoint.*

Si π est une quasi-topologie et s'il existe une topologie T telle que $\pi = \hat{\pi}(T)$, on dit que π *s'identifie à la topologie* T.

3. En notant P_s^o (resp. P_c^o) la sous-catégorie pleine de P^o formée des

applications quasi-continues entre espaces quasi-topologiques séparés (resp. compacts), on définit un foncteur injection canonique (P^o, i, P^o_s) (resp. (P^o, i, P^o_c)).

THEOREME. *(P^o, i, P^o_s) (resp. (P^o, i, P^o_c)) admet un adjoint.*

PREUVE. Soient $\hat{U}$ un univers tel que $U \subset \hat{U}$ et $U \in \hat{U}$, et (E, π) un espace quasi-topologique tel que $E \in U$.

1°) On considère $I = \{ f \in P \mid f = (\pi', \underline{f}, \pi),\ \pi'$ séparé (resp. π' compact)$\}$.

On forme $\hat{\pi} = \prod_{f \in I} \beta(f)$; montrons que ce produit est un élément de $\hat{P}^o_o$, en notant $\hat{P}^o$ la catégorie des applications quasi-continues associée à $\hat{U}$. Pour cela, il suffit de montrer que l'ensemble $\hat{E}$ sous-jacent à $\hat{\pi}$ appartient à $\hat{U}$, ou encore, $\hat{U}$ étant un univers, que $I \in \hat{U}$. Or :

$$I \subset \bigcup_{\pi' \in P^o_o} \pi' \circ P \circ \pi, \text{ où } \pi' \circ P \circ \pi = \{ f \in P \mid \alpha(f) = \pi,\ \beta(f) = \pi' \}.$$

Soit π' une quasi-topologie sur $E' \in U$; on a $\pi' \in \mathfrak{A}(E')$, en posant :

$$A_{E'} = \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E'))) \text{ et } \mathfrak{A}(E') = A_{E'} \circ \mathfrak{M} \circ E'.$$

On a $E' \in \{E'\}$; comme $E' \in U$, alors $\{E'\} \in U$, et $A_{E'} \in U$, d'où

$$\mathfrak{A}(E') \subseteq \{A_{E'}\} \times \mathfrak{P}(A_{E'} \times E') \times \{E'\} \in U,$$

c'est-à-dire $\mathfrak{A}(E') \in U$. Si $f = (\pi', \underline{f}, \pi) \in P$, on trouve

$$f \in \mathfrak{A}(E') \times \mathfrak{P}(E' \times E) \times \mathfrak{A}(E) \in U,$$

car $\underline{f} \in \mathfrak{P}(E' \times E)$. Il s'ensuit $\pi' \circ P \circ \pi \in U$. Par ailleurs

$$P^o_o = \{ \pi' \mid E' = \hat{\theta}(\pi') \in U \} \subset \bigcup_{E' \in U} \mathfrak{A}(E').$$

Comme $U \in \hat{U}$, on a $\bigcup_{E' \in U} \mathfrak{A}(E') \in \hat{U}$. Donc

$$P^o_o \in \hat{U} \text{ et } \bigcup_{\pi' \in P^o_o} \pi' \circ P \circ \pi \in \hat{U},$$

ce qui entraîne $I \in \hat{U}$. Il en résulte $\hat{E} \in \hat{U}$, d'où $\hat{\pi} \in \hat{P}^o_o$.

De plus $\hat{\pi}$ est séparée (resp. compacte), d'après la propriété b.

Pour tout $f \in I$, soit p_f la projection canonique de $\hat{\pi}$ vers $\beta(f)$; soit $\hat{f}$ l'unique application quasi-continue telle que $p_f \circ \hat{f} = f$.

