COMPOSITIO MATHEMATICA

ERIC URBAN

Formes automorphes cuspidales pour GL_2 sur un corps quadratique imaginaire. Valeurs spéciales de fonctions L et congruences

Compositio Mathematica, tome 99, n° 3 (1995), p. 283-324

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1995__99_3_283_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica **99:** 283–324, 1995.
© 1995 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

Formes automorphes cuspidales pour GL_2 sur un corps quadratique imaginaire. Valeurs spéciales de fonctions L et congruences

ERIC URBAN
ENS de Cachan, Departement de Mathématiques, 61 Avenue du President Wilson, 94235 Cachan, Cédex, France
e-mail: Eric.Urban@ens.cachan.fr

Received 15 November 1993; accepted in final form 28 September 1994

0. Introduction

Soit f une forme cuspidale classique de poids k, nouvelle et propre pour les opérateurs de Hecke. H. Hida, dans une série d'articles [H1] à [H3], a mis en évidence une étroite relation entre la valeur spéciale en $s = k$ de la fonction L du carré symétrique de f (tordu par son nebentypus) et les congruences à f. Plus précisément il a montré que cette valeur spéciale multipliée par un certain facteur de périodes coïncide avec le discriminant d'un accouplement défini sur un réseau associé à f. Ce point lui a permis d'obtenir un critère pour l'existence de congruences entre f et d'autres formes propres différentes des conjuguées de f. Nous nous proposons, dans ce travail, d'établir un résultat semblable pour les formes automorphes pour GL_2 sur un corps quadratique imaginaire $F \subset \bar{\mathbb{Q}}$. Nous introduisons pour ce faire un facteur de période de nature topologique. Le théorème de rationalité ou plutôt d'intégralité que nous obtenons, contrairement au cas classique découvert par Sturm [St], ne s'inscrit pas dans le cadre des conjectures de Deligne sur les valeurs spéciales de fonction L; en effet la fonction L du carré symétrique de $\mathbf{f}$ de poids $k = n + 2$ (de type de Hodge $\{(2k-2,0)(k-1,k-1)(0,2k-2)]\}$) ne possède pas d'entiers critiques. Notre facteur de période s'apparente donc plutôt au régulateur de Beilinson du motif adjoint de rang 3 $\mathrm{Ad}(M_{\mathbf{f}}) \subset M_{\mathbf{f}} \otimes (M_{\mathbf{f}})^{\circ}$ où $M_{\mathbf{f}}$ est le motif hypothétique associé à la forme automorphe arithmétique $\mathbf{f}$ de nebentypus $\chi_{\mathbf{f}}$. On peut s'en convaincre en regardant ce qui se passe pour une forme primitive obtenue par changement de base de $\mathbb{Q}$ à F. En effet, si $\mathbf{f} = \mathbf{f}_F$ est la forme obtenue par changement de base de $f_{\mathbb{Q}}$ forme nouvelle de nebentypus χ, on a la relation:

$$L(\mathrm{Ad}(M_{\mathbf{f}}), s) = L(\mathrm{Ad}(M_{f_{\mathbb{Q}}}), s) \times L(\mathrm{Ad}(M_{f_{\mathbb{Q}}}) \otimes (-; F/\mathbb{Q}), s).$$

La période que nous associons à $\mathrm{Ad}(M_{\mathbf{f}})$ est essentiellement le produit de Petersson $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}^c \rangle$ où $\mathbf{f}^c$ est la forme nouvelle sur $\mathrm{GL}_2(F)$ dont les valeurs propres pour les opérateurs de Hecke sont les conjuguées complexes de celles de $\mathbf{f}$. Elle est donc équivalente modulo $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ au produit des périodes de $\mathrm{Ad}(M_f)$ et de $\mathrm{Ad}(M_f) \otimes (-/(F/\mathbb{Q}))$. La première est "de type Deligne" (cf. Prop. 7.7 de [D]) alors que la seconde est "de type Beilinson" car le poids k de $f = f_{\mathbb{Q}}$ n'est pas critique pour $\mathrm{Ad}(M_f) \otimes (-/(F/\mathbb{Q}))$. (cf. Table 5.3 de [D]).

Introduisons quelques notations pour énoncer précisément notre résultat. Soit $F_{\mathbb{A}}$ resp. $F_f, \widehat{\mathcal{O}}_F$ l'anneau des adèles resp. des adèles finies de F, le sous-anneau compact maximal de F_f. Fixons un idéal entier $\mathcal{A}$ de F et considérons le groupe compact

$$K_1(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F_f) \text{tq.} d-1 \in \mathcal{A}\widehat{\mathcal{O}}_F, b \in \mathcal{D}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}_F \quad \text{et} \right.$$
$$\left. c \in \mathcal{A}\mathcal{D}\widehat{\mathcal{O}}_F, ad - bc \in \widehat{\mathcal{O}}_F^\times \right\}$$

où $\mathcal{D}$ désigne la différente de F sur $\mathbb{Q}$. Soit $S_n(\mathcal{A})$ l'espace des formes cuspidales de poids $n+2$ et de niveau $\mathcal{A}$ (invariantes à droite par $K_1(\mathcal{A})$). Pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(F_f)$, la classe double $[K_1(\mathcal{A})gK_1(\mathcal{A})]$ opère $\mathbb{C}$-linéairement sur $S_n(\mathcal{A})$. Soit $h_n(\mathcal{A})$ la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_n(\mathcal{A}))$ engendrée sur $\mathbb{Z}$ par ces classes doubles g parcourant le semi-groupe:

$$\Delta_1(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F_f) \quad \text{tels que} \right.$$
$$\left. a \in \widehat{\mathcal{O}}_F, d-1 \in \mathcal{A}\widehat{\mathcal{O}}_F, b \in \mathcal{D}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}_F \quad \text{et} \quad c \in \mathcal{A}\mathcal{D}\widehat{\mathcal{O}}_F \right\}.$$

Pour toute place finie v, soit $T_v = T(\mathcal{P}_v)$ et pour p premier rationnel soit $T_p = \Pi_{v(p)>0} T_v$. Pour une forme primitive $\mathbf{f}$, soient a_v et b_v les racines du polynome $X^2 - \lambda_{\mathbf{f}}(T_v)X + \chi_{\mathbf{f}}(v)q_v^{n+1}$ où $\lambda_{\mathbf{f}}$ est le caractère de l'algèbre de Hecke défini par $\mathbf{f}$. On dira que $\mathbf{f}$ est p-ordinaire si $|\lambda_{\mathbf{f}}(T_p)|_p = 1$; cette valeur absolue p-adique ainsi que celle archimédienne considérée dans la suite étant induites par des plongements ι_p et ι_∞ de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$ et $\mathbb{C}$ que l'on aura fixés une fois pour toute.

On pose pour toute forme primitive $\mathbf{f}$ et pour tout caractère de Hecke χ:

$$L(s, \mathbf{f}, \chi) = \prod_v [(1 - a_v^2 \chi(v) q_v^{-s})(1 - a_v b_v \chi(v) q_v^{-s})$$
$$\times (1 - b_v^2 \chi(v) q_v^{-s})]^{-1}$$

avec $\chi(v) = 0$ si χ est ramifié en v et $\chi(v) = \chi(\pi_v)$ sinon.

En fait, si $\pi(\mathbf{f})$ est la représentation automorphe de $GL(2, F)$ associée à $\mathbf{f}$ et $\hat{\pi}(\mathbf{f})$ le changement de base à $GL(3, F)$ de cette dernière (cf. [G-J]), on a l'égalité des fonctions $L(s, \mathbf{f}, \chi)$ et $L(s + k - 1, \hat{\pi}(\mathbf{f}) \otimes \bar{\chi}_{\mathbf{f}}\chi)$ à quelques facteurs Euleriens près pour les places intervenant dans le niveau $\mathcal{A}$ (cf. Sect. 7). Le motif conjectural associé à $\hat{\pi}(\mathbf{f})$ par la philosophie de Langlands est le motif adjoint $\mathrm{Ad}(M_{\mathbf{f}})$; de sorte que l'on doit avoir la relation

$$L(s, \hat{\pi}(\mathbf{f})) = L(s, \mathrm{Ad}(M_{\mathbf{f}}))$$

ce qui permet d'interpréter notre résultat vis à vis des conjectures de Deligne et Beilinson.

Notre principal outil sera l'interprétation cohomologique de $S_n(\mathcal{A})$. Soit $X_1(\mathcal{A}) = GL_2(F)\backslash GL_2(F_{\mathbb{A}})/K_1(\mathcal{A}) \times \mathbb{C}^{\times}.U_2(\mathbb{C})$. Notons Sym^n le produit symétrique n-ième et considérons la représentation de $GL_2(F)$ sur $L(n; \mathbb{C}) = \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2) \otimes \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$ où l'élément $\gamma \in GL_2(F)$ opère via $\mathrm{Sym}^n(\gamma) \otimes \mathrm{Sym}^n(\gamma^c)$. On définit alors $\tilde{L}(n; \mathbb{C})$ comme le faisceau des sections continues (loc^t constantes) du revêtement topologique

$$GL_2(F)\backslash([GL_2(F_{\mathbb{A}})/K_1(\mathcal{A}) \times \mathbb{C}^{\times} \times U_2(\mathbb{C})) \times L(n; \mathbb{C})] \to X_1(\mathcal{A}).$$

Soit $H^i_!(X_1(\mathcal{A}), \tilde{L}(n; \mathbb{C}))$ l'image de la cohomologie à support compact $H^i_c(X_1(\mathcal{A}), \tilde{L}(n; \mathbb{C}))$ dans $H^i(X_1(\mathcal{A}), \tilde{L}(n; \mathbb{C}))$. Les opérateurs de Hecke opèrent naturellement sur ces espaces et il existe des isomorphismes Hecke-équivariants (cf. [Ha]):

$$\delta_i : S_n(\mathcal{A}) \to H^i(X_1(\mathcal{A}), \tilde{L}(n; \mathbb{C})) \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2.$$

En définissant un faisceau $\tilde{L}(n; A)$ à coefficients dans A un sous-corps ou un sous-anneau de $\mathbb{C}$ de valuation discrète de corps résiduel de caractéristique p. On définit deux réseaux de $S_n(\mathcal{A}; \mathbb{C})$ stables par les opérateurs de Hecke $L_i = \delta_i^{-1}(H^i_!(X_1(\mathcal{A}), \tilde{L}(n; A)))$ pour $i = 1, 2$. Ces structures entières sur $S_n(\mathcal{A})$ permettent de définir deux facteurs de périodes $u_1(A; \mathbf{f})$ et $u_2(A; \mathbf{f})$ (définis à multiplication par une unité de A près) associés à toute forme primitive $\mathbf{f}$ de niveau $\mathcal{A}$ (cf Section 4 pour plus de précision). Notons $\mathcal{C}(\chi)$ le conducteur d'un caractère de Hecke χ de F, d_F le discriminant de F, φ l'indicatrice d'Euler et $n(\mathcal{A})$ le générateur positif de $\mathcal{A} \cap \mathbb{Z}$. Le premier résultat de ce travail est le théorème suivant:

THÉORÈME A: *Soit* $\mathbf{f}$ *une forme primitive de niveau* $\mathcal{A}$ *tel que* $n(\mathcal{A}) > 3$. *Soit* A *un corps ou un anneau de valuation discrète de corps résiduel de caractéristique* p *contenu dans* $K_{\mathbf{f}}$. *Alors*

$$\text{(i) } C(A; \mathbf{f}) = \prod_{v \in T}(1 + q_v^{-1}) \times \varphi(\mathcal{A}) \times d_F \times \frac{L(1, \hat{\pi}(\mathbf{f}))}{u_1(A; \mathbf{f}) u_2(A; \mathbf{f}) \times (8\alpha_n)(2\pi)^{(2+2n)}}$$

appartient à A, α_n *étant un coefficient rationnel universel indépendant de* $\mathbf{f}$, $\mathcal{A}$ *et* F.

(ii) *Pour tout* $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, *on a* $C(A;\mathbf{f})^\sigma = C(A^\sigma;\mathbf{f}^\sigma)$.

REMARQUES: (i) Comme nous l'avons dit plus haut, la bande critique du motif $\mathrm{Ad}(M_\mathbf{f})$ (conjecturalement associé à $\hat{\pi}$ (**f**) par la philosophie de Langlands) est vide. La période qui intervient ici – le produit $u_1(A;\mathbf{f})u_2(A;\mathbf{f})$ – est donc un régulateur 'de Beilinson' reliée à la K-théorie de $\mathrm{Ad}(M_\mathbf{f})$. Par ailleurs, Hida a récemment montré que $u_1(A;\mathbf{f})$ s'interprète comme la période de Deligne du motif $M_\mathbf{f}$ (cf. [H6]); notre résultat fait donc apparaitre une relation entre ces deux régulateurs qui ont pourtant des natures différentes.

(ii) Lorsque $\mathbf{f} = \theta_\lambda$ est une série théta associée à un caractère de Hecke λ d'une extension quadratique E de F, on peut calculer (modulo $\bar{\mathbb{Q}}^\times$) le régulateur de Beilinson associé à $\mathrm{Ad}(M_{\theta_\lambda})$ et interpréter la relation entre les régulateurs évoquée ci-dessus. En effet, si $M(\lambda)$ désigne le motif sur E de rang1 associé à λ et τ l'automorphisme non trivial de Gal (E/F) on doit avoir:

$$M_{\theta_\lambda} = \mathrm{Ind}_E^F(M(\lambda)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ad}(M_{\theta_\lambda}) = M_E(\lambda^\tau/\lambda) \oplus M_F\left(\left(\frac{-}{E/F}\right)\right). \quad (*)$$

Le régulateur du premier facteur $\Omega(\lambda^\tau/\lambda)$ est réliée aux périodes d'une variété abélienne de rang 2 à multiplications complexes par E; c'est une période de Deligne car 1 est critique pour $M(\lambda^\tau/\lambda)$ et celui du second est d'après le théorème de Dirichlet (généralisé par Borel pour les autres valeurs entières) un régulateur de Beilinson équivalent à $\mathrm{Log}(\varepsilon)$ où ε est une unité fondamental de E (car $\mathrm{Ind}_E^F(1_E) = 1_F \oplus M_F((-/(E/F))))$. Par ailleurs, la décomposition $(*)$ se reflète sur les fonctions L correspondantes par la factorisation:

$$L(s,\hat{\pi}(\theta_\lambda)) = L_E(s,\lambda^\tau/\lambda) \times L_F\left(s,\left(\frac{-}{E/F}\right)\right). \quad (**)$$

En prenant la valeur spéciale en $s = 1$, on obtient en comparant avec le Th. A:

$$u_1(\bar{\mathbb{Q}};\theta_\lambda)u_2(\bar{\mathbb{Q}};\theta_\lambda) \times (2i\pi)^{2(n+1)} \sim \Omega(\lambda^\tau/\lambda) \times \mathrm{Log}(\varepsilon).$$

Soit maintenant le CM type $S = \{\tau, c\}$, alors λ est de type à l'infini $(n+1)S^c$ (cf. $[U]$ partie 2, Sect. 1.8) et λ^τ/λ est de type $(n+1)S^c - (n+1)S$. Soit $\Omega_S = \Pi_{\sigma\in S}\Omega(\sigma)$ (cf. [K] (5.1.46) pour la définition des $\Omega(\sigma)$).

D'après la remarque précédente (cf. Th. 8.1 de [H6]) et le Théorème 5.3 de $[K]$, on a

$$u_1(\bar{\mathbb{Q}};\theta_\lambda) \sim (2i\pi)^{n+1} \times \Omega_S^{n+1}.$$

En tenant compte de l'équation fonctionnelle satisfaite par la série L de λ/λ^τ, le Th. 5.3 de $[K]$ donne aussi $\Omega(\lambda^\tau/\lambda) \sim \Omega_S^{2(n+1)} \times (2i\pi)^{-2(n+1)}$. On obtient donc:

$$u_2(\bar{\mathbb{Q}};\theta_\lambda) \sim (2i\pi)^{-3(n+1)} \times \Omega_S^{2n+1} \times \mathrm{Log}(\varepsilon).$$

Toutes ces équivalences sont modulo un nombre algébrique près dont on pourrait préciser le corps de définition compte tenu des Th. 8.1 de [H6], Th. 5.3 de [K] et du Th. A.

L'aspect arithmétique des nombres $C(A;\mathbf{f})$ est donné par le second résultat:

THÉORÈME B: *On conserve les notations et hypothèses précédentes avec A de valuation discrète v. En outre, on suppose que $n(\mathcal{A}) > 3$ et $p > 2$ ou $p > 3$ et $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. De plus, on suppose que l'une des deux conditions suivantes est réalisée:*

(i) $\mathbf{f}$ *est p-ordinaire*;
(ii) *p est premier à $\mathcal{A}$ et $p > n$.*

Alors si $v(C(A;\mathbf{f})) \geqslant 1$, il existe un idéal premier $\mathcal{P}$ de $\bar{\mathbb{Q}}$ au dessus de p et une forme propre $\mathbf{h} \in S_n(\mathcal{A};\mathbb{C})$ différente de $\mathbf{f}$ telle que $\lambda_{\mathbf{f}}(T) \equiv \lambda_{\mathbf{h}}(T) (\mathrm{mod}\,\mathcal{P})$ pour tout $T \in h_n(\mathcal{A};\mathbb{Z})$.

REMARQUES: (i) Nous donnons dans la Section 7 un résultat un peu plus général.

(ii) (Suite à une question de R. Greenberg) Lorsque $\mathbf{f}$ provient (par changement de base) d'une forme modulaire classique $\mathbf{f}$, nous avons vu plus haut que la fonction $L(s, \hat{\pi}(\mathbf{f}))$ se décompose en le produit $L(s, \hat{\pi} f)) \times L(s, \hat{\pi}(f) \otimes (-; F/\mathbb{Q}))$. Or Hida a prouvé que la partie arithmétique de la valeur spéciale en 1 du premier facteur contrôlait les congruences à f; elle contrôle donc l'existence de forme $\mathbf{h}$ congrue à $\mathbf{f}$ provenant d'un changement de base de F à $\mathbb{Q}$. Il parait donc naturel de s'attendre à une décomposition $C(A;\mathbf{f})$ en un produit $C^+(A;\mathbf{f}) \times C^-(A;\mathbf{f})$ où le premier terme (resp. le second) serait la partie arithmétique de $L(1, \hat{\pi}(f))$ (resp. $L(1, \hat{\pi}(f) \otimes (-; F/\mathbb{Q}))$) et controlerait l'existence de forme congrue à $\mathbf{f}$ provenant (resp. ne provenant pas) d'un changement de base de F à $\mathbb{Q}$.

(iii) Il semble que la méthode de démonstration puisse se généraliser à tout corps de nombres. En fait, un résultat semblable au Th. A est certainement encore vrai. Pour l'interprétation arithmétique, il y a deux réserves faire. La première est que la cohomologie à support compact peut contenir une contribution de séries d'Eisenstein (cf. [Ha] (3.2.5) et la demonstration du th. 3.2 ci-après), la forme congrue à $\mathbf{f}$ pourrait donc être l'une d'elles (sauf dans certain cas comme les corps biquadratiques imaginaires). La seconde est que la vérification de la non-torsion de la cohomologie d'Eisenstein (cf. Prop. 2.4.1) est plus difficile puisque l'on aura à calculer des groupes de cohomologie supérieure.

