

COMPOSITIO MATHEMATICA

NORIKO HIRATA-KOHNO

**Approximations simultanées sur les groupes
algébriques commutatifs**

Compositio Mathematica, tome 86, n° 1 (1993), p. 69-96

http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__86_1_69_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs

NORIKO HIRATA-KOHNO

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro, Tokyo 152 Japan

Received 18 July 1991; accepted in revised form 12 March 1992

On établit dans ce travail des estimations pour les formes linéaires simultanées à coefficients algébriques en des points algébriques sur un groupe algébrique commutatif. Nos résultats sont des généralisations aux approximations simultanées des travaux antérieurs de [H2]: il est important de considérer les approximations simultanées au point de vue des applications aux équations diophantiennes (cf. [H4], [L]). Nous présentons aussi un raffinement pour des combinaisons linéaires de périodes de l'application exponentielle du groupe. Notre énoncé principal améliore des résultats précédents dans cette direction, par exemple celui dû à Philippon et Waldschmidt (voir Section 1(4)). Remarquons que notre astuce de raffinement est un peu différente de celle pour les formes linéaires ordinaires de [H2], car on a besoin d'introduire un nouveau point qui est valide pour toutes les formes linéaires simultanément (voir Section 2(4)).

On énonce les résultats au paragraphe 1 en comparant avec des résultats antérieurs. Le paragraphe 2 donne des préparatifs, et on démontre le théorème 1.1 dans le paragraphe 3. Le paragraphe 4 contient les idées de démonstration du théorème 1.7 et des remarques pour les articles [H2] et [P-W1].

1. Enoncés

1. Notations

Soient k un entier ≥ 0 et t un entier ≥ 1 . Considérons des groupes algébriques commutatifs connexes définis sur la clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} dans \mathbb{C} . On les note G_0, G_1, \dots, G_k avec $G_0 = \mathbf{G}_a$, $G_1 = \dots = G_{d_1} = \mathbf{G}_m$ ($0 \leq d_1 \leq k$). Posons $\mathcal{G} = G_0 \times \dots \times G_k$. Soient δ_i la dimension de G_i ($0 \leq i \leq k$) et $d+1$ celle de \mathcal{G} ; on a $\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_{d_1} = 1$, $\delta_1 + \dots + \delta_k = d$.

Nous notons $d_2 = d - d_1$, $\rho_1 = \dots = \rho_{d_1} = 1$, $\rho_{d_1+1} = \dots = \rho_k = 2$. On note $\exp_{\mathcal{G}}$ (resp. \exp_{G_i} pour $0 \leq i \leq k$) l'application exponentielle de \mathcal{G} (resp. G_i pour

$0 \leq i \leq k$). Pour chaque entier i , $0 \leq i \leq k$, on fixe un plongement de G_i dans un espace projectif \mathbb{P}_{N_i} , défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$, et de plus on fixe aussi une base de l'espace tangent $T_{G_i}(\mathbb{C})$ de $G_i(\mathbb{C})$ en l'origine, qui est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et qui identifie $T_{G_i}(\mathbb{C})$ avec \mathbb{C}^{δ_i} . Identifions encore $T_{\mathcal{G}}(\mathbb{C})$ avec $T_{G_0}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus T_{G_k}(\mathbb{C})$, donc avec \mathbb{C}^{d+1} . Pour n entier ≥ 1 et pour $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ on note $\|\cdot\|$ la norme définie par $\|\mathbf{z}\| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{1/2}$; notons encore $\|\cdot\|$ la norme induite sur chaque $T_{G_i}(\mathbb{C})$ ($0 \leq i \leq k$) et sur $T_{\mathcal{G}}(\mathbb{C})$ par les identifications précédentes. On désigne les coordonnées d'un point de $T_{\mathcal{G}}(\mathbb{C})$ par (z_0, z_1, \dots, z_d) . Enfin, soit h la hauteur (de Weil) logarithmique absolue (voir la définition dans [W]).