2°) Considérons le cas des séparés : Soit $\hat{f}(E) = \tilde{E} \subset \hat{E}$, et

$\tilde{\pi} = \hat{\pi}/\tilde{E}$. On a ainsi un sous-espace séparé $(\tilde{E}, \tilde{\pi})$ de $(\hat{E}, \hat{\pi})$. $\tilde{E}$ est équipotent à un élément E_1 de U. Soit $\underline{\varphi}$ une bijection de $\tilde{E}$ sur E_1. Prenons sur E_1 la quasi-topologie image de $\tilde{\pi}$ par $\underline{\varphi}$; notons π_1 cette quasi-topologie et $\varphi = (\pi_1, \underline{\varphi}, \tilde{\pi})$. Si $i = (\hat{\pi}, \iota, \tilde{\pi})$ désigne l'injection quasi-continue canonique et $\tilde{f} = (\tilde{\pi}, \underline{\hat{f}}, \pi)$ la restriction de $\hat{f}$ à $(\tilde{E}, \tilde{\pi})$, on a $\hat{f} = i \circ \tilde{f}$.

Soit $J = \varphi \circ \tilde{f}$. J est quasi-continue et, $\tilde{\pi}$ étant séparé, son image π_1 par φ est séparée. Donc $J \in I$.

Si $f = (\pi', \underline{f}, \pi) \in I$, considérons $f' = p_f \circ i \circ \varphi^{-1}$; on a $f' \in P$ et

$$f' \circ J = p_f \circ i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{f} = p_{\cdot f} \circ \hat{f} = f.$$

Si $f'' \in P$ est telle que $f'' \circ J = f' \circ J$, on trouve :

$$f'' \circ J = f'' \circ \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ J) = f'' \circ \varphi \circ \tilde{f} = f' \circ \varphi \circ \tilde{f}.$$

Comme $\underline{\tilde{f}}$ est une surjection sur $\tilde{E}$, $\tilde{f}$ est un épimorphisme; donc

$$f'' \circ \varphi = f' \circ \varphi$$

et, $\underline{\varphi}$ étant une bijection, on a $f'' = f'$. Ainsi (E_1, π_1) est un (P^o, i, P^o_s)-objet libre engendré par (E, π).

3°) Considérons le cas des compacts.

Soit $\overline{E}$ la pseudo-adhérence de $\hat{f}(E)$. $(\hat{E}, \hat{\pi})$ étant compact, $(\overline{E}, \hat{\pi}/\overline{E}) = (\overline{E}, \overline{\pi})$ est compact.

Soit $\tilde{U} = \{E \in \hat{U} \mid E$ équipotent à un élément de $U\}$. Alors $\tilde{U}$ est un univers auquel appartient $\tilde{E} = \hat{f}(E)$. Si $x \in \overline{E}$, il existe un filtre F_x qui quasi-converge vers x pour $\hat{\pi}$ et auquel appartient $\tilde{E}$. Choisissons un tel filtre, et notons $\tilde{F}_x$ le filtre induit par F sur $\tilde{E}$. L'application $x \to \tilde{F}_x$ de $\overline{E}$ dans $F(\tilde{E})$ est une injection, la quasi-topologie $\hat{\pi}$ étant séparée et F_x quasi-convergeant vers x. Donc $\overline{E}$ est équipotent à une partie de $F(\tilde{E})$. Comme $F(\tilde{E}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\tilde{E})) \in \tilde{U}$, il s'ensuit $\overline{E} \in \tilde{U}$, de sorte qu'il existe une bijection $\hat{\varphi}$ de $\overline{E}$ sur un élément $\overline{E}_1$ de U. Soit $\overline{\pi}_1$ la quasi-topologie image de $\overline{\pi}$ par $\underline{\hat{\varphi}}$, et $\hat{\varphi} = (\overline{\pi}_1, \underline{\hat{\varphi}}, \overline{\pi})$. Alors $(\overline{E}_1, \overline{\pi}_1)$ est compact, puisque c'est l'image par la bijection $\underline{\hat{\varphi}}$ d'un compact, et $\overline{E}_1$ est la pseudo-adhérence pour $\overline{\pi}_1$ de $\hat{\varphi}(\tilde{E})$. Soient $\overline{J} = \hat{\varphi} \circ \overline{f}$, en notant $\overline{f}$ la restriction de $\hat{f}$ à $(\overline{E}, \overline{\pi})$, et $i = (\hat{\pi}, \iota, \overline{\pi})$. On a $J \in I$. Soit $f = (\pi', \underline{f}, \pi) \in I$;

on obtient $f' \circ J = f$, en posant $f' = p_f \circ i \circ \varphi^{-1}$. Si $f'' \circ J = f' \circ J$, il existe un noyau n de (f'', f') dans P^0_c; c'est l'application injection quasi-continue de (E_2, π_2) dans $(\bar{E}_1, \bar{\pi}_1)$, avec

$$E_2 = \{x_1 \in \bar{E}_1 \mid f'(x_1) = f''(x_1)\} \text{ et } \pi_2 = \bar{\pi}_1 / E_2 .$$