En ce qui concerne le resultat de rationnalité, la méthode de démonstration repose essentiellement sur la formule de Rankin reliant la fonction $L(s, \pi(\mathbf{f}) \times \pi(\mathbf{f}^c))$ et le produit de Petersson tordu par un série d'Eisenstein entre $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}^c$. En interprétant ce produit de Petersson comme un cup-produit entre $\delta^1(\mathbf{f})$ et $\delta^2(\mathbf{f})$ on obtient le Théorème A en remarquant que $(\delta^1(\mathbf{f}) \cup \delta^2(\mathbf{f})/u_1(A;\mathbf{f})u_2(A;\mathbf{f})) \in A$. Pour le critère de congruences, le principe est le même que dans les travaux de H. Hida. D'après ce qui vient d'être dit, la valeur spéciale s'interprète comme le

discriminant d'un réseau associé à **f**. Lorque ce discriminant est non trivial, on est conduit à prouver la non-nullité (via un théorème de dualité) du module de congruence de **f**. Dans le paragraphe 1, nous rappelons et adaptons un théorème de dualité de Borel–Moore, ce qui se révèle important pour obtenir une dualité entre groupes de cohomologie des faisceaux à coefficients entiers. L'objet du paragraphe 2 est de rappeler les isomorphismes entre les différentes cohomologies et surtout d'établir la dualité pour les parties ordinaires des groupes de cohomologie d'intersection naïve (image de H_c^* dans H^*) afin d'expliciter (dans les paragraphes 3 et 4) au moyen des isomorphismes d'Eichler–Shimura–Harder le lien avec les formes automorphes. Dans les paragraphes 5 et 6, on relie le produit de Petersson aux valeurs spéciales de fonctions L par la méthode de Rankin. Dans le dernier paragraphe, nous démontrons le critère de congruence.

Ce travail est une partie de ma thèse dans laquelle mes premiers pas ont été guidés par J. Tilouine. Je tiens à le remercier particulièrement pour m'avoir proposer ce travail mais aussi et surtout pour ses critiques et conversations qui m'ont introduit à cette branche de l'arithmétique. Je remercie également H. Hida pour ses remarques sur une version antérieure de ce travail qui m'ont conduit à apporter quelques améliorations.

1. Dualite de Borel–Moore

Le but de ce paragraphe est de rappeler un résultat de dualité de Borel–Moore [B-M] (Th. 7.9 et 7.6) entre homologie et cohomologie des faisceaux et de le transcrire dans un contexte mieux adapté aux faisceaux et aux espaces que nous considèrerons dans les Sections 2 et 3. En particulier, nous établissons une dualité entre modules de cohomologie.

Fixons d'abord quelques notations:
X sera une variété topologique de dimension n admettant une compactification $\hat{X}$ qui sera une variété topologique à bord. Pour tout faisceau $\mathcal{S}$ sur X, on note $\mathcal{C}'(X;\mathcal{S})$ la résolution injective de Borel–Moore (cf [B-M] 1.3) fonctorielle en $(X;\mathcal{S})$. Pour tout ouvert U, soit $\Gamma(U;\mathcal{S})$, resp. $\Gamma_c(U;\mathcal{S})$ le module des sections, resp. à support compact de $\mathcal{S}$ définies sur U. On note alors $H^q(X;\mathcal{S})$, resp. $H_c^q(X;\mathcal{S})$ le q-ième module de cohomologie du complexe de cochaînes $\Gamma(X;\mathcal{C}(X;\mathcal{S}))$, resp. $\Gamma_c(X;\mathcal{C}(X;\mathcal{S}))$.

A désignera toujours un anneau de Dedekind et K son corps des fractions. On note $R(A)'$ la résolution injective de A définie par: $R(A)^0 = K, R(A)^1 = K/A$ et $R(A)^i = 0$ pour tout $i > 1$. Si M' est un complexe de A-modules, on definit le complexe dual $D(M')$ par ses composantes $D(M')_n = \mathrm{Hom}^{-n}(M', R(A))$ (le module des homomorphismes de degré $-n$) et sa différentielle $(\mathrm{d}f)(x) = \mathrm{d}(f(x)) + (-1)^{n+1} f(\mathrm{d}x)$ de $D(M)_n$ vers $D(M)_{n+1}$. Pour tout complexe de faisceaux $\mathcal{A}'$ (par exemple $\mathcal{C}(X;A)$), on note $D(\mathcal{A})$. Le complexe de faisceaux associé au préfaisceau $U \mapsto D(\Gamma_c(U,\mathcal{A}'))$. Dans tout ce qui suit $\mathcal{S}$ sera un faisceau localement constant de A-modules dont les fibres sont libres et de rang fini (lcflf

en abrégé). Pour un tel faisceau, on pose $\mathcal{C}.(X;\mathcal{S}) = D(\mathcal{C}'(X;A)).\otimes\mathcal{S}$ (en notant A le faisceau constant A). On note $H_q(X;\mathcal{S})$, resp. $H_q^c(X;\mathcal{S})$ le q-ième module d'homologie du complexe de chaînes $\Gamma(\mathcal{C}.(X;\mathcal{S}))$, resp. $\Gamma_c(\mathcal{C}.(X;\mathcal{S}))$.

Soit $\mathcal{S}^\circ = \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, A)$ le faisceau $U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{S}|_U, A|_U)$.

LEMME 1.1. *Pour tout faisceau $\mathcal{S}$ lcflf, on a un isomorphisme canonique de faisceau: $\mathcal{C}.(X;\mathcal{S}^\circ) \simeq D(\mathcal{C}'(X;A)\otimes\mathcal{S})$.*

Démonstration. Pour tout ouvert U, le morphisme canonique suivant $\mathrm{Hom}(\Gamma_c(U;\mathcal{C}(X;A)), R(A)')\otimes\mathrm{Hom}(\mathcal{S}|_U, A|_U) \to \mathrm{Hom}(\Gamma_c(U;\mathcal{C}'(X;A))\otimes\Gamma(U;\mathcal{S}), R(A)')$ est un isomorphisme de A-module si U est assez petit. D'autre part, pour un tel U, $\Gamma_c(U;\mathcal{C}'(X;A))\otimes\Gamma(U;\mathcal{S})$ est naturellement isomorphe à $\Gamma_c(U;\mathcal{C}'(X;A)\otimes\mathcal{S})$, en passant aux faisceaux associés on obtient donc ce qui est énoncé. □

COROLLAIRE 1.2. *Pour tout faisceau $\mathcal{S}$ lcflf, on a la suite exacte scindée*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_c^{q+1}(X;\mathcal{S});A) \to H_q(X;\mathcal{S}^\circ) \to \mathrm{Hom}(H_c^q(X;\mathcal{S}),A) \to 0 \quad (1.1)$$

pour tout $q \geqslant 0$.

Démonstration. Comme $\mathcal{S}$ est lcflf, $\mathcal{A} = \mathcal{C}'(X;A)\otimes\mathcal{S}$ est une résolution injective de $\mathcal{S}$, donc $H^q(\Gamma_c(\mathcal{A}')) = H^q(X;\mathcal{S})$. Par ailleurs, comme $\mathcal{A}'$ est mou, la Proposition 2.7 de [B-M] nous donne la suite exacte scindée:

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H^{q+1}(\Gamma_c(\mathcal{A}')),A) \to H_q(\Gamma(D(\mathcal{A}').)) \to \mathrm{Hom}(H^q(\Gamma_c(\mathcal{A}')),A) \to 0,$$

pour tout $q \geqslant 0$. Le résultat découle maintenant du lemme. □

Soient maintenant deux faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur X, on peut définir le cap-produit:

$$- \cap - : H_m(X;\mathcal{A})\otimes H_c^q(X;\mathcal{B}) \to H_{m-q}^c(X;\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \text{ avec } m \text{ et } q \in \mathbb{N}.$$

Rappelons que cet accouplement, lorsque $m = q = 0$, coïncide avec l'accouplement naturel $\Gamma(X;\mathcal{A})\otimes\Gamma_c(X;\mathcal{B}) \to \Gamma_c(X;\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ et qu'il commute "bilinéairement" au morphismes et cohomorphismes de faisceaux. Pour plus de détails sur la définition du cap-produit, on peut consulter [B].

PROPOSITION 1.3. *Soit $\mathcal{S}$ un faisceau lcflf, la flèche surjective du corollaire précédent est induite par le cap-produit*

$$- \cap - : H_q(X;\mathcal{S}^\circ)\otimes H_c^q(X;\mathcal{S}) \to H_0^c(X;\mathcal{S}^\circ\otimes\mathcal{S}) \to H_0^c(X;A) \to A,$$

la dernière flèche provenant de l'application de X sur un point.

Démonstration. La démonstration est celle de [B] p. 217 incluse dans la preuve du Th. 10.5 et dans laquelle l'hypothèse "*A est un corps*" est superflue. □

DÉFINITION. On pose $\mathcal{O} = \mathcal{H}_n(X; A)$ le n-ième faisceau d'homologie du complexe de chaînes $\mathcal{C}.(X; A)$. Il est localement isomorphe au faisceau constant A. Si $\mathcal{O}$ est globalement isomorphe à A, on dit que X est orientable. C'est bien sûr le cas lorsque X est une variété différentiable orientable au sens usuel. Enonçons alors le résultat principal de [B-M].

THÉORÈME 1.4 (dualité de Borel-Moore). *Soit $\mathcal{S}$ un faisceau sur X, alors pour tout q on a un isomorphisme canonique*

$$\Delta\colon H_{n-q}(X; \mathcal{S}) \to H^q(X; \mathcal{S} \otimes \mathcal{O}),$$

de plus étant donnés deux faisceaux $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in H^r(X; \mathcal{S} \otimes \mathcal{O}) \times H^s(X; \mathcal{R})$, on a $\Delta^{-1}(\alpha \cup \beta) = \Delta^{-1}(\alpha) \cap \beta$.

Démonstration. On peut trouver la démonstration du premier point dans [B-M] Section 7 ou [B] p. 209–210, le second est le Th. 10.1 p. 214 de [B]. □

Il résulte de tout ceci que le cup-produit

$$- \cup - : H^{n-p}(X; \mathcal{S}^\circ) \otimes H_c^p(X; \mathcal{S}) \to H_c^n(X; A) \simeq A \tag{2}$$

(lorsque X est orientable) induit une surjection de $H^{n-p}(X; \mathcal{S}^\circ)$ vers $\mathrm{Hom}\,(H_c^p(X; \mathcal{S}); A)$ de noyau $\mathrm{Ext}^1(H_c^{p+1}(X; \mathcal{S}), A)$. (2) sera donc une dualité parfaite si et seulement si ce noyau est de torsion, pour cela il suffit de montrer que $H^{p+1}(X; \mathcal{S})$ est de type fini sur A. Pour établir ce dernier point, considérons la suite exacte longue de cohomologie relative ([B] Th. 4.10):

$$\cdots \to H^q(\delta\hat{X}; \mathcal{S}) \to H_c^{q+1}(X; \mathcal{S}) \to H^{q+1}(\hat{X}; \mathcal{S}) \to \cdots$$

qui existe sous l'hypothèse(#) "$\mathcal{S}$ admet un prolongement lcflf à $\hat{X}$". Alors en imitant la démonstration de la Prop. 6.8 de [B-M] on montre que $H^q(\partial\hat{X}; \mathcal{S})$ et $H^{q+1}(\hat{X}; \mathcal{S})$ (en utilisant la compacité de $\hat{X}$ et $\partial\hat{X}$) sont de type fini sur A, il en est donc de même de $H_c^q(X; \mathcal{S})$. Nous remarquerons que le recours à la Prop. 6.8 de [B-M] peut être évité dans le contexte suivant:

1.5. Cas des espaces localement symétriques

Soit G un groupe réductif sur F un corps de nombres. Soit $\mathcal{Z} = G(F \otimes \mathbb{R})/K^G$ où K^G est un sous groupe compact maximal de $G(F \otimes \mathbb{R})$. $\mathcal{Z}$ est une variété C^∞. D'après [B-S], on sait qu'il existe une variété topologique à bord contractile $\mathcal{Z}^*$ telle que si Γ est un sous groupe arithmétique de $G(F)$ sans torsion alors:

(i) Γ agit proprement et librement sur $\mathcal{Z}^*$.

(ii) $\hat{X} = \Gamma\backslash\mathcal{Z}^*$ est une compactification de $X = \Gamma\backslash\mathcal{Z}$ dont le bord est lisse si et seulement si $r_{\mathbb{Q}}(G) \leqslant 1$. Son bord est une réunion finie de tores indexée par les Γ-classes de conjugaisons des Borels de $G(F)$

(iii) Pour tout $A[\Gamma]$-module M libre de type fini sur A, le faisceau $\tilde{M}$ des sections continues du revêtement $\Gamma\backslash(\mathcal{Z}^* \times M) \to \Gamma\backslash\mathcal{Z}^* = \hat{X}$ sur $\hat{X}$ est lcflf.

(iv) $\hat{X}$ est un $K[\Gamma, 1]$ espace au sens d'Eilenberg-Maclane, le $A[\Gamma]$-module trivial A admet donc une A résolution de longueur finie par des $A[\Gamma]$-modules libres de type fini. Donc $H^*(\hat{X}; \tilde{M}) = H^*(\Gamma; M)$ (par la suite spectrale de Leray puisque $\mathcal{Z}^*$ est contractile) est de type fini sur A. Il en est de même de $H^*(\delta\hat{X}, \tilde{M})$. (cf. [B-S] Sect. 11).

En faisant agir Γ dualement sur $M^\circ = \mathrm{Hom}(M, A)$, le faisceau $\tilde{M}^\circ$ est le faisceau dual de $\tilde{M}$. Les considérations précédentes et le Th. 1.4 impliquent donc le

THÉORÈME 1.6. *On reprend les notations précédentes, Le cup-produit suivant est une dualité parfaite*

$$- \cup - : H^q(\Gamma\backslash\mathcal{Z}, \tilde{M}) \otimes H_c^{n-q}(\Gamma\backslash\mathcal{Z}, \tilde{M}^\circ) \to H_c^n(\Gamma\backslash\mathcal{Z}; A) \cong A.$$

REMARQUE. Dans notre application ultérieur, il se peut que Γ contienne de la torsion. Dans ce cas, si l'action n'est pas libre, $\tilde{M}$ n'est pas lcflf; on considèrera donc un sous-groupe normal Γ' de Γ d'indice fini inversible dans A, afin d'avoir le théorème précédent pour Γ'. On se ramènera ensuite à Γ en prenant les Γ/Γ'-invariants (en effet $H^q(\Gamma\backslash\mathcal{Z}, \tilde{M}) = H^q(\Gamma'\backslash\mathcal{Z}, \tilde{M})^{\Gamma/\Gamma'}$) et en utilisant le fait que $\langle\gamma.x, y\rangle = \langle x, {}^t\gamma.y\rangle$.

2. Dualité en cohomologie d'intersection naïve (partie ordinaire)

Dans le paragraphe précédent nous avons rappelé un résultat de dualité entre cohomologie à support compact et cohomologie sans support. On définit maintenant $H_!^q(X; \mathcal{S})$ comme l'image de $H_c^q(X; \mathcal{S})$ dans $H^q(X; \mathcal{S})$ et nous étudions la dualité de Poincaré pour ces modules de cohomologie d'intersection naïve. On s'intéresse désormais à l'espace localement symétrique X défini à la fin du paragraphe précédent. Pour obtenir une dualité parfaite (à coeff. entiers) nous aurons besoin d'établir que le module quotient $H^1(X; \mathcal{S})/H_!^1(X; \mathcal{S})$ est sans torsion. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas, c'est pourquoi on obtiendra seulement une dualité entre les composantes *ordinaires* de ces modules.

2.1. NOTATIONS

Soit F un corps de nombres (ultérieurement, on se limitera au cas d'un corps quadratique imaginaire). On note S l'ensemble des places archimédiennes de F, S_1 l'ensemble des plongements réels et S_2 l'ensemble des places imaginaires. Soit G

le groupe GL_2 des matrices 2×2 inversibles. Soit $F_{\mathbb{A}} = F_f \times F_\infty$ l'anneau des adèles de F. Pour tout sous-groupe compact ouvert K de $G(F_f)$, on note X_K l'espace topologique $G(F)\backslash G(F_{\mathbb{A}})/K_\infty Z_\infty K$ où $K_\infty = O_2(\mathbb{R})^{S_1} \times U_2(\mathbb{C})^{S_2}$ et $Z_\infty \cong \mathbb{R}^{*S_1} \times \mathbb{C}^{*S_2}$ est le centre de $G(F_\infty) = \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})^{r_1} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^{r_2}$. Si W est un F-vectoriel sur lequel $G(F)$ opère, on note $\tilde{W}_K$ le faisceau sur X_K des sections continues du revêtement topologique $G(F)\backslash(G(F_{\mathbb{A}})/K_\infty Z_\infty) \times W \to X_K$ où $G(F)\backslash(G(F_{\mathbb{A}})/K_\infty Z_\infty K) \times W$ est défini par une action de $\mathrm{GL}_2(F)$ diagonale sur $(G(F_{\mathbb{A}})/K_\infty Z_\infty K) \times W$ muni de la topologie discrète sur W; les sections du faisceau $\tilde{W}_K$ sont donc localement constantes.

Si $K \subset K'$ avec K et K' compacts ouverts, on a une projection canonique $\Pi_{KK'}: X_K \to X_{K'}$ telle que $\Pi_{KK'}^*.(\tilde{W}_{K'}) = \tilde{W}_K$. On obtient donc un homomorphisme de faisceau:

$$\tilde{W}_K \leftarrow \tilde{W}_{K'}$$

$$X_K \to X_{K'}$$

qui induit le morphisme de restriction suivant sur la cohomologie: $\mathrm{res}_{K'K}$: $H^q(X_{K'}; \tilde{W}_{K'}) \to H^q(X_K; \tilde{W}_K)$ (on a aussi cela bien sûr pour la cohomologie à support compact). K étant d'indice fini dans K', on peut aussi définir un morphisme de transfert (cf [B] 11.19 p. 83):

$$\mathrm{tr}_{KK'}: H^q(X_K; \tilde{W}_K) \to H^q(X_{K'}; \tilde{W}_{K'}).$$

Soit maintenant $g \in G(F_f)$ et soient K et K' deux sous groupes ouverts compacts de $G(F_f)$. D'après ce qui vient d'être dit, à la correspondance topologique:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_K & & X_{K'} \\ & \swarrow^{\text{mult à dte par } g} & & \nearrow_{\text{proj can}} & \\ X_{K' \cap g^{-1}Kg} & & & & \end{array} \qquad (C_{KgK'})$$

on peut associer l'opérateur de Hecke

$$[KgK'] = \mathrm{tr}_{K' \cap gKg^{-1}K'} \circ g^* \circ \mathrm{res}_{KK \cap g^{-1}K'g}$$

où g^* est l'application induite par la multiplication par g de $H^q(X_{K \cap gK'g^{-1}}; \tilde{W}_{K \cap gK'g^{-1}})$ dans $H^q(X_{K' \cap g^{-1}Kg}; \tilde{W}_{K' \cap g^{-1}Kg})$. De plus le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{lccc} [KgK']: & H_c^q(X_K; \tilde{W}_K) & \longrightarrow & H_c^q(X_{K'}; \tilde{W}_{K'}) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ [KgK']: & H^q(X_K; \tilde{W}_K) & \longrightarrow & H^q(X_{K'}; \tilde{W}_{K'}) \end{array}$$

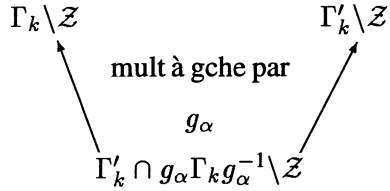
ce qui induit $[KgK']\colon H^q_!(X_K;\tilde{W}_K) \to H^q_!(X_{K'};\tilde{W}_{K'})$.

On peut définir ces opérateurs d'une façon différente: Soient $\tilde{X} = \lim.\mathrm{proj}_K X_K$ et $\tilde{W} = \lim.\mathrm{inj}_K W_K$. On pose $H^q(\tilde{X};\tilde{W}) = \lim.\mathrm{inj}_K H^q(X_K;\tilde{W}_K)$. Tout élément g de $G(F_f)$ opère sur $H^q(\tilde{X};\tilde{W})$ via g^* et on a $H^q(X_K;\tilde{W}_K) = H^q(\tilde{X};\tilde{W})^K$. Alors via cet isomorphisme, on définit l'opérateur $[KgK']$ par: Pour tout $x \in H^q(X_K;\tilde{W}_K), [KgK'].x = \Sigma_i g_i^*.x$ où les g_i sont tels que $KgK' = \amalg_i Kg_i$.