2. Théorème principal

THEOREME 1.1. *Il existe une constante $C_1 > 0$ effectivement calculable ne dépendant que des données et des choix précédents, ayant la propriété suivante. Soit K un corps de nombres sur lequel les objets introduits: G_i , les bases des espaces tangents des G_i , les plongements des G_i dans \mathbb{P}_{N_i} ($0 \leq i \leq k$) sont tous définis. Pour $1 \leq \tau \leq t$, soient $\mathcal{L}_\tau(\mathbf{z}) = \beta_{0,\tau} z_0 + \cdots + \beta_{d,\tau} z_d$ des formes linéaires indépendantes à coefficients dans K , sur l'espace tangent $T_{\mathcal{G}}(\mathbb{C})$. Notons \mathcal{W} l'intersection de leurs noyaux. Pour chaque $1 \leq i \leq k$, soit $\mathbf{u}_i \in T_{G_i}(\mathbb{C})$ avec $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ tel que $\gamma_i = \exp_{G_i}(\mathbf{u}_i)$ appartienne à $G_i(K)$. Notons $\mathbf{v} = (1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \in T_{\mathcal{G}}(\mathbb{C})$ et $D = [K : \mathbb{Q}]$. Soient B, E, V_1, \dots, V_k, V des nombres réels vérifiant*

$$D \log B \geq \log V \quad \text{où} \quad V = \text{Max}\{V_i; 1 \leq i \leq k\}, \quad (1.2)$$

$$\log B \geq \text{Max}(e, h(\beta_{j,\tau})) \quad (0 \leq j \leq d, 1 \leq \tau \leq t), \quad (1.3)$$

$$\log V_i \geq \text{Max}(h(\gamma_i), \|\mathbf{u}_i\|^{\rho_i}/D, 1/D) \quad (1 \leq i \leq k), \quad (1.4)$$

$$e \leq E \leq \text{Min}(e \cdot (D \log V_i)^{1/\rho_i} / \|\mathbf{u}_i\|) \quad (1 \leq i \leq k). \quad (1.5)$$

(1.6) *Si tout sous-groupe algébrique \mathcal{G}' de \mathcal{G} tel que*

$$\mathbf{v} \in T_{\mathcal{G}'}(\mathbb{C}) \quad \text{vérifie} \quad T_{\mathcal{G}'}(\mathbb{C}) + \mathcal{W} = T_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}),$$

alors on a

$$\text{Max}_{1 \leq \tau \leq t} \log |\mathcal{L}_\tau(\mathbf{v})| > -C_1 \text{Max} \left\{ D^2 \log(BV), \right.$$

$$D^{(d+d_2+1)/t+1} (\log B + \log(DE)) \left(\frac{\log \log B + \log D}{\log E} + 1 \right)^{(d_2+1)/t}$$

$$\left. \cdot \left(\prod_{i=1}^k (\log V_i)^{\delta_i/t} \right) (\log E)^{-d/t} \right\}. \quad \square$$

D'après le théorème de [Wü], l'hypothèse (1.6) implique $v \notin \mathcal{W}$. Lorsque $\exp_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}v)$ est Zariski dense, le seul sous-groupe \mathcal{G}' dont l'espace tangent contienne le point v est \mathcal{G} , par conséquent, l'hypothèse (1.6) est immédiatement satisfaite dans ce cas.

La condition (1.2) permet de simplifier notre minoration; on peut supprimer cette hypothèse (1.2) à condition de remplacer d'une part le terme $\log B + \log(DE)$ par $\log B + \log(DE \log V)$ et d'autre part le terme

$$\{\log \log B + \log D\}/(\log E) + 1$$

par

$$\{(\log \log B + \log(D \log V))/(\log E)\} + 1.$$

Un exemple d'application de notre théorème 1.1 peut être obtenu de la manière suivante. Soient d_1, d_2, d des entiers ≥ 0 tels que $d = d_1 + d_2$. Pour chaque $1 \leq i \leq d_2$, soit \wp_i une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_{2i}, g_{3i} algébriques, respectivement. Soit $\alpha_i \neq 0, \neq 1$ ($1 \leq i \leq d_1$) des nombres algébriques et pour chaque $1 \leq i \leq d_1$, soit $\log \alpha_i$ une détermination du logarithme de α_i . Pour tout $1 \leq i \leq d_2$, soit u_i un nombre complexe non nul. On suppose que pour $1 \leq i \leq d_2$, ou bien u_i est pôle de \wp_i , ou bien $\wp_i(u_i)$ est algébrique. En considérant la courbe elliptique E_i associée à \wp_i et le groupe algébrique $\mathcal{G} = \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m^{d_1} \times E_1 \times \dots \times E_{d_2}$, alors le théorème 1.1 entraîne une minoration pour les formes linéaires simultanées en des nombres $\log \alpha_i$ et u_j ($1 \leq i \leq d_1, 1 \leq j \leq d_2$).