E_2 contient $J(E) = \hat{\varphi}(\tilde{E})$. De plus il est pseudo-fermé dans $\bar{\pi}_1$; en effet, si F est un filtre sur E_2 tel que $F \in \pi_2(x)$, où x appartient à la pseudo-adhérence $\bar{E}_2$ de E_2, on a

$$f'F = f''F, \quad f'F \in \pi'(f'(x)) \text{ et } f'F \in \pi'(f''(x)).$$

π' étant séparée, $f'(x) = f''(x)$, donc $x \in E_2$ c'est-à-dire $\bar{E}_2 = E_2$. Il en résulte $E_2 = \bar{E}_1$, et par suite $f' = f''$. Ainsi $(\bar{E}_1, \bar{\pi}_1)$ est un (P^0, i, P^0_c)-objet libre engendré par (E, π). Le théorème en résulte.

2. Quasi-topologie de la convergence locale.

Soient U un univers, et π et π' deux quasi-topologies sur $E \in U$ et $E' \in U$ respectivement. Si G est un filtre sur $E' \circ \mathfrak{M} \circ E$ et F un filtre sur E (où $\mathfrak{M}^0$ est la catégorie des applications associées à U), les ensembles $B(A) = \bigcup_{f \in B} f(A)$ où $B \in G$, $A \in F$, engendrent un filtre sur E', noté GF. Si G est un filtre sur $\pi' \circ P \circ \pi$, on pose $GF = \hat{\theta}(G)F$. Pour tout $f \in \pi' \circ P \circ \pi$, soit $\lambda(f)$ l'ensemble des filtres G sur $\pi' \circ P \circ \pi$ tels que, pour tout $x \in E$ et tout $F \in \pi(x)$, on ait $GF \in \pi'(f(x))$.

1. DEFINITION. L'application $f \to \lambda(f)$ définit une quasi-topologie sur $\pi' \circ P \circ \pi$, notée $\lambda(\pi', \pi)$, qui est appelée *quasi-topologie de la convergence locale* [2].

PROPRIETES. [2]

a) Si π' est séparée, $\lambda(\pi', \pi)$ est séparée.

b) Si π' et π s'identifient à des topologies T' et T respectivement et si T est localement compacte, alors $\lambda(\pi', \pi) = \lambda(T', T)$ s'identifie à la topologie de la convergence compacte.

2. Soient $E \in U$ et π une quasi-topologie sur E. Soit X_π le foncteur de P^0 dans P^0 qui à $h \in P$ associe $h \times i_\pi$, où i_π est l'application quasi-continue identique de π vers π.

THEOREME. *Si (E', π') est un espace quasi-topologique, la quasi-topologie $\lambda(\pi', \pi)$ est un X_π-objet colibre associé à π', le X_π-coprojecteur correspondant étant $\eta_\pi(\pi') = (i_{\lambda(\pi', \pi)}, \hat{v})$, où $\hat{\theta}(\hat{v})$ est l'application $v : (f, x) \to f(x)$ de $(\pi' \circ P \circ \pi) \times E$ dans E'. Si C_π est le foncteur coadjoint de X_π associé à η_π [4], on a : $\hat{\theta}(C_\pi(h)) = Hom_{P^o}(h, i_\pi)$ pour $h \in P$.*

PREUVE.

