CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

W. M. OLIVA

Une définition équivalente à l'involution de E. Cartan pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 2 (1969), p. 201-205

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_2_201_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. X1,2*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

UNE DEFINITION EQUIVALENTE A L'INVOLUTION DE E. CARTAN POUR LES SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par W.M. OLIVA *)

On démontre que les éléments intégraux d'ordre n d'un système d'équations aux dérivées partielles (SEDP) s'identifient aux jets de son prolongement holonome. Le théorème 1 donne une condition équivalente à l'involution de E. Cartan pour les (SEDP). On vérifie l'involution pour quelques exemples classiques.

Soit (V_m, V_n, π) une fibration, c'est-à-dire π est une application différentiable d'une variété V_m sur une variété V_n, de rang maximal. $J^r(V_m, V_n, \pi)$ désigne la variété des r-jets des sections locales de V_n dans V_m par rapport à π.

La notion de système différentiel extérieur associé à un (SEDP) a été considérée par E. Cartan ([1]). En utilisant les jets de C. Ehresmann, Kuranishi ([2]) a défini un (SEDP) (Φ^r, Ω) d'ordre $r \geq 1$ dans un ouvert Ω de $J^r(V_m, V_n, \pi)$ de la façon suivante : Φ^r est une application qui, à chaque $w \in \Omega$, associe un idéal Φ^r_w de l'anneau des germes au point w des fonctions réelles différentiables définies au voisinage de w, et telle que, pour chaque point $w \in \Omega$, il existe un voisinage V de w et des fonctions différentiables $F_1, F_2, \ldots, F_t$ définies dans V dont les germes en y engendrent l'idéal Φ^r_y, pour tout $y \in V$. On considère aussi le système différentiel extérieur (Σ, Φ^r) dans l'ouvert Ω de $J^r(V_m, V_n, \pi)$. On sait que, localement, (Σ, Φ^r) est engendré par

$$F_\mu, \quad \mu = 1,2,\ldots, t, \quad dy^\lambda - p^\lambda_j \, dx_j, \quad 1 \leq \lambda \leq (m-n),$$
$$dp^\lambda_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} - p^\lambda_{j_1 j_2 \ldots j_\nu j} \, dx_j, \quad 1 \leq \nu \leq r-1.$$

On ajoute aussi les différentielles extérieures correspondantes :

$$dF_\mu, \; dp^\lambda_j \wedge dx_j, \; dp_{j_1 \ldots j_\nu j} \wedge dx_j.$$

*) Ce texte, rédigé en avril 1966, est développé dans [7].

Un jet w de Ω est *intégral* si $F_\mu(w) = 0$ pour $\mu = 1, 2, \ldots, t$. L'ensemble des jets intégraux sera désigné par $J^o(\Phi^r)$.

Les éléments intégraux admissibles d'ordre n de (Φ^r, Ω) sont les éléments de contact intégraux de (Σ, Φ^r) admissibles par rapport à la fibration $(J^r(V_m, V_n, \pi), V_n, \alpha)$ ([1],[3],[4]); on peut aussi parler d'éléments ordinaires de (Φ^r, Ω). A toute sous-variété régulière S de $J^r(V_m, V_n, \pi)$ on associe un (SEDP), encore noté S. $P(S)$ désigne le prolongement holonome ([2],[5]) de S. On démontre le résultat suivant:

PROPOSITION 1. *Soit S une sous-variété régulière de $J^r(V_m, V_n, \pi)$ telle que le triplet (S, V_n, α) soit une fibration. Alors, il existe une correspondance biunivoque entre les éléments intégraux admissibles d'ordre n de S et les jets de son prolongement holonome $P(S)$.*

On rappelle la définition d'involution de E. Cartan :

DEFINITION. Un (SEDP) (Φ^r, Ω) de $J^r(V_m, V_n, \pi)$ est *en involution au jet intégral X_o de $J^o(\Phi^r)$* ([2]) si (Σ, Φ^r) est involution au point X_o, c'est-à-dire s'il existe un élément intégral admissible d'ordre n d'origine X_o et si tout élément intégral admissible d'ordre n d'origine X_o est ordinaire.