On suppose désormais que $\det(K) = \mathcal{O}_F^\times$. Si $\{t_k; k = 1,\dots,h\}$ est un système de représentants d'idèles du groupe $\mathcal{C}_F$ des classes de F, la décomposition de X_K en composantes connexes est

$$X_K = \amalg_k \Gamma_k \backslash \mathcal{Z} \quad \text{avec} \quad \Gamma_k = G(F) \cap \begin{pmatrix} t_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} t_k^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{H}_3 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/U_2(\mathbb{C}).\mathbb{C}^\times$, $\mathcal{H}_2 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/O_2(\mathbb{R}).\mathbb{R}^\times$ et $\mathcal{Z} = \mathcal{H}_3^{S_2} \times \mathcal{H}_2^{S_1}$. Soit maintenant $\alpha \in F^*$, posons $g_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors la correspondance $C_{Kg_\alpha K'}$ induit sur chaque composante connexe la correspondance



et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{lccc} [Kg_\alpha K']: & H^q_?(X_K;\tilde{W}_K) & \longrightarrow & \mathbf{H}^q_?(X_{K'};\tilde{W}_{K'}) \\ & \| & & \| \\ \oplus_k[\Gamma_k g_\alpha \Gamma']: & \oplus_k H^q_?(\Gamma_k\backslash\mathcal{Z},\tilde{W}_k) & \longrightarrow & \oplus_k H^q_?(\Gamma'\backslash\mathcal{Z};\tilde{W}_{K'}) \end{array}$$

avec $? = \emptyset, c, !$.

2.2. Faisceaux à valeurs entières

Notons $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et pour toute place finie notons $\mathcal{O}_{(v)}$, resp. $\mathcal{O}_v$ le localisé de $\mathcal{O}_F$ en v, resp. le complété de $\mathcal{O}_F$ en v. Pour tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_F$, on pose $\mathcal{I}_v = \mathcal{I}\mathcal{O}_v$. Soit $\mathcal{A}$ un idéal entier de F, posons $K_i(\mathcal{A}) = \amalg_v K_i(\mathcal{A}_v)(i = 0 \text{ ou } 1)$ où $K_0(\mathcal{A}_v)$ est le sous groupe de $G(F_v)$ des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ telles que $a, d \in \mathcal{O}_v, ad - bc \in \mathcal{O}_v^\times, c \in \mathcal{A}_v$ et $b \in \mathcal{D}_v^{-1}\mathcal{A}_v^{-1}, \mathcal{D}$ désignant l'idéal différente de F sur $\mathbb{Q}$ et où $K_1(\mathcal{A}_v)$ est le sous-groupe de $K_0(\mathcal{A}_v)$ des matrices vérifiant en plus $d - 1 \in \mathcal{A}_v$. Soient deux ideaux $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de F, on note

aussi $\Gamma_0(\mathcal{M},\mathcal{N})$ le sous-groupe arithmétique de $G(F)$ des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ telles que $a,d \in \mathcal{O}_F, c \in \mathcal{M}\mathcal{N}, ad-bc \in \mathcal{O}_F^\times$ et $b \in \mathcal{N}^{-1}$. De même $\Gamma_1(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est le sous-groupe de $\Gamma_0(\mathcal{M},\mathcal{N})$ des matrices vérifiant en plus $d-1 \in \mathcal{M}$.

Dans toute la suite on considèrera le groupe $K = K' = K_1(\mathcal{A})$; on aura alors $\Gamma_k = \Gamma_k' = \Gamma_1(\mathcal{A}, \mathcal{D}\mathcal{J}_k^{-1})$ pour tout $k \in \{1,\dots,h\}$ où $\mathcal{J}_k$ est l'idéal de F défini par t_k.

On définit maintenant un faisceau à valeurs entières sur chaque composante connexe comme dans le paragraphe précédent (cf. 1.5.(iii)). Pour tout k, nous devons donc définir un $\mathcal{O}_F[\Gamma_k]$-module de type fini sur $\mathcal{O}_F$:

Soit $\mathrm{Sym}^n(\mathcal{O}_F \times \mathcal{N})$ l'ensemble des polynômes homogènes à deux variables (X,Y) de degré n, $P(X,Y) = \Sigma_{i=0}^n a_i X^i Y^{n-1}$ avec $a_i \in \mathcal{N}^{n-i}$. Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(\mathcal{M},\mathcal{N})$, on pose $(\gamma.P)(X,Y) = P((X,Y).\gamma) = P(aX+cY, bX+dY)$. Posons pour $n_F = \Sigma_\sigma n_\sigma.\sigma$ (la somme portant sur les plongements de F dans $\bar{\mathbb{Q}}$)

$$L_k(n_F;\mathcal{O}_F) = \otimes_\sigma \mathrm{Sym}^{n_\sigma}(\sigma(\mathcal{O}_F) \times \sigma(\mathcal{D}\mathcal{J}_k^{-1})).$$

Les éléments de $L_k(n_F;\mathcal{O}_F)$ sont des polynomes homogènes à $2n$ variables $(X^\sigma, Y^\sigma)_\sigma$. On munit ce groupe d'une structure de $\mathcal{O}_F[\Gamma_k]$-module en faisant opérer $\gamma \in \Gamma_k$ par $(\gamma.P)((X^\sigma,Y^\sigma)_\sigma) = P(((X^\sigma,Y^\sigma).\gamma^\sigma)_\sigma)$. On appelle $\tilde{L}_k(n_F;\mathcal{O}_F)$ le faisceau ainsi construit sur $\Gamma_k\backslash\mathcal{Z}$; la somme sur k de ces faisceaux donne un faisceau sur $X_1(\mathcal{A}) = X_K$ que l'on nomme $\tilde{L}(n_F;\mathcal{O}_F)$. Pour tout $\mathcal{O}_F$-module M, on pose aussi

$$\tilde{L}(n_F;M) = \tilde{L}(n_F;\mathcal{O}_F) \otimes M.$$

Il n'est pas très difficile de voir que ce faisceau est indépendant du choix des t_k. Ce faisceau n'est pas lcflf en général (cela dépend de M), mais pour $M = \mathbb{C}, F, \mathcal{O}_v$ ce sera toujours le cas. Pour F quadratique imaginaire, on pose $\tilde{L}(n_1,n_2;M) = \tilde{L}(n_1\,\mathrm{id}_{\bar{\mathbb{Q}}} + n_2.c;M)$.

Action de la conjugaison complexe:

L'isomorphisme antilinéaire induit par la conjugaison c de $\mathcal{O}_F \times \mathcal{D}.\mathcal{J}_k^{-1}$ sur $\mathcal{O}_F \times \mathcal{D}^c(\mathcal{J}_k^c)^{-1}$ s'étend naturellement en un isomorhisme de $\mathrm{Sym}^n(\mathcal{O}_F \times \mathcal{D}.\mathcal{J}_k^{-1})$ sur $\mathrm{Sym}^n(\mathcal{O}_F \times \mathcal{D}^c.(\mathcal{J}_k^c)^{-1})$. Posons pour $n,m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

$$L_k(n,m;\mathcal{O}_F) = \mathrm{Sym}^n(\mathcal{O}_F \times \mathcal{D}.\mathcal{J}_k^{-1}) \otimes \mathrm{Sym}^m(\mathcal{O}_F \times \mathcal{D}^c.(\mathcal{J}_k^c)^{-1}).$$

On définit alors un isomorphisme antilinéaire canonique de $L_k(n,m;\mathcal{O}_F)$ sur $L_k(m,n;\mathcal{O}_F)$ par

$$\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^{n-i} (X^c)^j (Y^c)^{m-j} \mapsto \sum_{i,j} (a_{ij})^c X^j Y^{m-j} (X^c)^i (Y^c)^{n-i}.$$

On vérifie sans peine que ce dernier commute à l'action de Γ_k. Pour $m = n$, ceci fournit une action de c sur $L_k(n;F)$ Γ_k-équivariante. On en deduit que Γ_k laisse stable le sous-module des invariants par c que l'on notera $L_k(n;\mathbb{Z})$. On peut donc définir des faisceaux $\tilde{L}(n;\mathbb{Z})$ et $\tilde{L}(n;A) = \tilde{L}(n;\mathbb{Z}) \otimes A$ pour tout anneau A qui coïncident avec les précédents lorsque A contient $\mathcal{O}_F[1/2]$.

2.3. Cohomologie du bord

La compactification de Borel–Serre $\hat{X}$ de X est la réunion des quotients $\Gamma_k\backslash\mathcal{Z}^*$. La construction de $\mathcal{Z}^*$ consiste en l'ajout d'un bord à $\mathcal{Z}$ dont l'ensemble des composantes connexes est en bijection avec l'ensemble des Borels de $GL_2(F)$. Soit $B = \alpha B_0 \alpha^{-1}$ un Borel de $GL_2(F)$ (B_0 désignant le Borel standart de GL_2) et pour tout $g \in GL_2(\mathbb{C})$, la décomposition d'Iwasawa correspondant à B_0 de $\alpha^{-1}.g$, nous permet d'identifier $(\mathbb{R}_+^\times)^S \times (\mathbb{R}^{S_1} \times \mathbb{C}^{S_2})$ à $\mathcal{Z}$ via

$$(x,z) \mapsto \alpha \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_\infty . Z_\infty .$$

Nous ajoutons alors le bord $\partial_B = (\infty)^S \times (\mathbb{R}^{S_1} \times \mathbb{C}^{S_2})$ de façon évidente et posons $\partial\mathcal{Z}^* = \amalg_B \partial_B$. On construit ainsi une variété topologique $\mathcal{Z}^*$ qui vérifie les propriétés 1.5(i)–(iv), on peut voir également que $\partial\hat{X}$ est la réunion des (r_1+2r_2)-tores $\Gamma_B\backslash\partial_B$, avec $\Gamma_B = \Gamma \cap B$, B parcourant un système de représentants fixés une fois pour toute de l'ensemble Cusp (Γ) des Γ-classes de conjugaison des Borels de $G(F)$. De plus on a les isomorphismes

$$H^q(\partial\hat{X};\tilde{M}) \simeq \bigoplus_B H^q(\Gamma_B\backslash\partial_B;\tilde{M}) \simeq \bigoplus_B H^q(\Gamma_B, M)$$

ainsi que le diagramme commutatif suivant (à lignes exactes):

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_!^*(X_K;\tilde{L}(n_1,n_2;M)) & \longrightarrow & H^*(X_K;\tilde{L}(n_1,n_2;M)) & \longrightarrow & H^*(\delta\hat{X}_K;\tilde{L}(n_1,n_2;M)) \\
 & & \uparrow\uparrow & & \uparrow\uparrow & & \uparrow\uparrow \\
0 & \longrightarrow & \oplus_k H_!^*(\Gamma_k\backslash\mathcal{Z};\tilde{L}_k(n_1,n_2;M)) & \longrightarrow & \oplus_k H^*(\Gamma_k\backslash\mathcal{Z};\tilde{L}_k(n_1,n_2;M)) & \longrightarrow & \oplus_k H^*(\partial(\Gamma_k\backslash\hat{\mathcal{Z}});\tilde{L}(n_1,n_2;M) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \oplus_k H_P^*(\Gamma_k;L_k(n_1,n_2;M)) & \longrightarrow & \oplus_k H^*(\Gamma_k;L_k(n_1,n_2;M)) & \longrightarrow & \oplus_k H_\partial^*(\Gamma_k;L_k(n_1,n_2;M))
\end{array}$$

avec $H_\partial^*(\Gamma;M) = \oplus_B H^*(\Gamma_B;M)$ et $H_p^*(\Gamma,M) = \mathrm{Ker}(H^*(\Gamma,M) \to H_\partial^*(\Gamma;M)$. Les flèches entre les deux dernières lignes sont des isomorphismes seulement si les Γ_k sont sans torsion ou s'il existe un sous-groupe normal Γ_k' de Γ_k d'indice fini inversible dans l'anneau de définition A de M (en effet, dans ce cas

$H^*(\Gamma_k; L_k(n_1, n_2; M))$ et $H^*(\Gamma_k\backslash\mathcal{Z}; \tilde{L}_k(n_1, n_2; M))$ sont respectivement isomorphes à $H^*(\Gamma'_k; L_k(n_1, n_2; M))^{\Gamma_k/\Gamma'_k}$ et $H^*(\Gamma'_k\backslash\mathcal{Z}; \tilde{L}_k(n_1, n_2; M))^{\Gamma_k/\Gamma'_k})$. Lorsque $w_F = \mathrm{Card}(\mathcal{O}_F^\times)$ sera inversible dans A, nous disposerons du lemme suivant:

LEMME 2.3.1. *On suppose K imaginaire quadratique. Soit $n(\mathcal{A})$ le générateur positif de $\mathcal{A} \cap \mathbb{Z}$. Si $n(\mathcal{A}) > 3, \Gamma_k \cap \mathrm{SL}_2(F)$ est sans torsion pour tout k.*

Démonstration. Supposons que $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \neq 1_2 \in \Gamma_1(\mathcal{A}, \mathcal{D}\mathcal{J}_k^{-1}) \cap \mathrm{SL}_2(K)$ soit de torsion, alors γ est conjugué à un élément de la forme $\left(\begin{smallmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{smallmatrix}\right)$ donc la trace $a + d = 2\cos(t) \in \mathcal{O}_F \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ puisqu'elle se trouve invariante par la conjugation complexe. $a + d \neq -2$ sinon on aurait $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ qui n'appartient pas à $\Gamma_1(\mathcal{A}, \mathcal{D}\mathcal{J}_k^{-1})$ car $n(\mathcal{A}) > 2$. Donc $a + d = -1, 0$ ou 1 ce qui contredit $a + d \equiv 2 \bmod n(\mathcal{A})$ et $n(\mathcal{A}) > 3$. □

Par ailleurs, $\Gamma_1(\mathcal{A}, \mathcal{D}\mathcal{J}_k^{-1})/\Gamma_1(\mathcal{A}, \mathcal{D}\mathcal{J}_k^{-1}) \cap \mathrm{SL}_2(F)$ s'injecte naturellement dans $\mu_F = \mathcal{O}_F^\times$ par le déterminant.

2.4. Etude de la partie ordinaire

Considérons le semi-groupe $\Delta_1(\mathcal{A})$ des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ dans $G(F_f)$ telles que pour chaque place finie v de $F, b_v \in \mathcal{D}_v^{-1}, c_v \in \mathcal{D}_v\mathcal{A}_v, d_v - 1 \in \mathcal{A}_v, d_v$ et $a_v \in \mathcal{O}_v$, et notons $R_1(\mathcal{A})$ l'algèbre de Hecke abstraite construite à partir du groupe $K_1(\mathcal{A})$ et du semi-groupe ce-dessus (cf [Sh] Chap. 3) i.e. comme le groupe abélien $\mathbb{Z}[K_1(\mathcal{A})\backslash\Delta_1(\mathcal{A})/K_1(\mathcal{A})]$ muni du "produit de convolution". Pour toute place finie v considérons les opérateurs $T(\mathcal{P}_v)$ et $T(\mathcal{P}_v, \mathcal{P}_v)$ définis respectivement par les classes doubles

$$K_1(\mathcal{A})(1, \ldots, 1, \begin{pmatrix} \pi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1)K_1(\mathcal{A}) \quad \text{et}$$

$$K_1(\mathcal{A})(1, \ldots, \begin{pmatrix} \pi_v & 0 \\ 0 & \pi_v \end{pmatrix} 1, \ldots, 1)K_1(\mathcal{A}),$$

π_v étant une uniformisante de $\mathcal{O}_v$ l'anneau local correspondant à v. Alors l'algébre $R_1(\mathcal{A})$ est isomorphe au produit tensoriel restreint $\otimes'_v R_v$ des algèbres $R_v = \mathbb{Z}[T(\mathcal{P}_v), T(\mathcal{P}_v, \mathcal{P}_v)]$ si v est premier à $\mathcal{A}$ et $R_v = \mathbb{Z}[T(\mathcal{P}_v)]$ si $v(\mathcal{A}) > 0$. Pour toute représentation de $R_1(\mathcal{A})$ sur un module de type fini M sur un anneau local noetherien complet et pour tout opérateur $T \in R_1(\mathcal{A})$ on peut définir l'idempotent de Hida $e_T = \lim_n T^{n!}$ qui permet de décomposer M en somme directe de sa partie T-ordinaire $M^\circ = e_T M$ (sur laquelle T est inversible) et sa partie T-supersingulière (sur laquelle T est topologiquement nilpotent). Pour tout nombre premier rationnel p, on note e_p l'idempotent associé à l'opérateur $T_p = \Pi_{v, v(p)>0} T_v$.

On suppose maintenant que F est quadratique imaginaire, p est impair et $\neq 3$ si $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Nous nous intéressons à la représentation de $R_1(\mathcal{A})$ sur la cohomologie des faisceaux $\tilde{L}(n; \mathcal{O}_v) = \tilde{L}(n, n; \mathcal{O}_v)$ sur l'espace $X_1(\mathcal{A})$; en particulier nous montrons dans cette partie la

PROPOSITION 2.4.1. *Soient n un entier naturel, O une extension finie de $\mathbb{Z}_p$. On suppose que $n(\mathcal{A}) > 3$, alors:*

(i) *$e_p H^1(\partial X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n; O))$ est sans torsion.*

(ii) *Si p premier à $\mathcal{A}$ et $p > n$, $H^1(\partial X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n; O))$ est sans torsion.*

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat pour chaque composante connexe $\Gamma_k \backslash \mathcal{Z}^*$. Pour chaque k, prouvons que $e_{[\Gamma_k g_p \Gamma_k]} H^1_\partial(\Gamma_k; L_k(n; O))$ (resp. $H^1_\partial(\Gamma_k; L_k(n; O))$ quand $p > n$ et p premier à $\mathcal{A}$) est sans torsion (rappelons ici que $g_p = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$). On par définition, $H^i_\partial(\Gamma_k; L_k(n; A)) = \oplus_B H^i(\Gamma_k \cap B; L_k(n; A))$ et ce dernier module s'injecte (car p est premier à l'ordre de μ_F) dans $U^i(\Gamma_k; L_k(n; A)) = \oplus_B H^i(\tilde{\Gamma}_B; L_k(n; A))$ où $\tilde{\Gamma}_B$ désigne le radical unipotent de $\Gamma_k \cap B$. Montrons que ce dernier module est sans torsion pour $i = 1$. Pour cela nous considérons la suite exacte:

$$O \to L_k(n; K) \to L_k(n; K) \to L_k(n; K/O) \to 0$$

avec K le corps des fractions de O.

On a donc l'exactitude de:

$$U^0(\Gamma_k; L_k(n; K/O)) \to U^1(\Gamma_k; L_k(n; O)) \to U^1(\Gamma_k; L_k(n; K)).$$

Nous avons donc à prouver:

(i) $e_{[\Gamma_k g_p \Gamma_k]} U^0(\Gamma_k; L_k(n; K/O))$ est colibre pour tout n et p.

(ii) Quand $p > n$ et p premier à $\mathcal{A}$, $U^0(\Gamma_k; L_k(n; K/O))$ est colibre.