a) Montrons [2] que v définit une application quasi-continue $\hat{v}$ de $\lambda(\pi', \pi) \times \pi$ vers π'. Soient G un filtre sur $\pi' \circ P \circ \pi$ tel que $G \in \lambda(f)$ et F un filtre sur E tel que $F \in \pi(x)$. Le filtre $v\,G \times F$ est engendré par l'ensemble des classes $B(A) = \bigcup_{f \in B} f(A)$, où $A \in F$ et $B \in G$; il est donc identique au filtre GF. Par définition de $\lambda(f)$ on a $GF \in \pi'(f(x))$, c'est-à-dire $v\,G \times F \in \pi'(v(f, x))$. Donc $\hat{v} \in P$.

b) Soient (E_1, π_1) un espace quasi-topologique et g une application quasi-continue de $\pi_1 \times \pi$ dans π'. Soit g' l'application de E_1 dans $\pi' \circ P \circ \pi$ associant à $x_1 \in E_1$ l'application quasi-continue g_{x_1} de π vers π' telle que $g_{x_1}(x) = g(x_1, x)$. Montrons [2] que g' définit une application quasi-continue $\hat{g}'$ de π_1 vers $\lambda(\pi', \pi)$. Soient F_1 un filtre sur E_1 tel que $F_1 \in \pi_1(x_1)$ et F un filtre sur E tel que $F \in \pi(x)$. Le filtre $g(F_1 \times F)$ est engendré par l'ensemble des classes $g(B_1 \times A)$, où $B_1 \in F_1$ et $A \in F$. Comme

$$g(B_1 \times A) = \bigcup_{x'_1 \in B_1} g(\{x'_1\} \times A) = \bigcup_{x'_1 \in B_1} g_{x'_1}(A) = \bigcup_{h' \in g'(B_1)} h'(A) = g'(B_1)(A),$$

les filtres $g(F_1 \times F)$ et $g'(F_1)F$ sont identiques. Puisque g est quasi-continue, on a $g(F_1 \times F) \in \pi'(g(x_1, x))$, c'est-à-dire $g'(F_1)(F) \in \pi'(g'(x_1)(x))$, d'où $g'(F_1) \in \lambda(g'_{x_1})$, et par conséquent $\hat{g}'$ existe.

c) On a ainsi :

$$\hat{v} \circ X_\pi(\hat{g}')(x_1, x) = v(g'(x_1), x) = g'(x_1)(x) = g(x_1, x),$$

c'est-à-dire $\hat{v} \circ X_\pi(\hat{g}') = g$. Si $\hat{v} \circ X_\pi(\hat{g}'') = g$, alors $\hat{\theta}(\hat{g}'') = \hat{\theta}(\hat{g}')$, et par suite $\hat{g}'' = \hat{g}'$. Ceci prouve que $(i_{\lambda(\pi', \pi)}, \hat{v})$ est un X_π-coprojecteur (résultat énoncé dans [3], complément 1 p. 208).

d) Soit C_π le foncteur coadjoint de X_π. Supposons de plus que

l'on ait $(E'', \pi'') \in P_o^o$ et soit $\eta_{\pi''}(\pi) = (i_{\lambda(\pi'',\pi)}, \hat{v}')$. Si h est une application quasi-continue de π'' vers π', l'application quasi-continue $C_\pi(h)$ de $\lambda(\pi'', \pi)$ dans $\lambda(\pi', \pi)$ est celle qui, à $f' \in (\pi'' \circ P \circ \pi)$, fait correspondre l'application quasi-continue de π vers π' qui associe $h \circ f'(x)$ à $x \in E$. On a donc $\hat{\theta}(C_\pi(h)) = Hom_{P^o}(h, i_\pi)$.

COROLLAIRE 1. *Soient (E, π), (E_1, π_1), (E', π') des espaces quasi-topologiques. Une application f de $E_1 \times E$ dans E' est quasi-continue de $\pi_1 \times \pi$ vers π' si, et seulement si,* ([2] *et* [6])

a) Pour tout $x_1 \in E_1$, l'application $x \to f(x_1, x)$ définit une application quasi-continue f_{x_1} de π vers π'.

b) L'application $x_1 \to f_{x_1}$ est quasi-continue de π_1 dans $\lambda(\pi', \pi)$.