Dans le théorème 1.1, la constante C_1 ne dépend que du groupe \mathcal{G} , du plongement de \mathcal{G} dans l'espace projectif que l'on prend et de la base de l'espace tangent de \mathcal{G} que l'on fixe, c'est-à-dire des coefficients des équations différentielles que vérifie l'application méromorphe (2.1) définie dans la Section 2(2). Nous pouvons théoriquement expliciter cette constante grâce aux travaux de [D]. On va démontrer nos énoncés pour un choix du plongement et un choix de la base de l'espace tangent, mais quitte à modifier les constantes $C_1, C_2, \dots, c_1, c_2, \dots$, on obtient les énoncés pour tous les choix de plongements et de bases de l'espace tangent.

3. Formes linéaires de périodes

On peut raffiner le théorème 1.1. quand on considère des combinaisons linéaires de périodes de $\exp_{\mathcal{G}}$.

THEOREME 1.7. *Il existe une constante $C_2 > 0$ effectivement calculable ne dépendant que des données et des choix précédents, ayant la propriété suivante.*

Soit K un corps de nombres sur lequel les objets introduits: G_i , les bases des espaces tangents des G_i , les plongements des G_i dans \mathbb{P}_{N_i} ($0 \leq i \leq k$) sont tous définis. Pour $1 \leq \tau \leq t$, soient $\mathcal{L}_\tau(\mathbf{z}) = \beta_{0,\tau} z_0 + \dots + \beta_{d,\tau} z_d$ des formes linéaires indépendantes à coefficients dans K , sur l'espace tangent $T_{\mathcal{G}}(\mathbb{C})$. Notons \mathcal{W} l'intersection de leurs noyaux. Pour chaque $1 \leq i \leq k$, soit $\mathbf{u}_i \in T_{G_i}(\mathbb{C})$ avec $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{u}_i \in \text{Ker exp}_{G_i}$. Notons

$$\mathbf{v} = (0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \in T_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad D = [K : \mathbb{Q}].$$

Soit B un nombre réel vérifiant

$$\log B \geq \text{Max}(e, h(\beta_{j,\tau})) \quad (0 \leq j \leq d, 1 \leq \tau \leq t). \quad (1.8)$$

Posons $A_i = \text{Max}(\|\mathbf{u}_i\|^{\rho_i}, 1)$ ($1 \leq i \leq k$) et $A = \text{Max}\{A_i; 1 \leq i \leq k\}$.

(1.9) Si tout sous-groupe algébrique \mathcal{G}' de \mathcal{G} tel que

$$\mathbf{v} \in T_{\mathcal{G}'}(\mathbb{C}) \text{ vérifie } T_{\mathcal{G}'}(\mathbb{C}) + \mathcal{W} = T_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}),$$

alors on a

$$\begin{aligned} \text{Max}_{1 \leq \tau \leq t} \log |\mathcal{L}_\tau(\mathbf{v})| &> -C_2 \text{Max} \left\{ D^2 \log B + DA, \right. \\ &\left. D^{d_2/t+1} (\log B + \log A) (\log \log B + \log A)^{d_2/t} \left(\prod_{i=1}^k (A_i)^{\delta_i/t} \right) \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

4. Les résultats antérieurs

La meilleure minoration précédemment connue dans notre situation est le théorème de [P-W1]. En supposant $B \geq D \log V_i$ ($1 \leq i \leq k$) au lieu de notre condition (1.2), et $V_i \geq e$ ($1 \leq i \leq k$) au lieu de notre hypothèse $\log V_i \geq 1/D$ dans (1.4), le théorème 1.3 de [P-W1] donne, en mettant le terme $D^2 \log(BV)$ pour la correction (voir notre §4(2)(c));

$$\begin{aligned} \text{Max}_{1 \leq \tau \leq t} \log |\mathcal{L}_\tau(\mathbf{v})| &> -C_3 \text{Max} \left\{ D^2 (\log BV), \right. \\ &\left. D^{(d+d_2+1)/t+1} (\log B)^{d_2/t+1} (\log(D^+ E))^{1/t} \left(\prod_{i=1}^k (\log V_i)^{\delta_i/t} \right) (\log E)^{-(d+d_2+1)/t} \right\}. \end{aligned}$$

où $D^+ = \text{Max}\{D, e\}$. On voit que notre théorème 1.1 raffine l'exposant de $\log B$ dans cette minoration si $d_2 \geq 1$ (remarquons que nos estimations ne raffinent pas

les résultats de [P-W1] dans le cas $d_2=0$). Nos résultats améliorent aussi les énoncés dans [Bi], [F].