On rappelle aussi un théorème classique de E. Cartan ([1], [3], [4]) :

PROPOSITION 2. *Un élément intégral admissible $E^n(X_o)$ d'ordre n de (Σ, Φ^r) est ordinaire si, et seulement si :*

i) Il existe un voisinage U de X_o tel que $S = U \cap J^o(\Phi^r)$ soit une sous-variété régulière de $J^r(V_m, V_n, \pi)$, que $P(S) = ((\rho_r^{r+1})^{-1} U \cap J^o(P(\Phi^r))$ soit une sous-variété de $J^{r+1}(V_m, V_n, \pi)$ et que le triplet $(P(S), S, \rho_r^{r+1})$ soit une fibration.

ii) $P(S)$ a pour codimension $N - \dim S + K(E^n(X_o))$ dans la variété des éléments de contact d'ordre n de $J^r(V_m, V_n, \pi)$, admissibles par rapport à α.

L'entier N est la dimension de $J^r(V_m, V_n, \pi)$ et

$$K(E^n(X_o)) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k(E^n(X_o)),$$

où

$$t_k(E^n(X_o)) = max\{\, dim\, J(E^k(x_o)) \mid E^k(x_o) \subset E^n(x_o)\},$$

$J(E^k(Y))$ étant le système polaire de $E^k(Y)$, c'est-à-dire le sous-espace engendré par les 1-formes de (Σ, Φ^r) et par les 1-formes $v_i \lrcorner \omega^S$ où (v_i) est une base de $E^k(Y)$ et où ω^S sont les 2-formes de (Σ, Φ^r) (on note $v \lrcorner \omega$ le produit intérieur d'un vecteur v par une 2-forme ω). De plus, pour déterminer la dimension de $J(E^k(Y))$, il suffit de considérer toutes les 1-formes modulo $(dx_1, \ldots, dx_n)$ ([1]).

Soit maintenant (Φ^r, Ω) un (SEDP) qui vérifie la condition *i)* pour un point $X_o \in J^o(\Phi^r)$, et soit $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ une base de l'espace tangent à V_n au point $x_o = \alpha(X_o)$. Si $X_1 \in P(S)$ est tel que $\rho_r^{r+1}(x_1) = X_o$, la proposition 1 dit que $X_1 = j^1_{x_o}\sigma$ s'identifie avec l'élément intégral admissible $E^n(X_o) = [\sigma_* t_1, \sigma_* t_2, \ldots, \sigma_* t_n]$ (σ_* note la différentielle au point x_o d'un représentant σ du jet X_1).

On peut, à partir de T et X_1, construire une suite de sous-espaces :

$$E^1(T, X_1) = [\sigma_* t_1],$$
$$E^2(T, X_1) = [\sigma_* t_1, \sigma_* t_2],$$
$$\vdots$$
$$E^{n-1}(T, X_1) = [\sigma_* t_1, \ldots, \sigma_* t_{n-1}].$$

Ces sous-espaces ne dépendent que de X_1 et T. Soit $V(X_o)$ l'ensemble des éléments Y de S tels que $\rho_{r-1}^r(Y) = \rho_{r-1}^r(X_o) = \overline{X}$. Pour chaque k vérifiant $1 \leq k \leq (n-1)$, on peut considérer le sous-ensemble $V(E^k(T, X_1))$ des éléments $Z \in V(X_o)$ tels que, si

$$\dot{Z} = j^1_{x_o}\tau, \text{ où } \tau : W \ni x_o \to J^{r-1}(V_m, V_n, \pi),$$

$(\rho_{r-1}^r)_*\, E^k(T, X_1)$ soit tangent à $\tau(W)$ au point $\overline{X}$.