COROLLAIRE 2. *Si (E, π) et (E', π') sont des espaces quasi-topologiques, $\lambda(\pi', \pi)$ est la moins fine des quasi-topologies $\hat{\pi}$ sur $\pi' \circ P \circ \pi$ telles que l'application $v : (f, x) \to f(x)$ définisse une application quasi-continue de $\hat{\pi} \times \pi$ vers π'* [2].

PROPOSITION. *Soient (E, π) et (E_i, π_i) pour tout $i \in I$ des espaces quasi-topologiques. Si (E', π') est l'espace quasi-topologique produit de $((E_i, \pi_i))_{i \in I}$, l'application $w : (f_i)_{i \in I} \to [f_i]_{i \in I}$ définit un quasi-homéomorphisme de $\hat{\pi} = \prod_{i \in I} \lambda(\pi_i, \pi)$ vers $\lambda(\pi', \pi)$ (où $f_i \in \pi_i \circ P \circ \pi$).*

PREUVE. Soit p_i la projection canonique de E' vers E_i, pour tout $i \in I$, et q_i celle de $L = \prod_{i \in I} (\pi_i \circ P \circ \pi)$ sur $\pi_i \circ P \circ \pi$. L'inverse de la bijection w est l'application $w' : f = [f_i]_{i \in I} \to (p_i \circ f)_{i \in I}$. Soit G un filtre sur L. On a $G \in \hat{\pi}((f_i)_{i \in I})$ si, et seulement si, $q_i G \in \lambda(\pi_i, \pi)(f_i)$, $\forall i \in I$, c'est-à-dire si, et seulement si, pour tout $x \in E$ et tout $F \in \pi(x)$, on a $q_i G F \in \pi_i(f_i(x))$. Or ceci équivaut à $(p_i w G F) \in \pi_i(f_i(x))$, car $p_i \circ w = q_i$, $\forall i \in I$, ou encore à $w G F \in \pi'((f_i)_{i \in I}(x))$, ce qui signifie $w G \in \lambda(\pi', \pi)([f_i]_{i \in I})$. Ainsi w définit un quasi-homéomorphisme.

3. THEOREME. *Il existe une catégorie $\hat{\theta}$-fortement dominée (P^o, λ), où λ est le foncteur de $P^o \times P^o$ vers P^o qui à $(\pi', \pi) \in P_o^o \times P_o^o$ associe $\lambda(\pi', \pi)$. De plus (P^o, λ) est une catégorie $\hat{\theta}$-hyperdominée et tensoriellement $\hat{\theta}$-dominée en tout $\pi \in P_o^o$.*

RAPPELS. Soient q un foncteur d'une catégorie $K^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}^{o}$ et $H^{\cdot}$ une catégorie.

1°) Si D est un foncteur de $H^{\cdot} \times H^{*}$ (où H^{*} est la duale de $H^{\cdot}$) vers $K^{\cdot}$ tel que $q \circ D = Hom_{H}.,.$, on dit que $(H^{\cdot}, D)$ est une *catégorie q-dominée* [4]. Si de plus pour tout triplet (e'', e', e) d'unités de $H^{\cdot}$ il existe un élément k de K ayant pour source un produit s de $(D(e'', e'), D(e', e))$ dans $K^{\cdot}$, pour but $D(e'', e)$ et tel que $q(k)$ soit l'application $(f', f) \to f' \circ f$ de $e''.H.e' \times e'.H.e$ dans $e''.H.e$, on dit que $(H^{\cdot}, D)$ est *fortement q-dominée* [5].

2°) Si $(K^{\cdot}, D')$ est une catégorie q-dominée et $H^{\cdot}$ une sous-catégorie pleine de $K^{\cdot}$, on dit que $(H^{\cdot}, D')$ est une *catégorie q-hyper-dominée* [3] si, pour tout triplet (e'', e', e) d'unités de $H^{\cdot}$, il existe un élément k de $D'(D'(e'', e), D'(e'', e')).K.D'(e', e)$ tel que $q(k)$ applique f sur $Hom_{K}.(e'', f)$.