2. Préparatifs

1. Modifications du groupe algébrique

Nous allons modifier notre groupe algébrique \mathcal{G} en le multipliant par un groupe algébrique G_{-1} défini sur K , qui est produit de t copies du groupe additif: $G_{-1} = \mathbf{G}_a^t$. On pose $G = G_{-1} \times G_0 \times \dots \times G_k = G_{-1} \times \mathcal{G}$. Soit $\delta_{-1} = t$ la dimension de G_{-1} ; notons \exp_G (resp. $\exp_{G_{-1}}$) l'application exponentielle de G (resp. G_{-1}). On fixe un plongement de G_{-1} dans un espace projectif $\mathbb{P}_{N_{-1}}$, défini sur K et de plus une base de l'espace tangent $T_{G_{-1}}(\mathbb{C})$ de $G_{-1}(\mathbb{C})$ en l'origine, qui est défini sur K et qui identifie $T_{G_{-1}}(\mathbb{C})$ avec \mathbb{C}^t . Identifions $T_G(\mathbb{C})$ avec $T_{G_{-1}}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus T_{G_k}(\mathbb{C})$ donc avec \mathbb{C}^{d+t+1} . On considère la norme $\|\cdot\|$ induite sur chaque $T_{G_i}(\mathbb{C})$ ($-1 \leq i \leq k$) et sur $T_G(\mathbb{C})$ par les identifications via les bases des espaces tangents comme au Section 1(1). On note c_1, c_2, \dots des nombres réels positifs qui ne dépendent que des données dans chacun des paragraphes suivants, indépendants des paramètres D, B, E, V_1, \dots, V_k , et que nous pouvons théoriquement expliciter.

2. L'application exponentielle du groupe

On plonge \mathbf{G}_a et \mathbf{G}_m dans l'espace affine \mathbb{A}_1 et les groupes G_i ($d_i < i \leq k$) dans \mathbb{P}_{N_i} de la manière indiquée au Section 3(b) de [P-W2]. Pour $d_1 < i \leq k$, considérons l'exponentielle du groupe G_i , composée à droite avec ce plongement et à gauche avec l'isomorphisme entre $T_{G_i}(\mathbb{C})$ et \mathbb{C}^{δ_i} ce qui s'écrit

$$\phi_i(\mathbf{z}_i) = (\phi_{i,0}, \dots, \phi_{i,N_i}): \mathbb{C}^{\delta_i} \rightarrow \mathbb{C}^{N_i+1}$$

où $\phi_{i,j}$ sont des fonctions entières non identiquement nulles d'ordre strict inférieur ou égal à 2. Posons pour $\mathbf{z}_{-1} = (z_{-t}, \dots, z_{-1})$; $\phi_{-1}(\mathbf{z}_{-1}) = (z_{-t}, \dots, z_{-1})$, $\phi_0(\mathbf{z}_0) = z_0$, et pour $1 \leq j \leq d_1$, $\phi_j(z_j) = \exp(z_j)$. On désigne par \mathbb{P} le produit $\mathbb{A}^{d_1+t+1} \times \mathbb{P}_{N_{d_1+1}} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_k}$ et on plonge G dans \mathbb{P} de manière naturelle. Pour

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_{-1}, \dots, \mathbf{z}_k) \in \mathbb{C}^{d+t+1} \quad \text{et} \quad N = t+1+k+N_{d_1+1}+\dots+N_k,$$

on pose $\Phi(\mathbf{z}) = (\phi_{-1}(\mathbf{z}_{-1}), \dots, \phi_k(\mathbf{z}_k))$ alors l'application $\Phi: \mathbb{C}^{d+t+1} \rightarrow \mathbb{C}^N$ représente l'application exponentielle du groupe G . On considère encore une

application méromorphe; pour $d_1 < i \leq k$ et $\mathbf{z}_i \in \mathbb{C}^{\delta_i}$, il existe un indice ν_i vérifiant $0 \leq \nu_i \leq N_i$ et

$$|\phi_{i,\nu_i}(\mathbf{z}_i)| \geq \exp\{-c_1(\|\mathbf{z}_i\| + 1)^{\rho_i}\} \quad (\text{cf. (3.1) de [H2]}).$$

Pour cette indice, posons

$$\psi_{i,\nu_i} = \left(\frac{\phi_{i,0}}{\phi_{i,\nu_i}}, \dots, 1, \dots, \frac{\phi_{i,N_i}}{\phi_{i,\nu_i}} \right) : \mathbb{C}^{\delta_i} \rightarrow \mathbb{C}^{N_i+1}$$

qui est une application méromorphe ($d_1 < i \leq k$).