Pour cela on peut supposer que O contient $\mathcal{O}_F$. Alors le premier point résulte immédiatement d'un calcul de H. Hida (cf. [H5] Th. 3.10). Le second peut se faire en faisant le calcul direct des $H^0(\tilde{\Gamma}_B; L_k(n; K/O))$: Soit $\mathcal{O}_{(p)}$ le localisé de $\mathcal{O}_F$ où les éléments premiers à p sont inversibles. Puisque p est premier à $\mathcal{A}$, il existe $\alpha \in GL_2(\mathcal{O}_{(p)})$ tel que $\tilde{\Gamma}_B = \alpha\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right); x \in \mathcal{B}^{-1}\}\alpha^{-1}$ avec $\mathcal{B}_{(p)} = \mathcal{D}^{-1}_{(p)} . \mathcal{J}_k$ (i.e. le Borel B est non p-ramifié cf. [T]). Alors on voit facilement que si p est premier à $n!$, $H^0(\tilde{\Gamma}_B; L_k(n; K/O) = K/O$. $\mathrm{Sym}^n(\varepsilon_1) \otimes \mathrm{Sym}^n(\varepsilon_2)$ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est la base canonique de $O \times \mathcal{D}\mathcal{J}_k^{-1} . O$. □

2.5. LE THÉORÈME DE DUALITÉ

Lorsque A est de Dedekind nous savons (Th 1.6) que les cup-produits suivants sont des dualités parfaites:

$$- \cup - : H_c^1(X_K; \tilde{L}(n; A)) \otimes H^2(X_K; \tilde{L}(n; A)^o) \to H_c^3(X_K; A) \simeq A,$$
$$- \cup - : H^1(X_K; \tilde{L}(n; A)) \otimes H_c^2(X_K; \tilde{L}(n; A)^o) \to H_c^3(X_K; A) \simeq A.$$

De plus les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc}
- \cup - : H_c^1(X_K; \tilde{L}(n; A)) \otimes H^2(X_K; \tilde{L}(n; A)^o) & \longrightarrow & H_c^3(X_K; A) \simeq A \\
\uparrow = & \uparrow = \; i & = \quad = \\
- \cup - : H_c^1(X_K; \tilde{L}(n; A)) \otimes H_c^2(X_K; \tilde{L}(n; A)^o) & \longrightarrow & H_c^3(X_K; A) \simeq A
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
- \cup - : H^1(X_K; \tilde{L}(n; A)) \otimes H_c^2(X_K; \tilde{L}(n; A)^o) & \longrightarrow & H_c^3(X_K; A) \simeq A \\
\uparrow & \uparrow = & = \quad = \\
- \cup - : H_c^1(X_K; \tilde{L}(n; A)) \otimes H_c^2(X_K; \tilde{L}(n; A)^o) & \longrightarrow & H_c^3(X_K; A) \simeq A
\end{array}$$

Ce qui donne lieu à l'accouplement suivant

$$- \cup - : H_!^1(X_K; \tilde{L}(n; A)) \otimes H_!^2(X_K; \tilde{L}(n; A)^o) \to H_c^3(X_K; A) \simeq A. \quad (2.5)$$

Si A est un corps, (2.5) est parfait. Par ailleurs, le comportement de cet accouplement vis à vis de l'action de l'algèbre de Hecke, nous est donné par:

PROPOSITION 2.5.0 *On note* $\langle , \rangle_K$, *le cup-produit précédent, alors on a:*

(a) *Pour tout* $g \in \mathrm{GL}_2(F_f), (x, y) \in H_!^1(X_{g^{-1}Kg}; \tilde{L}(n; A)) \times H_!^2(X_K; \tilde{L}(n; A)^o)$ *alors* $\langle g^*.x, y\rangle_K = \langle x, (g^{-1})^*.y\rangle_{g^{-1}Kg}$

(b) *Soit* $(x, y) \in H_!^1(X_K; \tilde{L}(n; A)) \otimes H_!^2(X_{K'}; \tilde{L}(n; A)^o)$, *on a* $\langle \mathrm{res}_{K'K}.y, x\rangle_K = \langle y, Tr_{KK'}.x\rangle_{K'}$.

(c) *Pour tout* $g \in \mathrm{GL}_2(F_f), [KgK']$ *a donc pour adjoint* $[KgK']^* = [K'g^{-1}K]$. *(i.e. soit* $(x, y) \in H_!^1(X_K; \tilde{L}(n; A)) \otimes H_!^2(X_{K'}; \tilde{L}(n; A)^o)$, *on a* $\langle [KgK'].x, y\rangle_{K'} = \langle x, [K'g^{-1}K].y\rangle_K$

Démonstration. (c) découle de (a) et (b) et de la définition de $[KgK']$. Pour (b) cf. [H1] (3.10). (a) provient de $g^*\tilde{W}_K = \tilde{W}_{gKg^{-1}}$ et du fait général suivant: Si φ est une application continue de X dans Y et si $\mathcal{S}$ est un faisceau sur X, on a un

morphisme canonique $\varphi^*\colon H^i(Y,\mathcal{S}) \to H^i(X,\varphi^*\mathcal{S})$. De plus, si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux faisceaux sur X, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^i(Y,\mathcal{S}) \otimes H^i(Y,\mathcal{R}) & \longrightarrow & H^i(Y,\mathcal{S}\otimes R)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(X,\varphi^*\mathcal{S})\otimes H^i(X,\varphi^*\mathcal{R}) & \longrightarrow & H^i(X,\varphi^*(\mathcal{S}\otimes\mathcal{R})). \end{array}$$

THÉORÈME 2.5.1. *On conserve les hypothèses de la section précédente. On suppose que O est une extension finie de $\mathbb{Z}_p$, alors* (2.5) *induit une dualité parfaite entre les parties ordinaires (lorsque $A = 0$) i.e. l'accouplement suivant est parfait:*

$$- \cup - : e_p H^1_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;O)) \otimes e_p^* H^2_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;O)^o) \to H^3_c(X_1(\mathcal{A});O) \simeq 0.$$

(* *désigne l'adjoint pour l'accouplement* $\cup$).

De plus si $p > n$ et p premier à $\mathcal{A}$, l'accouplement (2.5) *est parfait.*

Démonstration. Il faut démontrer que le morphisme de noyau fini (induit par $\cup$) $e_p H^1_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;\mathcal{O}_v)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_v}(e_p^* H^2_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;\mathcal{O}_v)^o), \mathcal{O}_v)$ est surjectif. Remarquons que $e_p H^1_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;\mathcal{O}_v)) \otimes F_v \simeq e_p H^1_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;F_v))$ et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_v}(e_p^* H^2_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;\mathcal{O}_v)^o), \mathcal{O}_v)$. On désigne par i l'application canonique de $H^2_c(X_K; \tilde{L}(n;A)^o) \to H^2(X_K; \tilde{L}(n;A)^o)$, alors $\varphi_o i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_v} \times (e_p^* H^2_c(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;\mathcal{O}_v)^o), \mathcal{O}_v)$, il existe donc $x \in e_p H^1(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;\mathcal{O}_v))$ tel que $\varphi_o i(y) = y \cup x$ pour tout y dans $e_p^* H^2_c(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;\mathcal{O}_v)^o)$ d'après la remarque précédant la Prop. 2.5.0 pour $A = F_v$, x est de torsion dans $e_p H^1(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;\mathcal{O}_v))/e_p H^1_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n;\mathcal{O}_v))$ donc nul d'après 2.4.1. On procède de la même façon pour la deuxième assertion. □

Pour obtenir $\tilde{L}(n;A)^o$ comme un sous-faisceau de $\tilde{L}(n;A)$, on considère la forme bilinéaire B_n définie comme suit:

$$\text{Si } P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i Y^{n-i} \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i Y^{n-i},$$

$$\text{on pose } [P,Q]_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i b_{n-i} / C_i^n.$$

Si on définit $P_{a,b}(X,Y) = \det\left(\begin{smallmatrix} a & X \\ b & Y \end{smallmatrix}\right)^n = (aY - bX)^n$, on vérifie sans peine que $[P_{a,b}, P_{c,d}]_n = (ad - bc)^n$. On montre ainsi en le vérifiant sur les polynomes $P_{a,b}$ (puisqu'ils engendrent $\mathrm{Sym}^n(F^2)$) que:

$$[\gamma.P, \gamma.Q]_n = \det(\gamma)^n [P,Q]_n.$$

On définit enfin un accouplement sur $L(n,n;F) = \mathrm{Sym}^n(F^2) \otimes \mathrm{Sym}^n(F^2)$ par $[P \otimes P', Q \otimes Q']_n = [P,Q]_n \times [P',Q']_n$. Cette dernière commute à l'action de la conjugaison complexe, elle induit donc une forme bilinéaire sur les invariants $L(n,n;\mathbb{Q})$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$. On prolonge linéairement cette forme à $L(n,n;\mathbb{Q}) \otimes K$ pour tout corps K.

On obtient ainsi un accouplement $[,]_n$ sur le faisceau $\tilde{L}(n;K)$ à valeurs dans le faisceau $K(n)$ (n désigne l'action de $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$ par multiplication par $|\det(\gamma)|^{2n}$). Pour tout anneau A, cet accouplement permet d'identifier le dual de $\tilde{L}(n;A)$ à un sous-faisceau de $\tilde{L}(n;A)$. On note J_n l'accouplement obtenu sur la cohomologie:

$$H^1_!(X_1(\mathcal{A});\tilde{L}(n;K)) \otimes H^2_!(X_1(\mathcal{A});\tilde{L}(n;K)) \to H^3_c(X_1(\mathcal{A});\tilde{L}(n;K) \otimes \tilde{L}(n;K))$$
$$\to H^3_c(X_1(\mathcal{A});K(n)) \to H^3_c(X_1(\mathcal{A});K) \simeq K.$$

où l'avant-dernière flèche est induite par $[,]_n$.

3. Formes automorphes pour $\mathrm{GL}_2(F)$ et isomorphisme d'Eichler–Shimura–Harder

Rappelons que désormais F est un corps quadratique imaginaire et que par suite, $F_\infty = \mathbb{C}, K_\infty = U_2(\mathbb{C})$ et $Z_\infty = \mathbb{C}^\times$.

3.1. Formes automorphes

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère le caractère

$$\lambda_n : B_o(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$$
$$\begin{pmatrix} t_1 & \times \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_1 \bar{t}_1^{-n} t_2^{-n-1}.$$

Soit ρ^n_∞ la représentation induite de $B_o(\mathbb{C})$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ du caractère λ_n. Cette représentation figure dans la série principale; elle correspond au caractère $\left(\begin{smallmatrix} t_1 & \times \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right) \to (t_1/|t_1|)^{n+1} \times (|t_2|/t_2)^{n+1} \times |t_1 t_2|^{-n}$; son caractère central est $\omega_n(t) = |t|^{-2n}$. Par ailleurs, rappelons que toute représentation automorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_2(F_{\mathbb{A}})$ admet une décomposition $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$, π_∞ étant une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et π_f une représentation de $\mathrm{GL}_2(F_f)$ dont l'espace sera noté H_{π_f}. Pour tout entier n, on définit maintenant l'espace des formes automorphes cuspidales par:

$$S_n = \bigoplus_\pi H_{\pi_f}$$

et pour tout sous-groupe compact ouvert K:

$$S_n(K) = S_n^K = \bigoplus_{\pi} H_{\pi_f}^K,$$

la somme étant prise sur l'ensemble des sous-représentations cuspidales de $GL_2(F_{\mathbb{A}})$ (i.e. apparaissant dans $L_o^2(G(F)\backslash G(F_{\mathbb{A}}), \omega_n^{-1})$) et de composante à l'infini isomorphe à ρ_∞^n. Pour plus de détails, voir Chap. 3 de [Go2] auquel nous empruntons nos notations ou [Ge].

Soit $\mathcal{H}_n(K) = \rho_\infty^{n(K_\infty\text{-fini})} \otimes S_n(K)$ où $\rho_\infty^{n(K_\infty\text{-fini})}$ est l'ensemble des vecteurs dont les translatés par K_∞ engendrent un espace de dimension finie. Pour toute représentation irréductible à gauche M de $U_2(\mathbb{C})$ dans $GL_r(\mathbb{C})$ apparaissant dans $\rho_\infty^{n(K_\infty\text{-fini})}$ nous posons $\mathcal{H}_n(K; M) = \{\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_r)^t$ avec $f_i \in \mathcal{H}_n(K)$ et tels que $\mathbf{f}(gk) = {}^tM(k)\mathbf{f}(g)$ pour tout $k \in U_2(\mathbb{C})$ et $g \in G(F_{\mathbb{A}})$. Il est clair que $\mathcal{H}_n(K, M) = \mathrm{Hom}_{K_\infty}(\mathrm{Vect}(M), \mathcal{H}_n(K))$ donc

$$\mathcal{H}_n(K, M) \cong \mathrm{Hom}_{k_\infty}(\mathrm{Vect}(M), \rho_\infty^{n(K_\infty\text{-fini})}) \otimes S_n(K) \cong S_n(K) \qquad (3.1.1)$$

d'après le lemme de Schur et le fait qu'une représentation irréductible de K_∞ apparaît au plus une fois dans $\rho_\infty^{n(K_\infty\text{-fini})}$ (cf. [Gui] p. 291). Pour toute représentation irréductible M de K_∞ intervenant dans $\rho_\infty^{n(K_\infty\text{-fini})}$, nous pourrons donc identifier $S_n(K)$ à l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathrm{Vect}(M)$ et qui vérifient les conditions suivantes:

1. $\mathbf{f}(\gamma g) = \mathbf{f}(g)$ pour tout $\gamma \in G(F)$,
2. $\mathbf{f}(gz_\infty) = \mathbf{f}(g)\omega_n^{-1}(z_\infty)$ pour tout $z_\infty \in Z_\infty$,
3. $\mathbf{f}(gk_\infty) = {}^tM_n(k_\infty)\mathbf{f}(g)$ pour tout $k_\infty \in K_\infty$,
4. $\mathbf{f}$ est à croissance lente et est C^∞ sur la composante archimédienne,
5. $\mathbf{f}(gk) = \mathbf{f}(g)$ pour tout $k \in K$,
6. $\mathbf{f}$ est cuspidale et son unitarisation $\mathbf{f}_u$ (i.e. $\mathbf{f}_u(g) = \mathbf{f}(g) \times |\det(g)|_F^{n/2}$) est de norme carré intégrable sur $X_K = G(F)\backslash G(F_{\mathbb{A}})/K.K_\infty.Z_\infty$.
7. $\mathbf{f}$ est propre pour les opérateurs de Casimir D' et D'' de valeurs propres $n+n^2/2$.

Pour tout $\chi: F_{\mathbb{A}}^\times / F^\times \to \mathbb{C}^*$ continu, on note $S_n(K, \chi)$ l'espace des formes qui vérifient en plus

8. $\mathbf{f}(gz) = \mathbf{f}(g)\chi(z)$ pour tout $z \in Z_{F_A}$. La restriction de χ à $F_\infty^\times$ est nécessairement ω_n.

Rappelons que les opérateurs Casimir sont les éléments du centre de l'algèbre enveloppante de $gl_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ suivants:

$$D' = X'Y' + Y'X' + H'^2/2 \quad \text{et} \quad D'' = X''Y'' + Y''X'' + H''^2/2,$$

$$\text{où } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $A'.f = (\partial/\partial z)_{z=0}((1+zA).f)$ et $A''.f = (\partial/\partial \bar{z})_{z=0}((1+zA).f)$ pour toute matrice A de $\mathrm{gl}_2(\mathbb{C})$.

3.2. Isomorphisme d'Eichler–Shimura–Harder

Rappelons (cf. Sect. 2.1) que $\tilde{X} = \lim.\mathrm{proj}._K X_K$ et pour toute représentation de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur un espace W, on pose $H^i_!(\tilde{X}; \tilde{W}) = \lim.\ \mathrm{inj}._K H^i_!(X_K; \tilde{W}_K)$. Dans notre contexte, le théorème de Harder (cf. [Ha]) peut s'énoncer comme suit:

THÉORÈME 3.2. (Harder). *On a les isomorphismes $G(F_f)$-équivariant (pour la translation à droite) pour $i = 1$ et 2:*

$$\delta_i :\ S_n \simeq H^i_!(\tilde{X}; \tilde{L}(n; \mathbb{C})).$$

Demonstration. C'est un cas particulier du résultat de G. Harder dans [Ha] (3.6) et Prop. (3.2.4). Pour expliquer ce qui se passe dans notre cas, nous empruntons ses notations. Comme nous ne les utiliserons nulle part ailleurs, nous renvoyons le lecteurs à leur définitions dans [Ha] (cf. (3.1.4) pour H^i_{cusp} et (3.2.5) pour H^i_{res}). D'après [Ha] (3.6) on a $S_n \simeq H^i_{\mathrm{cusp}}(\tilde{X}; L(n,n; \mathbb{C}))$ pour $i = 1$ et 2. Il reste à prouver que $H^i_{\mathrm{cusp}}(\tilde{X}; L(n,n; \mathbb{C})) = H^i_!(\tilde{X}; L(n,n; \mathbb{C}))$. Pour $n > 1$, c'est toujours le cas (quelque soit le corps de nombres K). Lorsque $n = 1$, on a (cf. [Ha] (3.2.5)):

$$H^i_!(\tilde{X}; \mathbb{C}) = H^i_{\mathrm{cusp}}(\tilde{X}; \mathbb{C}) \oplus H^i_{\mathrm{res}}(\tilde{X}; \mathbb{C})$$

où H^i_{res} est une contribution de series d'Eisenstein correspondant à des caractères de Hecke fini (de type (0,0)) chacune ayant la multiplicité $\dim_{\mathbb{C}}((\Lambda^i(\mathrm{Lie}(G_\infty)/\mathrm{Lie}(K_\infty))^{K_\infty})$ pour $0 < i < 2r_1 + 3r_2 = m$ et $H^0_{\mathrm{res}} = H^m_{\mathrm{res}} = 0$ pour un corps de nombres ayant r_1 places réelles et r_2 places imaginaires. Or ici cette multiplicité est nulle. En effet, $\mathrm{Lie}(G_\infty)/\mathrm{Lie}(K_\infty) = \mathrm{gl}_2(\mathbb{C})/u_2(\mathbb{C}) = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})/\mathrm{su}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{P}$ où $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{P} \oplus \mathrm{su}_2(\mathbb{C})$ est la décomposition de Cartan de $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ vue comme algèbre de Lie réelle. Pour $i = 1$ et 2, on voit alors que $\Lambda^i(\mathrm{Lie}(G_\infty)/\mathrm{Lie}(K_\infty)) \otimes \mathbb{C}$ est K_∞-isomorphe à $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ (pour l'action adjointe) et donc irréductible de dim 3; son sous-espace fixé par K_∞ est donc trivial. □

L'objet de ce paragraphe est de détailler le calcul du membre de gauche afin d'obtenir une expression concrète des isomorphismes δ^i. Soit $C^\infty(X_K)(\omega_n^{-1})$ l'espace des fonctions infiniement différentiable sur X_K se transformant par ω_n^{-1} sous l'action du centre Z_∞. Rappelons que l'on définit naturellement une flèche

$$d_i : \mathrm{Hom}_{K_\infty}(\Lambda^i(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C})/\mathrm{Lie}(K_\infty), C^\infty(X_K)(\omega_n^{-1}) \otimes L(n; \mathbb{C})) \to \Omega^i(X_K, \tilde{L}(n; \mathbb{C}))$$

où l'image d'un élément φ par d_i est la i-forme différentielle définie par:

$$d_i(\varphi)(g).X_g = g_\infty.(\varphi(L_g^{-1}.X_g)(g)), \tag{3.2.1}$$

où g_∞ est la composante archimédienne de g, L_g est l'opérateur de translation à gauche par g sur le fibré vectoriel $\Lambda^i T(X_K)$ et où $X_g \in \Lambda^i T(X_K)_g$. De plus, en notant $H^i(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C}); K_\infty; V)$ la cohomologie d'algèbre de Lie relative d'un $(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C}, K_\infty)$-module V, on montre que d_i induit un isomorphisme entre $H^i(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C}), K_\infty; C^\infty(X_K)(\omega_n^{-1}) \otimes L(n;\mathbb{C}))$ et $H^i(X_K; \tilde{L}(n;\mathbb{C}))$ (cf. [B-W] VII Cor. 2.7). L'inclusion $S_n(K) \otimes \rho^{n(K_\infty\text{-fini});\infty)} \subset C^\infty(X_K)(\omega_n^{-1})$ (cf. [Ha] p. 61) composée avec d_i induit un morphisme:

$$S_n(K) \otimes H^i(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C}), K_\infty; \rho^{n(K_\infty\text{-fini})} \otimes L(n;\mathbb{C})) \to$$
$$\to H^i(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C}), K_\infty; C^\infty(X_K)(\omega_n^{-1}) \otimes L(n;\mathbb{C})) \to H^i(X_K; \tilde{L}(n;\mathbb{C})),$$

qui n'est autre que le morphisme δ_i.