3°) Soient $(H^{\cdot}, D)$ une catégorie q-dominée, et e une unité de $H^{\cdot}$; nous noterons $D(., e)$ le foncteur de $H^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ associant $D(f, e)$ à $f \in H$. On dit que $(H^{\cdot}, D)$ est une *catégorie tensoriellement q-dominée en* e si c'est une catégorie q-dominée, et s'il existe un foncteur X_{e} de $K^{\cdot}$ vers $H^{\cdot}$, dit *foncteur produit tensoriel par* e, vérifiant les conditions suivantes :

1) $D(., e)$ est un foncteur coadjoint de X_{e}; soit η l'application associant à $e' \in H_{o}^{\cdot}$ le coprojecteur $\eta(e') = (D(e', e), j_{e'})$ qui sert à définir $D(., e)$.

2) Si $s' \in K_{o}^{\cdot}$ et $e' \in H_{o}^{\cdot}$, il existe un inversible k de $K^{\cdot}$ de source $D(e', X_{e}(s'))$, de but $D(D(e', e), s')$ tel que $q(k)$ soit la bijection $\eta_{e's}$, associant à g l'unique g' vérifiant $j_{e'}.X_{e}(g') = g$.

DEMONSTRATION DU THEOREME.

A) Soient $(E, \pi), (E', \pi'), (E', \pi'')$ des espaces quasi-topologiques appartenant à P_{o}. Montrons (voir [2] et [6]) que l'application $k : (f', f) \to f' \circ f$ est quasi-continue de $\lambda(\pi'', \pi') \times \lambda(\pi', \pi)$ vers $\lambda(\pi'', \pi)$.

Soient $f \in \pi' \circ P \circ \pi$, $f' \in \pi'' \circ P \circ \pi'$, $G' \in \lambda(\pi'', \pi')(f')$ et $G \in \lambda(\pi', \pi)(f)$. Pour tout $x \in E$ et tout $F \in \pi(x)$, on a $GF \in \pi'(f(x))$. Puisque $G' \in \lambda(\pi'', \pi')(f')$, on trouve $G'GF \in \pi''(f' \circ f(x))$, c'est-à-dire $G'G = k(G' \times G) \in \lambda(\pi'', \pi)(f' \circ f)$.

B) Soient $f \in \pi \circ P \circ \pi_1$ et $g \in \pi_1' \circ P \circ \pi'$. L'application constante sur (g, f) définissant une application quasi-continue de $\lambda(\pi', \pi)$ vers $\lambda(\pi_1', \pi') \times \lambda(\pi, \pi_1)$, il résulte de A que l'application $f' \to g \circ f' \circ f$ définit une application quasi-continue $\lambda(g, f)$ de $\lambda(\pi', \pi)$ vers $\lambda(\pi_1', \pi_1)$. Le foncteur $\hat{\theta}$ étant fidèle, il s'ensuit que (P^o, λ) est une catégorie $\hat{\theta}$-dominée et, d'après A, une catégorie fortement $\hat{\theta}$-dominée [5].

C) De la partie A et du corollaire 1, on déduit que, si π, π', et π'' sont trois quasi-topologies, l'application $f \to Hom_{Po}(\pi'', f)$ définit une application quasi-continue k' de $\lambda(\pi', \pi)$ vers $\lambda(\lambda(\pi'', \pi), \lambda(\pi'', \pi'))$. Donc (P^o, λ) est une catégorie $\hat{\theta}$-hyperdominée.

D) Soit $\pi \in P_o^o$. Montrons que (P^o, λ) est une catégorie tensoriellement $\hat{\theta}$-dominée en π. On a vu qu'il existe un foncteur X_π de P^o vers P^o tel que $X_\pi(h) = h \times i_\pi$ pour tout $h \in P^o$, et que ce foncteur admet $\lambda(., i_\pi)$ pour coadjoint. Donc la 1ère condition est vérifiée.