On dit que $T = (t_1, \ldots, t_n)$ est une *base quasi-régulière associée à* X_o si $V(X_o), V(E^1(T, X_1)), \ldots, V(E^{n-1}(T; X_1))$ sont des sous-variétés de S dont les dimensions $\tau_o, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ ne dépendent que de T et si de plus

$$\tau_o + \tau_1 + \ldots + \tau_{n-1} = \dim P(S) - \dim S.$$

On dit maintenant que (Φ^r, Ω) vérifie la *condition iii)* au point intégral X_o s'il vérifie *i)* et s'il existe une base quasi-régulière associée au point X_o.

En utilisant les propositions 1 et 2, on démontre le résultat suivant:

THEOREME 1 *(voir* [7]*). Un (SEDP)* (Φ^r, Ω) *est en involution au point intégral* X_o *si, et seulement si, il vérifie les conditions i) et iii).*

On peut appliquer le théorème 1 à quelques exemples classiques :

a) Soit S une sous-variété régulière de $J^1(V_m, V_n, \pi)$, $m = n+1$, telle que (S, V_m, β) soit une fibration. En utilisant le théorème des fonctions implicites, on peut écrire les équations locales de S sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} p_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n, y, q_1 \cdots q_s), \\ &\vdots \\ p_{n-s} &= f_{n-s}(x_1, \ldots, x_n, y, q_1, \ldots, q_s). \end{aligned}$$

Dans [5], page 31, Goursat considère pour ce système certaines conditions d'intégrabilité; on démontre que S *est en involution au point* X_o *si, et seulement si, les conditions d'intégrabilité de Goursat sont vérifiées.*

b) A toute distribution M d'éléments de contact sur une variété V_n, on associe un (SEDP) S du 1^{er} ordre de la façon suivante : Dans la variété $J^1(V_{n+1}, V_n, \pi)$, où $V_{n+1} = V_n \times R$ et où π est la projection canonique de V_{n+1} sur V_n, on considère la partie S de $J^1(V_n, R) = J^1(V_{n+1}, V_n, \pi)$ des jets $j^1_x y$ tels que $X(y) = 0$ pour tout $X \in M$. S ne dépend que de M et (S, V_n, α) est une fibration. Alors M *est complètement intégrable si, et seulement si,* S *est en involution en tout point intégral.*

c) A tout (SEDP) de Mayer-Lie S ([6]) on associe une distribution $D(S)$ d'éléments de contact. Alors $D(S)$ *est involutive si, et seulement si,* S *est en involution en tout point.*

d) Systèmes de Koenig ([5], page 41). *Les conditions d'intégrabilité de Goursat pour ce type de systèmes sont équivalentes à l'invo-*

lution en tout point intégral.

c) Systèmes de Cauchy-Kowalewski [5] page 2). En utilisant le théorème 1 ci-dessus on démontre que *tout système de Cauchy-Kowalewski est en involution en tout point intégral.*

Bibliographie.

[1] E. CARTAN, *Les Systèmes Différentiels Extérieurs et Leurs Applications Géométriques*, Paris (1921).

[2] M. KURANISHI, *Nagoya Math. J.* 19, 1961, p. 55.

[3] M. KURANISHI, *Lectures on Exterior Differential Systems*, Tata Inst. Bombay (1962).

[4] A. KUMPERA, *Exterior Differential Systems*, Princeton Un. (1961).

[5] E. GOURSAT, *Leçons sur l'Intégration des Equations aux Dérivées Partielles du 1er ordre*, Paris (1921).

[6] C. EHRESMANN, *Sur les pseudogroupes de Lie de type fini*, C.R.A.S. t. 246, p. 360 - 362, (1958).

[7] W.M. OLIVA, *Conceituação Geométrica da Teoria das Equações a Derivadas Parciais*, Thèsis, S. Paulo (1966).

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo,

74 Pr. Cel. Fernando Prestes

São Paulo. Brésil.