La formule (3.2.1) ainsi que l'interprétation de $S_n(K)$ par (3.1.1) va alors nous permettre de décrire δ^i. Posons $V_n = \rho_\infty^{n(K_\infty\text{-fini})} \otimes L(n;\mathbb{C})$ et rappelons que $H^i(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C}); K_\infty; V_n)$ est la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{K_\infty}(\Lambda^*(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C})/\mathrm{Lie}(K_\infty)); V_n)$ (voir [B-W] 1.1.2). Or $\mathrm{gl}_2(\mathbb{C})/\mathrm{Lie}(K_\infty) \simeq \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})/\mathrm{su}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{P}$ où $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{P} \oplus \mathrm{su}_2(\mathbb{C})$ est la décomposition de Cartan de $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ vue comme algèbre de Lie réelle. Par ailleurs, les valeurs propres des opérateurs de Casimir opérant à travers les représentations de $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sur ρ_∞^n et $L(n;\mathbb{C})$ étant égales (ce qui explique bien sûr notre choix de la représentation $L(n;\mathbb{C})$.), on a donc l'isomorphisme canonique suivant (cf. [B-W], Prop. 11 3.1):

$$H^*(\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}); V_n) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})}(\Lambda^*\mathfrak{P}_\mathbb{C}; V_n)$$
$$\text{avec} \quad \mathfrak{P}_\mathbb{C} = \mathfrak{P} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \tag{3.2.2}$$

Soit $D(p)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $p+1$ des polynomes homogènes à 2 variables de degré p. Posons $e_i = X^{(p+i)/2}Y^{(p-i)/2}$ (avec $i \in \{-p, \ldots, p\}$ et i de même parité que p). On dira qu'un vecteur est de poids 2i s'il est colinéaire à e_i. Pour p variant dans $\mathbb{N}$, les $D(p)$ parcourent toutes les classes de représentations irréductibles de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ et on a les décompositions suivantes:

$$\rho^{n(K_\infty\text{-fini})} \simeq \bigoplus_{i>n} D(2i) \ \text{(cf. [Gu] p. 291} \quad \text{avec} \quad \nu = 0 \ \text{et} \ \sigma = 2n+2),$$

$L(n;\mathbb{C}) \simeq \oplus_{j=1}^n D(2j)$ d'après la formule de Clebsch–Gordan (i.e.

$$D(p) \otimes D(q) \simeq \bigoplus_{k=p-q}^{p+q} D(k) \quad \text{avec} \quad p \geqslant q \quad \text{et} \quad k \equiv p+q \pmod 2).$$

Donc $V_n \simeq \oplus_{j=1}^n \oplus_{i>n} \oplus_{k=i-j}^{i+j} D(2k)$.

Par ailleurs, on voit facilement que $\mathfrak{P}_\mathbb{C}$ et $\Lambda^2\mathfrak{P}_\mathbb{C}$ sont SU_2-isomorphes à $D(2)$; du lemme de Schur on déduit donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})}(\Lambda^i\mathfrak{P}_\mathbb{C}; V_n) \simeq 0 \quad \text{si} \quad i = 0 \ \text{et} \ 3,$$
$$\simeq \mathbb{C} \quad \text{si} \quad i = 1 \ \text{et} \ 2.$$

Pour $i = 1$ et 2, c'est la détermination d'une base $\{\Theta_i\}$ de $H^i(\mathrm{gl}_2(\mathbb{C}), K_\infty; V_n) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})}(\Lambda^i \mathcal{P}_\mathbb{C}; V_n)$ qui va nous permettre d'expliciter les isomorphismes d'Eichler–Shimura–Harder. On détermine d'abord une base $\{\Theta_i^0\}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})}(\Lambda^i \mathcal{P}_\mathbb{C}; D(2))(i = 1, 2)$:

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}.H \oplus \mathbb{R}.E_1 \oplus \mathbb{R}.E_2 \quad \text{avec}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $k_\infty = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, alors

$$\mathrm{Ad}(k_\infty).H = (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}).H - 2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta).E_1 - 2\,\mathrm{Im}(\alpha\beta).E_2,$$

$$\mathrm{Ad}(k_\infty).E_1 = 2\,\mathrm{Re}(\bar{\alpha}\beta).H + \mathrm{Re}(\alpha^2 - \beta^2).E_1 + \mathrm{Im}(\alpha^2 - \beta^2).E_2,$$

$$\mathrm{Ad}(k_\infty).E_2 = 2\,\mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta).H - \mathrm{Im}(\alpha^2 + \beta^2).E_1 + \mathrm{Re}(\alpha^2 + \beta^2).E_2,$$

$$XY.k_\infty = (\alpha X - \bar{\beta}Y)(-\bar{\beta}X + \bar{\alpha}Y) = \alpha\beta X^2 - \bar{\alpha}\bar{\beta}Y^2 + (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta})XY.$$

Ces formules suggèrent de choisir Θ_1^0 et Θ_2^0 tels que:

$$\Theta_1^0(H) = XY = e_0,$$

$$\Theta_1^0(E_1) = (Y^2 - X^2)/2 = (e_{-2} - e_2)/2,$$

$$\Theta_1^0(E_2) = (X^2 + Y^2)/2i = (e_2 + e_{-2})/2i \quad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1}$$

et

$$\Theta_2^0(E_1 \wedge E_2) = XY = e_0,$$

$$\Theta_2^0(H \wedge E_1) = (X^2 + Y^2)/2i = (e_2 + e_{-2})/2i \quad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\Theta_2^0(E_2 \wedge H) = (Y^2 - X^2)/2 = (e_{-2} - e_2)/2.$$

Soit j l'injection $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$-équivariante (unique à homothétie près) de $D(2)$ dans $D(2n+2) \otimes L(n; \mathbb{C})$; pour $i = 0, 2, -2$, on peut écrire $j(e_i) = \Sigma_{k=-n-1}^{n+1} e_{2k} \otimes v_k(i)$ où $v_k(i)$ est un élément de $D(2n) \subset L(n; \mathbb{C})$ de poids $i - 2k$. On choisit donc $\Theta_i = j \circ \Theta_i^0$. Par ailleurs, comme $D(2n + 2)$ est le facteur $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$-irréductible de $\rho_\infty^{n(k_\infty\text{- fini})}$ faisant apparaître $D(2)$, on identifie désormais $S_n(K)$ à $\mathcal{H}_n(K, D(2n + 2))$ par (3.1.1); on a alors la flèche naturelle:

$$\varphi\colon D(2n+2) \otimes S_n(K) \to \rho^{n(K_\infty\text{-fini})} \otimes S_n(K) = \mathcal{H}_n(K)$$

$$\left(\sum_i \lambda_i e_{2i}\right) \otimes \mathbf{f} \mapsto \sum_i \lambda_i . f_{2i} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f} = (f_{2i})_{|i| \leqslant n+1}.$$

D'aprés les calculs (3.2.2) on obtient l'isomorphisme naturel suivant:

$$S_n(K) \otimes \mathrm{Hom}_{SU_2(\mathbb{C})}(\Lambda^i \mathcal{P}_{\mathbb{C}}; D(2n+2) \otimes L(n;\mathbb{C}))$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{SU_2(\mathbb{C})}(\Lambda^i \mathcal{P}_{\mathbb{C}}; \mathcal{H}_n(K) \otimes L(n;\mathbb{C})).$$

Pour $\mathbf{f} \in S_n(K)$, notons $\bar{\varphi}(\mathbf{f} \otimes \Theta_i)$ l'image de $\mathbf{f} \otimes \Theta_i$ dans $\mathrm{Hom}_{SU_2(\mathbb{C})}(\Lambda^i \mathcal{P}_{\mathbb{C}}; \mathcal{H}_n(K) \otimes L(n;\mathbb{C})))$ et soit d_i la flèche naturelle de $\mathrm{Hom}_{SU_2(\mathbb{C})}(\Lambda^i \mathcal{P}_{\mathbb{C}}; C^\infty(G(F)\backslash G(F_f) \times G_\infty / K_f; \omega_n^{-1}) \otimes L(n;\mathbb{C}))$ dans $H^i(X_K; \tilde{L}(n;\mathbb{C}))$ (cf. (3.2.1)). On a alors $\delta_i(\mathbf{f}) = d_i(\bar{\varphi}(\mathbf{f} \otimes \Theta_i))$. On obtient ainsi la forme concrète de l'isomorphisme du Th. 3.2:

$$\delta_i \colon S_n(K) \to H^i(X_K; \tilde{L}(n;\mathbb{C})),$$

où un représentant de la classe de cohomologie de de Rham de $\delta_1(\mathbf{f})$ est donné par:

$$\delta_1(\mathbf{f})([g]) = \sum_{|k| \leqslant n+1} f_{2k}(g) g_\infty . \{ v_{2k}(0)\, dH + (1/2)(v_k(-2) - v_k(2)) \times dE_1 + (1/2i)(v_k(2) + v_k(-2))\, dE_2 \} \quad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1}$$

de même un représentant de $\delta_2(\mathbf{f})$ est donné par:

$$\delta_2(\mathbf{f})([g]) = \sum_{|k| \leqslant n+1} f_{2k}(g) g_\infty . \{ v_k(0)\, dE_1 \wedge dE_2 + (1/2)(v_k(-2) - v_k(2))\, dE_2 \wedge dH + (1/2i)(v_k(2) + v_k(-2))\, dH \wedge dE_1 \} \quad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1}.$$

où $[g]$ est la classe de $g \in GL_2(F_{\mathbb{A}})$ dans X_K et où (dE_1, dE_2, dH) la base duale de (E_1, E_2, H) opère sur le champ de vecteurs X_g par $(\alpha\, dE_1 + \beta\, dE_2 + \gamma\, dH).X_g = (\alpha\, dE_1 + \beta\, dE_2 + \gamma\, dH)(g^{-1}.X_g)$. On obtient aussi la forme concrête du cup-produit (2.5) pour $A = \mathbb{C}$:

$$[\delta_1(\mathbf{f}), \delta_2(\mathbf{f})]_n([g])$$
$$= |\det(g_\infty)|^{2n} \sum_{k,k'} f_{2k}(g) f_{2k'}(g) \{ B(v_k(0), v_{k'}(0)) + B(v_k(-2) - v_k(2), v_{k'}(-2) - v_{k'}(2))/4 - B(v_k(2) + v_k(-2), v_{k'}(2) + v_{k'}(-2))/4 \} \times dE_1 \wedge dE_2 \wedge dH$$

où

$$J_n \colon H^1_!(X_{K_f}; \tilde{L}(n;\mathbb{C})) \otimes H^2_!(X_{K_f}; \tilde{L}(n;\mathbb{C})^\circ) \to H^3_c(X_{K_f}; \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}.$$

Pour la définition de J_n, nous renvoyons le lecteur à la fin du Section 2.5.

REMARQUES:

(i) L'isomorphisme de Harder étant $G(F_f)$-équivariant δ_1 et δ_2 sont Hecke-équivariants.

(ii) Le facteur $|\det(g)|_F^{n/2}$ assure ici que $\delta_1(\mathbf{f})$ et $\delta_2(\mathbf{f})$ sont invariants par le centre Z_∞.

(iii) Remarquons par ailleurs que la forme explicite que nous donnons ci-dessus de l'isomorphisme δ_1 est égale à l'application δ de Hida décrite dans le Section 2.5 de [H6] ce qui justifie la remarque (i) suivant l'énoncé du Th. A.

Notation 3.2. On définit le produit de Petersson par

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{f}, \mathbf{h}\rangle = J_n(\delta_1(\mathbf{f}), \delta_2(\mathbf{h})) &= \int_{X_K} [\delta_1(\mathbf{f}), \delta_2(\mathbf{h})]_n \\ &= \int_{G(F)\backslash G(F_A)/Z_\infty} {}^t\mathbf{f}(g) A_n \mathbf{h}(g) |\det(g)|^n . \mathrm{d}g\end{aligned}$$

où $\mathrm{d}g_\infty = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}/8x^3 \times \mathrm{d}k_\infty/\mathrm{d}^\times z_\infty$ avec $\mathrm{d}k_\infty(U_2(\mathbb{C})) = 1$ et $\mathrm{d}g_f$ étant la mesure de Haar sur $G(F_f)$ telle que dg(K) = 1.

3.3. Calcul des coefficients de A_n

Si on note $a_{k,k'}$ les coefficients de A_n, d'après ce qui prédède on a $a_{k,k'} = [v_k(0), v_{k'}(0)]_n - ([v_k(2), v_{k'}(-2)]_n + [v_k(-2), v_{k'}(2)]_n)/2$. Il nous reste à déterminer les éléments $v_k(i)$. Pour cela considérons le polynôme

$$\begin{aligned}&F((X,Y),(X^c,Y^c),(U,V),(A,B)) \\ &= \begin{vmatrix} X & U \\ Y & V \end{vmatrix}^n \times \begin{vmatrix} Y^c & U \\ -X^c & V \end{vmatrix}^n \times \begin{vmatrix} A & U \\ B & V \end{vmatrix} \\ &= (XV - YU)^n \times (X^cU + Y^cV)^n \times (AV - BU).\end{aligned}$$

(3.3.1) Pour tout $k_\infty = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, on vérifie aisément que

$$\begin{aligned}&F((X,Y).k_\infty, (X^c,Y^c).\bar{k}_\infty, (U,V).k_\infty, (A,B).k_\infty) \\ &\quad = F((X,Y),(X^c,Y^c),(U,V),(A,B)).\end{aligned}$$

En écrivant

$$\begin{aligned}F((X,Y),(X^c,Y^c),(U,V),(A,B)) = \; & A^2 P_{-2}((X,Y),(X^c,Y^c),(U,V)) \\ & -AB P_0((X,Y),(X^c,Y^c),(U,V)) \\ & +B^2 P_2((X,Y),(X^c,Y^c),(U,V))\end{aligned}$$

de (3.3.1), on obtient que:

$$k_\infty . \begin{pmatrix} P_2 \\ P_0 \\ P_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_\infty . P_2 \\ k_\infty . P_0 \\ k_\infty . P_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & -2\alpha\bar{\beta} & \bar{\beta}^2 \\ \alpha\beta & \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} & -\bar{\alpha}\bar{\beta} \\ \beta^2 & 2\bar{\alpha}\beta & \bar{\alpha}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 \\ P_0 \\ P_{-2} \end{pmatrix}.$$

$(P_2; P_0; P_{-2})$ est donc proportionnel à la base canonique de $D(2) \subset D(2n+2; (U,V)) \otimes L(n; \mathbb{C})$. En développant F on obtient donc:

$$\begin{aligned} v_k(2) &= f_{-2k+2} \quad \text{pour } k \in \{-n, -n+1, \ldots, n+2\}; \\ v_k(0) &= f_{-2k} \quad \text{pour } k \in \{-n-1, -n, \ldots, n+1\}; \\ v_k(-2) &= f_{-2k-2} \quad \text{pour } k \in \{-n-2, -n-1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

où $(f_{-2n}, \ldots, f_{2n})$ est la base de $D(2n) \subset L(n; \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \text{et } f_{2k} = & \sum_{i+j=n-k} (-1)^j \binom{n-k}{i} \binom{n-k}{j} \\ & \times X^{n-i} Y^i \otimes (X^c)^j (Y^c)^{n-j} \in L(n; \mathbb{C}). \end{aligned}$$

On peut donc calculer

$$\begin{aligned} [f_{2k}, f_{2k'}]_n = & \sum_{i+j=n-k} \sum_{i'+j'=n-k'} (-1)^{j+j'} \\ & \times \binom{n-k}{i} \binom{n-k}{j} \binom{n-k'}{i'} \binom{n-k'}{j'} \\ & \times [X^{n-i} Y^i \otimes X^j Y^{n-j}, X^{n-i'} Y^{i'} \otimes X^{j'} Y^{n-j'}]_n. \end{aligned}$$

or

$$[X^{n-i} Y^i \otimes X^j Y^{n-j}, X^{n-i'} \otimes X^{j'} Y^{n-j'}]_n = 0$$
si $n - i \neq i'$ ou $n - j \neq j'$.

$$\frac{(-1)^{i+j}}{\binom{n}{i}\binom{n}{j}} \quad \text{si } n - i = i' \quad \text{et} \quad n - j = j'.$$

Comme $n - i = i'$ et $n - j = j'$ entraine $k = -k'$, on obtient:

$$\begin{aligned} [f_{2k}, f_{2k'}]_n &= 0 \quad \text{si } k \neq -k' \\ &= (-1)^k (n-k)!(n+k)! \sum_{i+j=n-k} \\ & \quad \times \frac{(n-k)!(n+k)! \times (n-i)!i! \times (n-j)!j! \times (n!)^2}{i!j! \times j!(n-k--j)! \times (n-j)!(k-j)! \times (n-j)!(k-j)!} \end{aligned}$$

$$= (-1)^k \frac{(n-k)!(n+k)!}{(n!)^2} \sum_{i+j=n-k} \binom{n-k}{i}\binom{n+k}{j}$$

$$= (-1)^k \frac{(n-k)!(n+k)!}{(n!)^2} \times \binom{2n}{n}.$$

Ce qui donne en reportant dans l'expression de $a_{k,k'}$:

$$a_{k,-k} = \frac{(2n^2+n) \times \binom{2n}{n}}{(n!)^2} \times (-1)^k \times (n-k-1)!(n+k-1)!$$

si $k \in \{-n+1, \ldots, n-1\}$,

$$a_{-1-n,n+1} = a_{n+1,-n-1} = (2n+1)(n+1)(-1)^{n+1} \times \binom{2n}{n}^2,$$

$$a_{-n,n} = a_{n,-n} = (-1)^n \times \binom{2n}{n}^2,$$

et $a_{k,k'} = 0$ si $k' \neq -k$.

4. Le module de congruence et le critère abstrait.

4.1. NOTATIONS

Pour tout idéal entier $\mathcal{A}$, on considèrera $S_n(\mathcal{A})$ l'espace des formes cuspidales de poids $n+2$ correspondant au sous groupe $K_1(\mathcal{A})$. Nous avons vu dans le Section 3 l'existence d'isomorphismes Hecke-équivariants δ^i: $S_n(\mathcal{A}) \simeq H^i_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n; \mathbb{C}))$. Une des conséquences importantes de ces isomorphismes est l'existence de réseaux Hecke-stables.

Nous posons alors pour tout sous-anneau A de $\mathbb{C}$,

$$L^1(A) = \delta_1^{-1}(H^1_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n; A))^{\mathrm{st}})$$
$$L^2(A) = \delta_2^{-1}(H^2_!(X_1(\mathcal{A}); \tilde{L}(n; A)^o)^{\mathrm{st}})$$

(en notant pour tout A-module M, $M^{\mathrm{st}} = M/\mathrm{torsion}(M)$). On note $h_n(\mathcal{A}; A)$ la A-sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_n(\mathcal{A}))$ engendrée par l'image de $R_1(\mathcal{A})$.