Soit $\pi' \in P_o^o$ une quasi-topologie; π' engendre un X_π-objet colibre $\lambda(\pi', \pi)$, le coprojecteur correspondant étant $\eta_\pi(\pi') = (i_{\lambda(\pi', \pi)}, \hat{v})$. Soient $\pi'' \in P_o^o$ une quasi-topologie et φ la bijection de $\pi' \circ P \circ (\pi'' \times \pi)$ sur $\lambda(\pi', \pi) \circ P \circ \pi''$ qui, à $g \in \pi' \circ P \circ \pi'' \times \pi$, associe l'unique application quasi-continue g' de π'' vers $\lambda(\pi', \pi)$ vérifiant $\hat{v} \circ X_\pi(g') = g$. Pour montrer que (P^o, λ) est tensoriellement $\hat{\theta}$-dominée en π, il suffit de prouver que φ définit un quasi-homéomorphisme de $\lambda(\pi', \pi'' \times \pi)$ vers $\lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi'')$. Or $g' = \varphi(g)$ est l'application associant à $x'' \in \hat{\theta}(\pi'')$ l'application quasi-continue $g_{x''} : x \to g(x'', x)$ de π vers π'. Soient G un filtre sur $\pi' \circ P \circ (\pi'' \times \pi)$, F un filtre sur $\hat{\theta}(\pi)$ et F'' un filtre sur $\hat{\theta}(\pi'')$. Le filtre $G(F'' \times F)$ est engendré par l'ensemble des $m(A'' \times A) = \bigcup_{h \in M} h(A'' \times A)$ où $m \in G$, $A \in F$, $A'' \in F''$. Comme

$$h(A'' \times A) = \{ h(x'', x) \mid x'' \in A'', x \in A \} = \{ h_{x''}(x) \mid x'' \in A'', x \in A \} =$$

$$= \bigcup_{x'' \in A''} \varphi(h)(x'')(A) = (\varphi(h)(A''))(A),$$

on a $m(A'' \times A) = (\varphi(m)(A''))(A)$.

Or l'ensemble des $(\varphi(m)(A''))(A)$, où $m \in G$, $A \in F$ et $A'' \in F''$, engendre le filtre $(\varphi(G)F'')F$. Donc $G(F'' \times F) = (\varphi(G)F'')F$. On a $G \in \lambda(\pi', \pi'' \times \pi)(g)$ si, et seulement si, $G(F'' \times F) \in \pi'(g(x'', x))$, c'est-à-dire d'après ce qui précède si, et seulement si, $\varphi(G)(F'')(F) \in \pi'(\varphi(g)(x'')(x))$, pour tout $F \in \pi(x)$ et $F'' \in \pi''(x'')$. Or cette condition équivaut à $\varphi(G)F'' \in \lambda(\pi', \pi)(\varphi(g)(x''))$ pour tout $F'' \in \pi''(x'')$, donc aussi à $\varphi(G) \in \lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi'')(\varphi(g))$. Ceci prouve que φ définit un quasi-homéomorphisme de $\lambda(\pi', \pi'' \times \pi)$ sur $\lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi'')$

REMARQUE. Comme P^o est une catégorie à produits finis et admettant pour élément final l'unique quasi-topologie sur un ensemble $\{x\}$ à un seul élément, il résulte du théorème 2 que P^o est une catégorie cartésienne fermée au sens de [7]. On peut en déduire que (P^o, λ) est $\hat{\theta}$-hyperdominée en utilisant les résultats de [7].

Bibliographie.

[1] P. ANTOINE, Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bull. Soc. Math. Belgique,* XVIII, 2 et 4 (1966), p. 142 et 387.

[2] A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *Journal d'Analyse Math.* Jérusalem 13 (1964), p. 1.

[3] A. BASTIANI, *Topologie,* Chap. IV : Espaces fonctionnels, cours multigraphié, Amiens 1969.

[4] C. EHRESMANN, *Algèbre,* Cours du C.D.U, Paris 1968.

[5] C. EHRESMANN, Catégories structurées généralisées, *Cahiers de Topo. et Géo. diff,* X,1 (1968), p. 139.

[6] C. EHRESMANN, Catégories topologiques III, *Indag. Math.* 28,1 (1966)

[7] EILENBERG-KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on Categorical Algebra,* La Jolla 1965, Springer.

[8] H.J. KOWALSKY, Limesraüme und Komplettierung, *Math. Nachr.* 12, 1954, p. 301.

M. CHARTRELLE

29, rue de Beauvais

80 - AMIENS