PROPOSITION 4.1.1. *Soit A comme précédemment, alors on a les isomorphismes canoniques suivants;*

(i) $L^i(\mathbb{Z}) \otimes A \simeq L^i(A)$ *pour* $i = 1, 2$.
(ii) $h_n(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) \otimes A \simeq h_n(\mathcal{A}; A)$.

Démonstration. (i) repose simplement sur le théorème des coefficients universels en cohomologie des faisceaux. La surjectivité de (ii) est évidente. L'injectivité résulte de (i) et de la $\mathbb{Z}$-platitude de $h_n(\mathcal{A};\mathbb{Z})$. □

COROLLAIRE 4.1.2. *Pour toute forme automorphe cuspidale* $\mathbf{f}$ *et pour tout* σ *automorphisme de* $\mathbb{C}$, *il existe une forme* $\mathbf{f}^\sigma$ *dont les coefficients de Fourier (cf. Section 5 pour leur définitions) sont les conjugués par* σ *de ceux de* $\mathbf{f}$.

Démonstration. En interprétant une forme $\mathbf{f}$ comme une forme linéaire sur $h_n(\mathcal{A};\mathbb{C})$, cela résulte directement de la $\mathbb{Q}$-structure de l'algèbre de Hecke □

Pour tout sous-anneau A de $\mathbb{C}$ et $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, le morphisme de faisceau induit par τ de $\tilde{L}(n;A) \to \tilde{L}(n;A^\tau)$ fournit un morphisme Hecke-équivariant $L^i(A) \to L^i(A^\tau)$. En particulier, on obtient ainsi une action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ sur $S_n(\mathcal{A};\mathbb{C})$. Il est facile de vérifier que cette dernière coïncide avec celle définie dans le corollaire précédent.

4.2. Module de congruence associé à une forme propre et nouvelle.

Soit $\mathbf{f}$ une forme propre et nouvelle de poids n et de niveau $\mathcal{A}$. Soit $K_\mathbf{f} \subset \mathbb{C}$ l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les valeurs propres des opérateurs de Hecke agissant sur $\mathbf{f}$ et E un sous-corps de $K_\mathbf{f}$. Alors d'après le théorème de multiplicité un pour les formes nouvelles (cf. [*M*]), $K_\mathbf{f}$ est un facteur direct de $h_n(\mathcal{A};E)$ i.e. $h_n(\mathcal{A};E) \simeq K_\mathbf{f} \oplus D$; on note $\mathbf{1}_{\mathbf{f},E}$ l'idempotent correspondant au premier facteur. Soit A un sous-anneau de $\mathbb{C}$ de corps des fractions E. Nous posons alors $R_\mathbf{f}(A) = \mathbf{1}_{\mathbf{f},E}.h_n(\mathcal{A};A), R'(A) = (1-\mathbf{1}_{\mathbf{f},E}).h_n(\mathcal{A};A), b_\mathbf{f}(A) = K_\mathbf{f} \cap h_n(\mathcal{A};A)$ et $b'(A) = D_F \cap h_n(\mathcal{A};A)$ et définissons le module de congruence de $\mathbf{f}$ par $Q(A;\mathbf{f}) = h_n(\mathcal{A},A)/b_\mathbf{f}(A) \oplus b'(A)$. On a les isomorphismes canoniques suivants respectivement induits par les projections naturelles

$$\mathbf{1}_{\mathbf{f},E} \quad \text{et} \quad (\mathbf{1}-\mathbf{1}_{\mathbf{f},E})\colon \pi_\mathbf{f}\colon Q(A;\mathbf{f}) \simeq R_\mathbf{f}(A)/b_\mathbf{f}(A) \quad \text{et}$$
$$\pi'\colon Q(A;\mathbf{f}) \simeq R'(A)/b'(A).$$

Supposons que A soit un anneau de valuation discrète v dont l'idéal maximal contient p. Si $Q(A;\mathbf{f}) \neq 0$, alors il existe un idéal maximal $\mathcal{P}_\mathbf{f}$ de $R_\mathbf{f}(A)$ contenant $b_\mathbf{f}$ et p et des idéaux maximaux $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ respectivement de $h_n(\mathcal{A};A)$ et $R'(A)$ tels que $\pi_\mathbf{f}$ et π' induisent des isomorphismes:

$$\bar{\pi}_\mathbf{f}\colon \kappa = h_n(\mathcal{A};A)/\mathcal{P} \simeq R_\mathbf{f}(A)/\mathcal{P}_\mathbf{f} \quad \text{et} \quad \bar{\pi}'\colon \kappa \simeq R'(A)/\mathcal{P}'.$$

D'après un lemme de Deligne–Serre (cf. [D-S] Lemme 6.11) le caractère de $R'(A)$ défini par $\bar{\pi}'$ se relève, quitte à étendre les scalaires, en un caractère en caractéristique nulle i.e. il existe une extension L de $K_\mathbf{f}$, un idéal premier $\mathcal{P}_L$ de L et $\lambda\colon R'(A) \to \mathcal{O}_L$ tel que $\lambda \pmod{\mathcal{P}_L} = \bar{\pi}'$.

En remarquant que $\mathbf{1}_{\mathbf{f},E}.S_n(\mathcal{A};\mathbb{C}) = \oplus_\sigma \mathbb{C}.\mathbf{f}^\sigma$ (σ parcourant l'ensemble l_E des E-plongements de $K_\mathbf{f}$ dans $\mathbb{C}$), on obtient donc:

PROPOSITION 4.2. *Soit* $\mathbf{f}$ *une forme propre et nouvelle. Supposons que* A *soit un anneau de valuation discrète d'idéal maximal contenant* p *un nombre premier.*

Si $Q(A;\mathbf{f}) \neq 0$, *il existe une forme propre* $\mathbf{h}$ *et un idéal premier* $\mathcal{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ *de* $\bar{\mathbb{Q}}$ *au dessus de* p *tels que*

(i) *Pour tout* $T \in h_n(\mathcal{A};\mathbb{Z}), \lambda_\mathbf{f}(T) \equiv \lambda_\mathbf{h}(T) (\mathrm{mod}\, \mathcal{P}_{\bar{\mathbb{Q}}})$.
(ii) *Pour tout* E*-plongement* σ *de* $K_\mathbf{f}$ *dans* $\mathbb{C}, \mathbf{h} \neq \mathbf{f}^\sigma$.

Posons pour abréger $L^i = L^i(A)$. C'est un réseau de $L^i(E)$. L'idempotent $\mathbf{1}_{\mathbf{f},E}$ définissant un endomorphisme de $L^i(E)$, posons $L^i_\mathbf{f} = \mathbf{1}_{\mathbf{f},E}.L^i \cap L^i, M^i_\mathbf{f} = \mathbf{1}_{\mathbf{f},E}.L^i \supset L^i_\mathbf{f}$ et $L'^i = (1 - \mathbf{1}_{\mathbf{f},E})L^i \cap L^i, M'^i = (1 - \mathbf{1}_{\mathbf{f},E}).L^i \supset L'^i$. Alors $Q(A;\mathbf{f})$ s'envoie *surjectivement* sur la sous-algèbre de $\mathrm{End}_A(M^i_\mathbf{f}/L^i_\mathbf{f})$ engendrée par l'image de $R_1(\mathcal{A})$ via $\pi_\mathbf{f}$ et à la sous-algèbre de $\mathrm{End}(M'^i/L'^i)$ engendrée par l'image de $R_1(\mathcal{A})$ via π'.

4.3. Discriminant de l'accouplement associé à $\mathbf{f}$:

Soit $O = \hat{A}$ le complété de A. Le résultat de dualité du Section 2 va nous permettre d'obtenir une condition suffisante pour la non nullité de $Q(A;\mathbf{f})$ comme la divisibilité par v d'un discriminant associé à $\mathbf{f}$. Nous venons de voir qu'il existe deux réseaux L^1 et L^2 de $S_n(\mathcal{A})$ stable par $h_n(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ et d'après le Section 2 tels que l'accouplement J_n : $e_p(L.^1\otimes 0) \otimes e_p^*(L.^2\otimes 0) \to 0$ soit une dualité parfaite (Th. 2.5.4).

Comme $\mathbf{f}$ est p-ordinaire , nous avons $1_{\mathbf{f},E}.e_p = 1_{\mathbf{f},E}$. Par ailleurs, d'après la Proposition 2.5.0, l'étoile* désignant l'adjoint pour l'accouplement non dégénéré sur F défini dans le Section 2, on a la relation $T^* = \mathbf{W}_a.T.\mathbf{W}_a$ (cf. [M] (1.8)) où $\mathbf{W}_a$ désigne l'involution de Weil (cf. Section 6 ci-après). On en déduit que $(1_{\mathbf{f},E})^* = 1\mathbf{w}_a.\mathbf{f}, E = 1\mathbf{f}^c, E$ car $\mathbf{W}_a.\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}^c$ sont colinéaires. Si L est un A réseau d'un E-vectoriel V et si P est un projecteur de V, on notera $L(P) = P.V \cap L$. Posons alors $L^1(A;\mathbf{f}) = L^1(1_{\mathbf{f},E})$ et $L^2(A;\mathbf{f}) = L^2((1_{\mathbf{f},E})^*) = L^2(1_{\mathbf{f}^c,E})$. Définissons aussi $M^1(A;\mathbf{f}) = 1_{\mathbf{f},E}.L^1$ et $M^2(A;\mathbf{f}) = (1_{\mathbf{f},E})^*.L^2$. D'après le Théorème 2.5.3, on a les isomorphismes $(L^1(A;\mathbf{f})\otimes 0)^* \simeq M^2(A;\mathbf{f})\otimes 0$ et $(L^2(A;\mathbf{f})\otimes 0)^* \simeq M^1(A;\mathbf{f})\otimes 0$ lorsque $\mathbf{f}$ est p-ordinaire. La restriction de l'accouplement J_n à $L^1(A;\mathbf{f}) \otimes L^2(A;\mathbf{f})$ aura donc un discriminant disc $(\mathbf{f})$ de valuation non nulle si et seulement si

$$[M^1(\mathbf{f})/L^1(\mathbf{f})] \neq 0.$$

Par ailleurs, il est clair que $L^1(\mathbf{f}) \otimes \mathbb{C} \simeq \oplus_\sigma \mathbb{C}.\mathbf{f}^\sigma$ et $L^2(\mathbf{f}) \otimes \mathbb{C} \simeq \oplus_\sigma \mathbb{C}.\mathbf{f}^{\sigma c}$ pour $\sigma \in L_E$. Fixons $(e^1_i)_i$ et $(e^2_i)_i$ des bases respectives de $L^1(A;\mathbf{f})$ et $L^2(A;\mathbf{f})$, alors pour tout $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}), ((e^1_i)^\tau)_i$ et $((e^2_i)^\tau)_i$ sont des bases de $L^1(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)$ et $L^2(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)$ (en fait A principal suffit pour définir ces bases).

DÉFINITION 4.3.1. Les régulateurs $u_1(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)$ et $u_2(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)$ sont les déterminants respectifs des matrices de passages de $((e_i^1)^\tau)_i$ à $(\mathbf{f}^{\tau\sigma})_\sigma$ et de $((e_i^2)^\tau)_i$ à $(\mathbf{f}^{\tau\sigma c})_\sigma$.

PROPOSITION 4.3.2. *On conserve les notations précédentes, alors*

$$c(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)=\frac{\prod_\sigma J_n(\mathbf{f}^{\tau\sigma},\mathbf{f}^{\tau\sigma c})}{u_1(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)u_2(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)}\in A^\tau \quad \text{et si} \quad v^\tau(c(A^\tau;\mathbf{f}^\tau))>0,$$

alors $Q(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)\neq 0$. *De plus,* $c(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)^\sigma=c(A^{\tau\sigma};\mathbf{f}^{\tau\sigma})$.

Démonstration. On a $v(\mathrm{disc}(\mathbf{f}^\tau))=v(\mathrm{dét}(J_n((e_i^1)^\tau,(e_i^2)^\tau))$. Pour le premier point, il suffit d'écrire la matrice de J_n dans les bases $(e_i^1))_i$ et $(e_i^2)_j$ en fonction de celle de J_n dans la base $(\mathbf{f}^\sigma)_\sigma$ et de prendre le déterminant en ayant soin de remarquer que $J_n(\mathbf{f}^\sigma,\mathbf{f}^{\tau c})=0$ lorsque $\sigma\neq\tau$. Pour le second, d'après la remarque du Section 4.2, la non-nullité de $[M^1(\mathbf{f})/L^1(\mathbf{f})]$, c'est à dire celle de son algèbre de Hecke sur A entraine la non nullité de $Q(A;\mathbf{f})$. Le dernier point est évident au vu des définitions. □

5. Relation entre produit de Petersson et valeur spéciale de fonction L naïve associée à deux formes automorphes

Fixons le caractère additif τ_F de $F_\mathbb{A}$ défini par $\tau_F(x)=\tau_\mathbb{Q}(\mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}(x))$, avec $\tau_\mathbb{Q}=\tau_\mathbb{Q}^f\times\tau_\mathbb{Q}^\infty$, $\tau_\mathbb{Q}^\infty(x_\infty)=\mathrm{e}^{2i\pi x_\infty}$. Pour tout $\mathbf{f}\in S_n(\mathcal{A})$ vu comme $\mathcal{H}_n(K_1(\mathcal{A});D(2n+2))$, on peut définir une fonction de Whittaker:

$$W_\mathbf{f}(g)=\int_{F_\mathbb{A}/F}\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}g\right)\tau_F(-x)\,\mathrm{d}x.$$

On peut décomposer $W_\mathbf{f}$ de façon unique en un produit (cf [Go2] ch. 3):

$$W_\mathbf{f}(g)=W_n^\infty(g_\infty)\times W_\mathbf{f}^f(g_f), \tag{5.1}$$

où:

(a) W_n^∞ est l'unique fonction définie sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ à valeurs dans $D(2n+2)$ telle que:
- (i) $W_n^\infty(\left(\begin{smallmatrix}1&x_\infty\\0&1\end{smallmatrix}\right)g_\infty)=\tau^\infty(x_\infty)W_n^\infty(g_\infty)$ pour tout $g_\infty\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $x_\infty\in\mathbb{C}$.
- (ii) $W_n^\infty(g_\infty z_\infty)=\omega_n(z_\infty)W_n^\infty(g_\infty)$ pour tout $z_\infty\in Z_\infty$.
- (iii) $W_n^\infty(g_\infty k_\infty)={}^tM_n(k_\infty)W_n^\infty(g_\infty)$ pour tout $k_\infty\in K_\infty M_n$ étant la représentation à gauche de K_∞ sur $D(2n+2)$.
- (iv) W_n^∞ est propre pour les opérateurs de Casimir D' et D'' de valeur propre $n+(n^2/2)$.

(L'unicité est à une constante près qui sera fixée ultérieurement (cf. Remarque 5.5))

et où:

(b) $W_{\mathbf{f}}^f$ est une fonction scalaire définie sur $G(F_f)$ à valeurs complexes qui vérifie:
(i) $W_{\mathbf{f}}^f(\left(\begin{smallmatrix}1 & x_f\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)g_f)=\tau^f(x_f)W_{\mathbf{f}}^f g_f)$ pour tout $x_{\mathbf{f}}\in F_f$.
(ii) $W_{\mathbf{f}}^f(g_f z_f)=W_{\mathbf{f}}^f(g_f)\chi(z_f)$ pour tout $z_f\in Z(F_f)$ (lorsque $\mathbf{f}\in S_n(\mathcal{A},\chi)$).
(iii) $W_{\mathbf{f}}^f(g_f k_f)=W_{\mathbf{f}}^f(g_f)$ pour tout $k_f\in K_0(\mathcal{A})$.

En outre on a le développement de Fourier:

$$\mathbf{f}(g)=\sum_{\xi\in F^\times} W_{\mathbf{f}}\left(\left(\begin{smallmatrix}\xi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)g\right).$$

Pour ω un quasi-caractère de $F_{\mathbb{A}}^\times/F^\times$ et $\phi\in S(F^2)$ une fonction de Schwartz-Bruhat, nous posons:

$$Z(\omega,\phi)=\int_{F_{\mathbb{A}}^\times}\phi(0,t)\omega(t)\,\mathrm{d}^\times t,$$

où $\mathrm{d}^\times t$ est le produit des mesures de Haar locales $\mathrm{d}t^\times$ telles que $\mathrm{d}^\times t.(O_v^\times)=1$ et $\mathrm{d}^\times t_\infty=\mathrm{d}t_\infty/|t_\infty|_{\mathbb{C}}$.

Soient $\mathbf{f}$ et $\mathbf{h}\in S_n(\mathcal{A})$ propres nouvelles (au sens de Miyake [M] et normalisées (i.e. $W_{\mathbf{f}}^f(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right))=W_{\mathbf{h}}^f(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right))=1$); par analogie avec les définitions de [J] p. 124 à 126, nous posons:

$$D(s,\mathbf{f},\mathbf{h},\Phi)=\int_{F_A^\times\times K_0(\mathcal{O}_F)\times K_\infty}{}^tW_{\mathbf{f}}\left(\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)_k\right)A_nW_{\mathbf{h}}\left(\left(\begin{smallmatrix}-a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)_k\right)$$
$$\times Z(\alpha^{2s}\omega,k.\Phi)|a|_F^{s=1}\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}k,$$

où A_n est définie en 3.2, $\omega=\chi_{\mathbf{f}}\chi_{\mathbf{h}}$, $\chi_{\mathbf{f}}$ et $\chi_{\mathbf{h}}$ étant les nebentypus respectifs de $\mathbf{f}$ et $\mathbf{h}$, $\alpha=|.|_F$, $\mathrm{d}^\times a$ est la mesure définissant $Z(\omega,\Phi)$ et $\mathrm{d}k$ la mesure de Haar sur $K_0(\mathcal{O}_F)\times K_\infty$ valant 1 sur $K_1(\mathcal{A})\times K_\infty$. Une démonstration analogue à celle du Théorème 19.3 de [J] montre que cette intégrale converge pour $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ et que $D(s,\mathbf{f},\mathbf{h},\Phi)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Nous allons maintenant calculer cette intégrale en termes de produits Euleriens pour un choix convenable de Φ. Tout d'abord, remarquons que si $\Phi=\Phi_\infty\Phi_f$, nous pouvons décomposer la fonction D en un produit de deux intégrales:

$$D(s,\mathbf{f},\mathbf{h},\Phi)=D_\infty(s,\Phi_\infty)\times D_f(s,\mathbf{f},\mathbf{h},\Phi_f) \tag{5.3}$$

avec:

$$D_f(s,\mathbf{f},\mathbf{h},\Phi_f)=\int_{F_f\times K_0(\mathcal{O}_F)}W_{\mathbf{f}}^f\left(\left(\begin{smallmatrix}a_f & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right)W_h^f\left(\left(\begin{smallmatrix}-a_f & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right) \tag{5.3a}$$
$$\times Z(\alpha^{2s}\chi_{\mathbf{f}}^f\chi_{\mathbf{h}}^f,k_f.\Phi_f|a_f|^{s=1}\,\mathrm{d}^\times a_f\,\mathrm{d}k_f$$

et

$$D_\infty(s,\Phi_\infty) = \int_{\mathbb{C}\times U_2(\mathbb{C})}^{t} W_n^\infty\left(\begin{pmatrix} a_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) A_n W_n^\infty\left(\begin{pmatrix} -a_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \times Z(\alpha^{2s}\omega_n^{=1}; k_\infty.\Phi_\infty)|a_\infty|^{s=1}\,\mathrm{d}^\times a_\infty\,\mathrm{d}k_c. \tag{5.3b}$$

Fixons $\Phi_\infty(x,y) = \exp(-2\pi(|x|^2+|y|^2))$ et $\Phi_f = \Pi\Phi_v$ avec (cf. not. 2.2)

si $v(\mathcal{A}) = 0$ $\Phi_v = \mathbb{I}_{\mathcal{D}_v\times\mathcal{O}_v}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{D}_v \times \mathcal{O}_v$

si $v(\mathcal{A}) > 0$ $\Phi_v(x,y) = \begin{cases} \omega_v^{-1}(y) & \text{si } y \in \mathcal{O}_v^\times \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $x \in \mathcal{D}_v\mathcal{A}_v$.

(5.4a) Puisq'alors $k.\Phi_\infty = \Phi_\infty$, pour tout $k \in U_2(\mathbb{C})$,

$$Z(\alpha^{2s}\omega_n^{-1}, k.\Phi_\infty) = Z(\alpha^{2s-2n}, \Phi_\infty) = G_2(2s-2n)$$
avec $G_2(s) = (2\pi)^{1-s}\Gamma(s)$.

(5.4b) Pour la partie non-archimédienne, nous avons:
Si $v(\mathcal{A}) > 0$,

$$Z(\alpha^{2s}\omega, k.\Phi_v) = 1 \quad \text{si } k \in K_0(\mathcal{A}_v) \quad \text{et}$$
$$Z(\alpha^{2s}\omega, k.\Phi_v) = 0 \quad \text{si } k \in K_0(\mathcal{O}_v) - K_0(\mathcal{A}_v).$$

Si $v(\mathcal{A}) = 0$, Φ_v est invariant par les éléments de $K^0(\mathcal{A})_v$ donc

$$Z(\alpha^{2s}\omega, k.\Phi_v) = L_v(2s,\omega) = (1-\omega(v)q_v^{-2s})^{-1}.$$

(5.5a) *Calcul du facteur archimédien*
Soit $\varphi_n^\infty(x) = W_n^\infty\left(\begin{smallmatrix} x_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors rappelons (cf. [J] p. 106) qu'il y a une unique normalisation de W_n^∞ telle que:

$$\int_{\mathbb{C}^\times} \varphi_n^\infty(a)|a|_{\mathbb{C}}^{s-(1+p)/2} a^p\,\mathrm{d}^\times a$$
$$= \frac{i^{n+1+p}(2n+2)!}{(n+1+p)!(n+1-p)!} G_2(s+(1+p)/2)G_2(s+(1-p)/2)e_{2p}.$$

Ceci lève d'ailleurs l'ambiguïté sur le choix de $W_{\mathbf{f}}^f$ et W_n^∞ dan la décomposition 5.1. Rappelons une version du lemme de Barnes de [J] Section 18.2.1:

LEMME: *Pour $i = 1,2$, soit φ_i une fonction sur $\mathbb{C}^\times$ telle que pour tout a et* $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, *l'intégrale $\int_{\mathbb{C}^\times} \varphi_i(t)|t|_{\mathbb{C}}^{s-1/2-a/2} t^a\,\mathrm{d}^\times t$ est convergente. On suppose en outre qu'elle s'annule à moins que $a = a_i$ et prenne alors la valeur $G_2(s+\sigma_i)G_2(s+\tau_i)$ où σ_i et τ_i sont des constantes. Alors l'intégrale $\int \varphi_1(t)\varphi_2(t)|t|_{\mathbb{C}}^{s-1}\,\mathrm{d}^\times t$ est*

convergente pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$. *Elle s'annule à moins que* $a_1 + a_2 = 0$ *et prend alors la valeur*

$$2\pi \frac{G_2(s+\sigma_1+\sigma_2)G_2(s+\sigma_1+\tau_2)G_2(s+\tau_1+\sigma_2)G_2(s+\tau_1+\tau_2)}{G_2(2s+\sigma_1+\sigma_2+\tau_1+\tau_2)}.$$

De (5.4.a) et ce lemme on débuit alors que

$$\begin{aligned} D_\infty(s,\Phi_\infty) &= 2\pi G_2(2s-2n)\times(-1)^{n+1} \\ &\quad \times \sum_{|p|\leqslant n+1} (-1)^p a_{2p,-2p} \binom{2n+2}{n+p+1}^2 \\ &\quad \times \frac{G_2(s+1)^2 G_2(s+p+1)G_2(s-p+1)}{G_2(2s+2)}. \end{aligned}$$

D'où en $s = n+1$,

$$\begin{aligned} D_\infty(n+1,\Phi_\infty) &= (2\pi)^{-1-2n}\times(-1)^{n+1}\times\frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)} \\ &\quad \times \sum_{|p|\leqslant n+1} (-1)^p a_{2p,-2p}\binom{2n+2}{n+p+1}. \end{aligned}$$

NOTATION 5.5.a. Posons

$$\alpha_n = (-1)^{n+1}\times\frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)}\times\sum_{|p|\leqslant n+1}(-1)^p a_{2p,-2p}\binom{2n+2}{n+p+1}.$$

α_n est un nombre rationnel non nul car $(-1)^p a_{2p,-2p} > 0$ d'après 3.3.

(5.5b) *Calcul du facteur non-archimédien*

Les formes $\mathbf{f}$ et $\mathbf{h}$ étant propres, $W_{\mathbf{f}}^f$ et $W_{\mathbf{h}}^f$ sont égales à un produit de fonctions de Whittaker locales. De même on peut décomposer la mesure de Haar sur $F_{\cdot}^\times \times K_f(\mathcal{O}_F)$ en un produit de mesures de Haar locales; on obtient donc en tenant compte de (5.4b):

$$D(s,\mathbf{f},\mathbf{h},\Phi_f) = \prod_v D_v(\mathbf{f},\mathbf{h},s)\times\prod_{\substack{vtq\\ v(\mathcal{A})=0}} L_v(2s,\chi_{\mathbf{f}}\chi_{\mathbf{h}})\times[K_0(\mathcal{A}):\ K_1(\mathcal{A})],$$

où

$$D_v(\mathbf{f},\mathbf{h},s)=\sum_{n\leqslant 0} W_{\mathbf{f},v}\left(\begin{pmatrix}\pi_v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n\right) W_{\mathbf{h},v}\left(\begin{pmatrix}\pi_v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n\right) q_v^{n(1-s)},$$

et

$$W_{\mathbf{f}}^f=\prod_v W_{\mathbf{f},v}$$

et $W_{\mathbf{f}}^f=\Pi_v W_{\mathbf{h},v}$. En notant $\lambda_{\mathbf{f}}(T_v)$ la valeur propre de l'opérateur T_v agissant sur $\mathbf{f}$, on a $\lambda_{\mathbf{f}}(T_v)=q_v W_{\mathbf{f},v}(\left(\begin{smallmatrix}\pi_v & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right))$ ce qui donne:

$$D_v(\mathbf{f},\mathbf{h},s)=\sum_{n\geqslant 0}(\lambda_{\mathbf{f}}(T_v)\lambda_{\mathbf{h}}(T_v))^n q_v^{n(-1-s)}=(1-\lambda_{\mathbf{f}}(T_v)\lambda_{\mathbf{h}}(T_v)q_v^{-s-1})^{-1}.$$

REMARQUE. Soit $D(\mathbf{f},\mathbf{h},s)=\Pi_v D_v(\mathbf{f},\mathbf{h},s)$, le résultat ci-dessus, montre que cette serie converge pour $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ et qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

(5.6) *Series d'Eisenstein et résidu de* $D(s,\mathbf{f},\mathbf{h},\Phi)$

Soit $f_s(g)=Z(\alpha^{2s}\omega,g.\Phi)|\det(g)|_F^s$. On vérifie sans difficulté que $f_s(\gamma g)=f_s(g)$ pour tout $\gamma\in B_0(F)$, ce qui nous amène à définir la serie

$$E(s,\omega,\Phi)=\sum_{\gamma\in B_0(F)\backslash G(F)} f_s(\gamma),$$

qui converge pour $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ et se prolonge sur $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe (cf. [J] Prop. 19.3). En définissant la transformée de Fourier de Φ par

$$\hat{\Phi}(x,y)=\int_{F_{\mathbb{A}}^2}\Phi(u,v)\tau(yu-xv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

on obtient grâce à la formule de Poisson (cf. [J], [G-J]) $E(s,\omega,\Phi)=\theta^0(\alpha^{2s}\omega,\Phi)+\theta^0(\alpha^{2-2s}\omega^{-1},\hat{\Phi})-\lambda(\alpha^{2s\omega})\Phi(0)-\lambda(\alpha^{2-2s}\omega^{-1})\hat{\Phi}(0)$, où

$$\theta^0(\chi,\Phi)=\int_{F_{\mathbb{A}}^\times/F^\times}\left(\sum_{(\xi,\eta)\neq(0,0)}\Phi(a(\xi,\eta))\chi(a)F_0(|a|_F)\right)\mathrm{d}^\times a$$

et

$$\lambda(\chi)=\int_{F_{\mathbb{A}}^\times/F^\times}\chi(a)F_1(|a|)\,\mathrm{d}^\times a,$$

pour tout quasi-caractère χ, F_1 et F_0 étant deux fonctions continues positives telles que

$$F_0 + F_1 = 1$$

$$D_1(t) = F_0(t^{-1}) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^\times.$$

Il existe t_0 et t_1 tels que $0 < t_0 < 1 < t_1$ et $F_0(t) = 0$ si $t \in]0, t_0[$ et $F_0(t) = 0$ si $t > t_1$.

On en déduit que les éventuels pôles de $E(s, \omega, \Phi)$ sont les $s_0 \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha^{2-2s_0} = \omega$ (de résidu $\hat{\Phi}(0)\,\mathrm{mes}(J)$) ou $\alpha^{2s_0} = \omega^{-1}$ (de résidu $\Phi(0)\,\mathrm{mes}(J)$) avec $J = \{x \in F_{\mathbb{A}}^\times \text{ tel que } |x|_F = 1\}$.

PROPOSITION 5.6. *Soient* $\mathbf{f}$ *et* $\mathbf{h}$ *deux formes automorphes cuspidales, alors on a la 'formule de Rankin–Selberg' suivante*

$$D(s, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \Phi)$$

$$= 16\pi \times \int_{G(F)\backslash G(F_A)/K_1(\mathcal{A})Z_\infty} {}^t\mathbf{f}(g) A_n \mathbf{h}(g).E(s, \omega, g.\Phi).|\det(g)|^s.\mathrm{d}g,$$

$\mathrm{d}g$ *étant la mesure définie en* 3.2. *Si de plus* $\chi_{\mathbf{f}} = \bar{\chi}_{\mathbf{h}}$ *(i.e.* $\chi_{\mathbf{f}}\chi_{\mathbf{h}} = \alpha^{-2n}$), $D(s, \mathbf{f}, \mathbf{h}, \Phi)$ *a un pôle simple en* $s_0 = n + 1$ *de résidu*

$$16\pi \times \mathrm{mes}(J) \times N_{F/\mathbb{Q}}(\mathcal{D})^{-1} \times \prod_{v(\mathcal{A})>0} (1 - q_v^{-1}) \times \langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle.$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ *est le produit de Petersson défini en* 3.2.

Démonstration. Pour le premier point, la démonstration est analogue à celle de ([J] Chapitre 5). Le coefficient 16π provient de la différence des mesures utilisées en 3.2 et 5.5a pour le sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $a \in \mathbb{C}^\times$. Quant au second, il résulte du premier, de la formule de Poisson et de $\gamma(g.\Phi)(0) = |\det(g)|^{-1}.\hat{\Phi}(0)$. Enfin un petit calcul donne

$$\hat{\Phi}(0) = N_{F/\mathbb{Q}}(\mathcal{D})^{-1} \times \prod_{v(\mathcal{A})>0} (1 - q_v^{-1}). \qquad \square$$

6. Coefficients de Fourier d'une forme automorphe propre et nouvelle

Soient $\mathcal{A}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$ et χ un quasi-caractère de Hecke de conducteur $\mathcal{C}(\chi)$ divisant $\mathcal{A}$. Si a est un idèle de F d'idéal $\mathcal{A}$, on le décompose en $a = m.n$ où l'idéal de m divise le conducteur de χ et m et n sont premiers entre eux. Posons $w_m = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -m & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Alors l'application

$$\mathbf{W}_m : S_n(\mathcal{A}, \chi) \to S_n(\mathcal{A}, \bar{\chi})$$
$$\mathbf{f} \mapsto \mathbf{W}_m(\mathbf{f}) \quad \text{avec } \mathbf{W}_m(\mathbf{f})(g) = \mathbf{f}(g w_m)\bar{\chi}^o(\det(g))$$

où l'on note $\chi^o = \chi/|\chi|$ est un isomorphisme. Rappelons les formules bien connues de commutation de cette involution avec les opérateurs de Hecke.

LEMME 6.1.

(i) *Pour toute place v première à m, $W_m.T_v = \bar{\chi}^o(v)T_v.W_m$*
(ii) *Pour toute place, v, $T_v^* = W_a.T_v.W_a$.* (cf. [M] 1.8).

On va en déduire la proposition suivante:

PROPOSITION 6.2. *Soit $\mathbf{f} \in S_n(\mathcal{A};\chi)$ une forme propre et nouvelle. Pour tout v premier au conducteur de χ, on a $\bar{\lambda}_{\mathbf{f}}(T_v) = \bar{\chi}^o(v)\lambda_{\mathbf{f}}(T_v)$.*

Démonstration. Supposons d'abord établi le

LEMME 6.3. *Soit $\mathbf{f} \in S_n(\mathcal{A},\chi)$, il existe $\mathbf{f}^c \in S_n(\mathcal{A},\bar{\chi})$ tel que*

$$W^f_{\mathbf{f}^c}(g_f) = W^f_{\mathbf{f}}(\eta g_f)^c \quad \textit{pour tout } g_f \in G(F_f) \quad \text{et } \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application $S_n(\mathcal{A},\chi) \to S_n(\mathcal{A},\bar{\chi})$ définie par $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}^c$ est une involution anti-linéaire qui commute à l'involution de Weil W_a.

Il est alors clair que si $\mathbf{f}$ est propre (resp nouvelle) $\mathbf{f}^c$ est propre (resp nouvelle) et que $T_v.\mathbf{f}^c = \bar{\lambda}_{\mathbf{f}}(T_v)\mathbf{f}^c$. Par ailleurs, pour tout v premier à $\mathcal{A}$, nous avons:

$$\bar{\lambda}_{\mathbf{f}}(T_v)\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}^c\rangle = \langle \mathbf{f}, T_v.\mathbf{f}^c\rangle = \langle T_v^*.\mathbf{f}, \mathbf{f}^c\rangle = \langle W_a.T_v.W_a.\mathbf{f}, \mathbf{f}^c\rangle$$

$$= \langle \chi^o(v)T_vW_a.\mathbf{f}, \mathbf{f}^c\rangle = \bar{\chi}^o(v)\lambda_{\mathbf{f}}(T_v)\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}^c\rangle\bar{\lambda}_{\mathbf{f}}(T_v) = \bar{\chi}^o(v)\lambda_{\mathbf{f}}(T_v).$$

Soit $\bar{\lambda}_{\mathbf{f}}(T_v) = \bar{\chi}^o(v)\lambda_{\mathbf{f}}(T_v)$; or d'après le Lemme 6.1 la valeur propre de T_v agissant sur $\mathbf{W}_m(\mathbf{f})$ est $\bar{\chi}^o(v)\lambda_{\mathbf{f}}(T_v)$ pour v premier à m. La théorie des formes nouvelles nous dit donc que $\mathbf{f}^c$ et $\mathbf{W}_m(\mathbf{f})$ sont proportionnelles et ceci achève la preuve. □

Le Lemme 6.1.3 est un cas particulier du Corollaire 4.1.2. C'est aussi une conséquence facile du théorème inverse de Weil (cf. [W] Th. 7 p. 137). D'après le Th. 6 p. 126 de [W], les séries de Dirichlet de $\mathbf{f}$ et $\mathbf{W}_a.\mathbf{f}$ vérifient des équations fonctionnelles dont il est facile de vérifier que les facteurs gamma et épsilon commutent à la conjugaison complexe de leurs variables. En prenant les conjuguées complexes de ces équations, on obtient les équations fonctionnelles d'éventuelles formes $\mathbf{f}^c$ et $\mathbf{W}_a.\mathbf{f}^c$ qui existent d'après le Th. 7 de [W]. De plus $(\mathbf{W}_a.\mathbf{f})^c = \mathbf{W}_a.\mathbf{f}^c$ □

Pour les places v divisant le conducteur $\mathcal{C}(\chi)$, nous avons les informations plus précises suivantes:

PROPOSITION 6.4. *Soit* $\mathbf{f} \in S_n(\mathcal{A};\chi)$ *propre et nouvelle et* v *une place finie divisant* $\mathcal{C}(\chi)$ *le conducteur* χ. *Alors,*

$$|\lambda_{\mathbf{f}}(T_v)|^2 = q_v^{n+1} \text{ si } v(\mathcal{C}(\chi)) = v(\mathcal{A}) \text{ et } \lambda_{\mathbf{f}}(T_v) = 0 \text{ si } v(c(\chi)) < v(\mathcal{A}).$$

de plus $\mathbf{W}_a.\mathbf{f} = \alpha_{\mathbf{f}}.\mathbf{f}$ *avec* $|\alpha_{\mathbf{f}}| = N_{F/\mathbb{Q}}(\mathcal{A})^n$.

Démonstration. Rappelons qu'à toute représentation irréductible lisse admissible π de GL_2 sur un corps local F et tout caractère additif continu τ de F, on peut associer un modèle de Whittaker $W(\pi,\tau)$ (i.e. un espace de fonction sur $\mathrm{GL}_2(F)$ à valeurs complexes vérifiant (b)–(i) Section 5 sur lequel la représentation de $\mathrm{GL}_2(F)$ soit isomorphe à π. (cf. par exemple [Go2] pour plus de détails). Puisque $\mathbf{f}$ est propre et nouvelle, on peut lui associer une représentation automorphe cuspidale $\pi(\mathbf{f}) = \rho_n^\infty \otimes \Pi_v \pi_v(\mathbf{f})$ et $W_{\mathbf{f}}^f = \bar{\Pi}_v W_{\mathbf{f}}^v$ où $W_{\mathbf{f}}^v$ est l'unique fonction appartenant au modèle de Whittaker $W(\pi_v(\mathbf{f}),\tau_v)$ pour le caractère additif τ_v de F_v telle que $W(gk) = \chi(k)W(g)$ pour tout $k \in K_0(\mathcal{A}_v)$ et $W(l_2) = 1$ (cf. [C] pour l'existence). La proposition est donc la conséquence du lemme suivant:

LEMME 6.5. *Soit* π *une représentation irréductible admissible de* GL_2 *sur un corps local* F *de corps résiduel de cardinal* q *et de conducteur* $\mathrm{cond}(\pi) = \tilde{\omega}^e$ *avec* $e \leqslant 1$ *et* $\tilde{\omega}$ *une uniformisante de* F. *Soit* χ *le caractère central de* π *de conducteur* $\mathrm{cond}(\chi)$. *Soit* W_π^o *l'unique fonction de Whittaker de* $W(\pi,\tau)$ *vérifiant les conditions* (6.5) $W(gk) = \chi(k)W(g)$ *pour tout* $k \in K_o(c(\pi),\tau)$ *et* $W(l_2) = 1$ *où*

$$K_o(\tilde{\omega}^e,\tau) = (k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F) tq a,d \in O_F,$$

$$c \in c(\pi)\delta \quad et \quad b \in \delta^{-1} \quad et \quad adbc \in O_F^\times),$$

$$\delta = \{x \in F, \tau(xy) \in O_F \,\forall y \in O_F\} \quad et \quad \chi(k) = \chi(d).$$

Soit λ_π *la valeur propre de* $T = K_1(c(\pi),\tau)\left(\begin{smallmatrix} \tilde{\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) K_1(c(\pi),\tau)$ *opérant sur* W_π^o, *alors si* $v_F(\mathrm{cond}(\chi)) = v_F(\mathrm{cond}(\pi))$,

$$\lambda_{\pi\otimes\bar{\chi}_\pi^o} \times \lambda_\pi = q|\chi(\tilde{\omega})|$$

si $v_F(\mathrm{cond}(\chi)) < v_F(\mathrm{cond}(\pi))$,

$$\lambda_\pi = \lambda_{\pi\otimes\bar{\chi}_\pi^o} = 0,$$

de plus si α_π *est définie par* $\mathbf{W}_{-\tilde{\omega}^e}(W_\pi^o) = \alpha_\pi W_{\pi\otimes\bar{\chi}^o}^o$, *où alors* $\alpha_\pi\alpha_{\pi\otimes\bar{\chi}^o} = \chi_\pi(-1)|\chi_\pi(\tilde{\omega})|^{2e}$.

Démonstration. Ceci est une propriété bien connue des représentations de GL(2) sur un corps local non archimédien. Nous en donnons ici une démonstration

élémentaire. On peut aussi consulter [H4] (cf. Lemme 12.2) pour une preuve plus directe. Posons pour abréger $w_e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{\omega}^e & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et

$$f(x) = \mathbf{W}_{-\tilde{\omega}^e}.T^e.T^e.W_\pi^o \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{u \in (O_F/\tilde{\omega}^e)} W_\pi^o \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_e \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \bar{\chi}^o(x).$$

Or nous avons

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}^e & v \\ 0 & \tilde{\omega}^e \end{pmatrix}^{-1} W_e \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^e & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & (1+\varepsilon uv)\tilde{\omega}^{-e} \\ -\tilde{\omega}^e & -u \end{pmatrix} \in K_0(\tilde{\omega}^e, \tau),$$

si et seulement si $v_F(u) = 0$ et $v \equiv -u^{-1} \pmod{\tilde{\omega}^e}$ donc,

$$W_\pi^o \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_e \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^e & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \chi(-u\tilde{\omega}^e)\tau(v\tilde{\omega}^{-e}x) W_\pi^o \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

donc

$$f(x) = \left(\sum_{v \in (O_F/\tilde{\omega}^e)^\times} \tau(vx\tilde{\omega}^{-e})\chi^{-1}(v) \right) \chi^o(\tilde{\omega}^e) W_\pi^o \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \chi^o(x)$$

$$+ \sum_{u \in (O_F/\tilde{\omega}^{e-1})} W_\pi^o \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_e \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^e & \tilde{\omega}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \bar{\chi}^o(x).$$

Pour calculer la seconde somme, il suffit de remarquer que

$$w_e \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^e & \tilde{\omega}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_e \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^{e-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne finalement:

$$\mathbf{W}_{\tilde{\omega}^e}.T^e.W^o \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= G_\tau(x\tilde{\omega}^{-e}, \chi^{-1})\chi(\tilde{\omega})^e \bar{\chi}^o(x) W^o \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$+ |\chi(\tilde{\omega})| \mathbf{W}_{-\tilde{\omega}^e}.T^{e-1}.W^o \left(\begin{pmatrix} x/\tilde{\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \tag{6.5}$$

où $G_\tau(x\tilde{\omega}^{-e}, \chi^{-1})$ est la somme de Gauss apparaissant dans le premier terme de $f(x)$ ci-dessus. D'autre part, puisque $\mathbf{W}_{-\tilde{\omega}^e}.W_\pi^o = \alpha_\pi \times W^o_{\pi\otimes\bar{\chi}^o}$, en prenant $x = 1$ dans (6.5) on obtient

$$\lambda_\pi^e \alpha_\pi = \chi(\tilde{\omega})^e G_\tau(\tilde{\omega}^{-e}, \chi^{-1}) \tag{6.5.1}$$

et en prenant $x = \tilde{\omega}^e$,

$$\lambda_\pi^e \lambda^e_{\pi\otimes\bar{\chi}^o} \alpha_\pi = \lambda_\pi^{e-1} (\lambda_{\pi\otimes\bar{\chi}^o})^{e-1} q \alpha_\pi |\chi(\tilde{\omega})|. \tag{6.5.2}$$

Par ailleurs le fait que $\mathbf{W}_{-\tilde{\omega}^e}$ soit une involution nous assure que α_π est non nul, ce qui entraîne en utilisant (6.5.2)

$$\begin{aligned} &\text{soit } \lambda_\pi \lambda_{\pi\otimes\bar{\chi}^o} = 0, \\ &\text{soit } \lambda_\pi \lambda_{\pi\otimes\bar{\chi}^o} = q|\chi(\tilde{\omega})|. \end{aligned}$$

Si $v_F(\mathrm{cond}(\chi)) < e$ alors $G_\tau(\tilde{\omega}^{-e}, \chi^{-1}) = 0$ donc $\lambda_\pi = 0$ d'après (6.5.1). Réciproquement si $\lambda_\pi = 0$ alors $e \geqslant 2$ (car $e = 1$ et (6.5.2) entraine $\lambda_\pi \neq 0$) et on peut faire une démonstration analogue à celle de Ogg (cf. [0] Th. 3). Le dernier point s'obtient sans difficulté en faisant opérer deux fois l'involution de Weil. Ceci clôt la preuve de lemme. Pour la proposition, il suffit de remarquer que $\bar{\lambda}_{\pi_v}(\mathbf{f}) = \lambda_{\pi_v}(\mathbf{f}) \otimes \bar{\chi}_\mathbf{f}^o$ et $\bar{\alpha}_{\pi_v}(\mathbf{f}) = \chi(-1).\alpha_{\pi_v}(\mathbf{f}) \otimes \bar{\chi}_\mathbf{f}^o$ car $W_a(\mathbf{f})$ et $\mathbf{f}^c$ sont proportionnels. □

7. Fonction L du carré symétrique associée à une forme propre

Soit $\mathbf{f}$ une forme propre pour l'algèbre de Hecke $R_1(\mathcal{A})$ de valeurs propres $\lambda_\mathbf{f}(T_v)$, soient χ un quasi-caractère et $\chi_\mathbf{f}$ le Nebentypus de $\mathbf{f}$. On définit les scalaires a_v et b_v tels que $a_v + b_v = \lambda_\mathbf{f}(T_v)$ et $a_v b_v = \chi_\mathbf{f}(v) q_v^{n+1}$ et la fonction L du carré symétrique de $\mathbf{f}$ tordu par χ par le produit eulerien:

$$L(s, \mathbf{f}, \chi) = \prod_v [(1 - a_v^2 \chi(v) q_v^{-s})(1 - a_v b_v \chi(v) q_v^{-s})(1 - b^2.\chi(v) q_v^{-s})]^{-1}.$$

Ce produit converge pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ et on pourrait montrer qu'elle admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$. Nous nous contentons de l'étudier pour $\chi = \bar{\chi}_\mathbf{f}^o$. Soit $\hat{\pi}(\mathbf{f})$ le changement de base de GL(2) à GL(3) (cf. [G-J]) de la représentation irréductible $\pi(\mathbf{f})$ associé à $\mathbf{f}$. Alors la fonction L associé à $\hat{\pi}(\mathbf{f})$ diffère de $L(s, \mathbf{f}, \bar{\chi}_\mathbf{f}^o)$ par les facteurs Eulériens en les places divisant le niveau. Plus précisément, on a (cf. [G-J], [Sch], [H6]):

$$L(s - n - 1, \hat{\pi}(\mathbf{f})) = L(s, \mathbf{f}, \bar{\chi}_\mathbf{f}^o) \times \prod_{v \in S} (1 - q_v^{n+1-s})^{-1} \times \prod_{v \in T} (1 + q_v^{n+1-s})^{-1}$$

où S est l'ensemble des places divisant $\mathcal{A}$ sans diviser $\mathcal{A}/c(\chi)$ et T est l'ensemble des places finies v telles que $\pi(\mathbf{f})_v$ soit super-cuspidale et vérifie $\pi(\mathbf{f})_v \simeq \pi(\mathbf{f})_v \otimes \gamma_v$ avec η_v le caractère quadratique non ramifié de $F_v^\times$ non trivial. En utilisant la classification due à Kutzko des représentations super-cuspidales de GL(2), Hida a montré dans [H7] (cf. Prop. 6.1) que T est l'ensemble des v tels que $v(\mathcal{A}/c(\chi))$ est pair et non nul.

Avant d'énoncer le résultat qui suit, rappelons que l'on définit pour tout corps de nombres la fonction zêta de Dedekind par la série:

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathcal{A}} N_{F/\mathbb{Q}}(\mathcal{A})^{-s},$$

qui converge pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$. ζ_F admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, peut s'exprimer par le produit eulerien:

$$\zeta_F(s) = \prod \mathcal{P}(1 - N_{F/\mathbb{Q}}(\mathcal{P})^{-s})^{-1}.$$

Pour tout idéal entier $\mathcal{A}$, nous posons

$$\zeta_F^{\mathcal{A}}(s) = \zeta_F(s) \times \prod_{\mathcal{P}|\mathcal{A}} (1 - N_{F/\mathbb{Q}}(\mathcal{P})^{-s}).$$

Enfin, pour tout idéal $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}_F$, nous notons $\varphi(\mathcal{B})$ le cardinal du groupe fini $(\mathcal{O}_F/\mathcal{B})^\times$.

PROPOSITION 7.1. *Soit* $\mathbf{f}$ *propre, normalisée et nouvelle de niveau* $\mathcal{A}$, *alors*:

$$\begin{aligned} D(s, \mathbf{f}, \mathbf{f}^c, \Phi) \;=\; & D_\infty(s, \Phi_\infty) \times L(s - n, \hat{\pi}(\mathbf{f})) \\ & \times \zeta^{\mathcal{A}}(s - n) \times \varphi(\mathcal{A}) \times \prod_{v \in T} (1 + q_v^{n-s}). \end{aligned}$$

En particulier, en $s = n + 1$ *on obtient*:

$$L(1, \hat{\pi}(\mathbf{f})) = 16\pi \times \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}^c \rangle}{D_\infty(n+1, \Phi_\infty) \times \prod_{v \in T}(1 + q_v^{-1}) \times \varphi(\mathcal{A}) \times d_F}.$$

Démonstration. Si $v(\mathcal{A}) = 0$, la v-composante $\pi_v(\mathbf{f})$ de la représentation engendrée par $\mathbf{f}$ est isomorphe à une série principale $\pi(\mu_{\mathbf{f}}^v, \nu_{\mathbf{f}}^v)$ avec $\mu_{\mathbf{f}}^v \nu_{\mathbf{f}}^v = \chi_{\mathbf{f}}^v$ et $\mu_{\mathbf{f}}^v, \nu_{\mathbf{f}}^v$ non ramifiés et $W_{\mathbf{f}}^v$ est l'unique fonction sphérique prenant la valeur 1 sur $K_1(\mathcal{A})_v$. D'après la prop 15.9 de [J], on a $D_v(s, \mathbf{f}, \mathbf{f}^c) L_v(2s, \alpha^{-2n}) = L_v(s, \mu_{\mathbf{f}}^v \bar{\nu}_{\mathbf{f}}^v) L_v(s, \mu_{\mathbf{f}}^v \bar{\mu}_{\mathbf{f}}^v) L_v(s, \bar{\mu}_{\mathbf{f}}^v \nu_{\mathbf{f}}^v) L_v(s, \nu_{\mathbf{f}}^v \bar{\nu}_{\mathbf{f}}^v)$ or $\mu_{\mathbf{f}}^v(\pi_v) q^{1/2} = a_v, \nu_{\mathbf{f}}^v(\pi_v) \times q^{1/2} = b_v$ et $\pi_v(\mathbf{f}) \otimes \bar{\chi}_i^o = \pi_v(\mathbf{f}^c)$ donc $D_v(s, \mathbf{f}, \mathbf{f}^c) \times L_v(2s, \alpha^{-2n}) = L_v(s + 1, \mathbf{f}, \bar{\chi}_{\mathbf{f}}^o) \times L_v(s, \alpha^{-n})$.

Si $v(\mathcal{A}) > 0$ et si $v(c(\chi)) < v(\mathcal{A})$ alors $D_v(s, \mathbf{f}, \mathbf{f}^c) = 1$ d'après la prop. 6.4. Si $v(\mathcal{A}) = v(c(\chi)) > 0$ alors $D_v(s, \mathbf{f}, \mathbf{f}^c) = (1 - |\lambda_v(\mathbf{f})|^2 q_v^{-s-1})^{-1} = (1 - q_v^{n-s})^{-1}$

d'après la prop. 6.4. On obtient alors le premier point en utilisant (5.5.b). Pour le second point, il suffit de prendre $s = n+1$ dans cette égalité, utiliser la proposition 5.6 et se rappeler que

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{s=n+1}\zeta_F\mathcal{A}(s-n) &= \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s)\times\textstyle\prod_{v(\mathcal{A})>0}(1-q_v^{-1})\\ &= \mathrm{mes}(J)\times\textstyle\prod_{v(\mathcal{A})>0}(1-q_v^{-1}).\end{aligned}$$

□

Pour tout E sous-corps de $K_{\mathbf{f}}$ et de degré r_E, nous posons:

$$Z_E(s,\mathbf{f}) = \prod_{\sigma\in I_E} L(s,\hat{\pi}(\mathbf{f}^\sigma)).$$

En utilisant (7.1), (5.3) et (3.3) on obtient

$$\prod_{\sigma\in I_E}\langle\mathbf{f}^\sigma,\mathbf{f}^{\sigma c}\rangle = \left[\prod_{v\in T}(1+q_v^{-1})\times\varphi(\mathcal{A})\times d_F\right]^{r_E}\times\frac{Z_E(1,\mathbf{f})}{(8\alpha_n)^{r_E}(2\pi)^{(2+2n)r_E}}$$

où d_F désigne le discriminant de F sur $\mathbb{Q}$. On obtient alors:

THÉORÈME 7.2. *Soit $\bar{\mathbf{f}}$ une forme primitive de poids n et de niveau $\mathcal{A}$. Soit A un sous-anneau principal de $K_{\mathbf{f}}$ de corps des fractions E. Alors*

(i) $C(A;\mathbf{f}) = [\prod_{v\in T}(1+q_v^{-1})\times\varphi(\mathcal{A})\times d_F]^{r_E}$
$$\times\frac{Z_E(1,\mathbf{f})}{(u_1(A;\mathbf{f})u_2(A;\mathbf{f})\times(8\alpha_n)^{r_E}(2\pi)^{(2+2n)r_E}},$$
est élément de A.

(ii) *Pour tout $\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $C(A;\mathbf{f})^\tau = C(A^\tau;\mathbf{f}^\tau)$.*

Démonstration. D'après la définition de $u_1(A;\mathbf{f})$ et $u_2(A;\mathbf{f})$ et la formule (7.2), $C(A;\mathbf{f}) = c(A;\mathbf{f}) = \det(B(e_i^1,e_i^2)) = \mathrm{disc}(\mathbf{f})$ (cf notation du Section 4) donc $C(A;\mathbf{f})\in A$. □

Si A est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal contenant p, les propositions 4.2 et 4.3 fournissent le théorème suivant:

THÉORÈME 7.3. *On conserve les notations précédentes avec p ne divisant pas w_F et $n(\mathcal{A})>3$. On suppose en outre que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiées*:

(i) $\mathbf{f}$ *est p-ordinaire.*
(ii) *p et $\mathcal{A}$ sont premiers entre eux et $p>n$.*

Alors si $v(C(A;\mathbf{f}))\geqslant 1$, il existe un idéal premier $\mathcal{P}$ de $\bar{\mathbb{Q}}$ au dessus de p et une forme propre $\mathbf{h}\in S_n(\mathcal{A};\mathbb{C})$ telle que:

(i) $\mathbf{h} \neq \mathbf{f}^\sigma$ *pour tout* $\sigma \in I_E$.

(ii) $\lambda_{\mathbf{f}}(T) \equiv \lambda_{\mathbf{h}}(T) \pmod{\mathcal{P}}$ *pour tout* $T \in h_n(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$.

Références

[A] Asai, T.: *On the Fourier coefficient of automorphic forms at various cusps and some applications to Rankin's convolution*, J. Math. Japan vol. 28, No. 1 (1976).

[B] Bredon, G. E.: *Sheaf theory*, McGraw-Hill, 1967.

[Be] Beilinson, A.: *Higher regulators and values of L-functions*, J. Soviet Math. 30, Ch. 2, Sect. 6, (1985) 2036–2070.

[B-M] Borel, A. et Moore, J. C.: *Homology theory for locally compact spaces*, Mich. Math. J. 7, (1960) 137–159.

[B-S] Borel, A. et Serre, J-P.: *Corners and arithmetic groups*, Comment. Math. Helv. 48, (1974) 436–491.

[B-W] Borel, A. et Wallach, N.: *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Princeton University Press 1980.

[C] Casselman, W.: *On some results of Atkin and Lehner*, Math. Ann. 201 (1973), p. 301–314.

[Ge] Gelbart, S.: *Automorphic forms on adele groups*, Princeton University Press 1975.

[G-J] Gelbart, S. et Jacquet, H.: *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3), Ann. Sci. Ec. Norm. Super., 4ème série 11, (1978) 471–542.

[Go1] Godement, R.: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* ed Hermann, 1958.

[Go2] Godement, R.: *Notes on Jacquet–Langlands' theory*, Institute for Advanced Study, Princeton, 1970.

[Gui] Guichardet, A.: *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Textes Mathematiques 2, Cedic/Fernand Nathan, 1980.

[Ha] Harder, G.: *Eisenstein cohomology of arithmetic groups: the case* GL_2, Inv. Math. 89, (1987) 37–118.

[H1] Hida, H.: *Congruences of cusp forms and special values of their zeta function* Inv. Math. 63, (1981) 225–261.

[H2] Hida, H.: *On congruence divisors of cusp forms as factors of the special values of their zeta functions*, Inv. Math., vol 64, (1981) 221–262.

[H3] Hida, H.: *Kummer's criterion for the special values of Hecke L-functions of imaginary quadratic fields and congruences among cusp forms*, Inv. Math., vol 66, (1982) 415–459.

[H4] Hida, H.: *On p-adic Hecke algebras for* GL_2 *over totally real fields*, Ann. of Math., vol. 128, (1988) 295–384.

[H5] Hida, H.: *p-adic cohomology groups for* SL_2 *over number fields*, Duke Math. J., Vol 62 No 2, (1993) 259–314.

[H6] Hida, H.: *On the critical values of L-functions of* GL(2) *and* GL(2) × GL(2), to appear in Duke Math. Journal Vol 74, 1994.

[H7] Hida, H.: *p-adic L-functions for base change lifts of* GL(2) *to* GL(3), in Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions II, Perspectives in Mathematics 11, Academic Press, (1990) 93–142.

[J] Jacquet, H.: *Automorphic forms on* GL_2 *part II*, Springer Lecture Notes vol. 278, 1972.

[K] Katz, N.: *p-adic L-functions for CM fields*, Inv. Math. 49, (1978) 199–297.

[M] Miyake, T.: *On automorphic forms on* GL_2 *and Hecke operators*, Ann. Math. 94, (1971) 174–1789.

[O] Ogg, A. P.: *On the eigenvalues of Hecke operators*, Math. Ann. 179, (1969) 101–108.

[R-T] Rogawski, J. D. and Tunnell, J. B.: *On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight one*, Inv. Math. vol. 74, (1983) 1–41.

[Sh] Shimura, G.: *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*; Princeton Univ. Press (1971).

[St] Sturm, J.: *Special values of zeta functions, and Eisenstein series of half integral weight*, American J. of Math., vol. 102 No. 2, (1980), 291–240.

[T] Taylor, R.: *Congruences between Modular Forms on* GL_2 *over an imaginary quadratic field*, Oct 1987, Princeton Ph.D. Thesis.

[U] Urban, E.: Arithmetique des formes automorphes pour GL(2) sur un corps imaginaire quadratique, thèse de l'université d'Orsay.

[W] Weil, A.: *Dirichlet Series and automorphic forms*, Lecture Notes 189, Springer-Verlag, 1970.