Notons $\psi_{-1}(\mathbf{z}_{-1}) = (z_{-t}, \dots, z_{-1})$, $\psi_0(z_0) = z_0$ et pour $1 \leq j \leq d_1$, $\psi_j(z_j) = \exp(z_j)$. Pour

$$\mathbf{v} = (\nu_{d_1+1}, \dots, \nu_k) \in \mathbb{Z}^{k-d_1} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \nu_i \leq N_i,$$

on définit une application méromorphe de \mathbb{C}^{d+t+1} dans \mathbb{C}^N par

$$\Psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) = (\psi_{-1}(\mathbf{z}_{-1}), \dots, \psi_{k,\nu_k}(\mathbf{z}_k)). \quad (2.1)$$

Étant donné un corps R , nous notons $R[\mathbb{P}]$ l'algèbre des coordonnées de \mathbb{P} sur R , qui est formée des polynômes à coefficients dans R , en N variables $X_{-t}, \dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_{d_1}, \mathbf{X}_{d_1+1}, \dots, \mathbf{X}_k$ avec $\mathbf{X}_i = (X_{i,0}, \dots, X_{i,N_i})$, homogènes en les N_i+1 variables pour $d_1 < i \leq k$. Notons $\mathbf{X}_{-1} = (X_{-t}, \dots, X_{-1})$. Ainsi un tel polynôme P a des degrés partiels L_{-1}, \dots, L_k , le paramètre L_{-1} désignant le degré maximum par rapport aux t variables X_{-t}, \dots, X_{-1} . On associe à P une fonction $F = P(\Phi)$ de \mathbb{C}^{d+t+1} dans \mathbb{C} .

3. Majorations analytiques

Nous utilisons le symbole de dérivations $D_{\mathbf{x}}$ pour l'espace de dimension $d+t+1$, et la notation $D_{\mathbf{x}}^t$ avec $h=d+1$, définis dans le Section 3(3) de [H2]. Pour une fonction analytique au voisinage d'un point \mathbf{z} de \mathbb{C}^n , la notion de zéro en \mathbf{z} d'ordre $\geq T$ (ou d'ordre exact T) le long d'un sous-espace de \mathbb{C}^n est aussi définie dans le Section 3(3) de [H2].

Pour la fonction Φ que l'on a définie, nous avons l'estimation analytique suivante.

LEMME 2.2. *Il existe un nombre réel $c_2 > 0$ ne dépendant que de d, t , des plongements des G_i , des bases des espaces tangents des G_i ($-1 \leq i \leq k$) et de l'application Φ ayant la propriété suivante. Soient L_{-1}, L_0, \dots, L_k des nombres réels ≥ 0 . Soit $P \in \mathbb{C}[\mathbb{P}]$ un élément non nul de degrés $\leq (L_{-1}, \dots, L_k)$ dont les*

coefficients complexes sont de modules $\leq H$ avec $H \geq e$. Pour $1 \leq i \leq d+1$, soient

$$\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_{i,-1}, \mathbf{x}_{i,0}, \dots, \mathbf{x}_{i,k}) = (x_{i,-t}, \dots, x_{i,d_1}, \mathbf{x}_{i,d_1+1}, \dots, \mathbf{x}_{i,k})$$

des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ identifié à \mathbb{C}^{d+t+1} . Soit

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1} \quad \text{avec} \quad t_1, \dots, t_{d+1} \geq 0.$$

Posons

$$D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} = D_{\mathbf{x}_1}^{t_1} \circ \dots \circ D_{\mathbf{x}_{d+1}}^{t_{d+1}},$$

$$\xi = \text{Max}_{1 \leq i \leq d+1, -1 \leq j \leq k} (1, \|\mathbf{x}_{i,j}\|).$$

Soient $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_{-1}, \dots, \mathbf{v}_k) = (v_{-t}, \dots, v_d)$ avec $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^{\delta_i}$ ($-1 \leq i \leq k$) et T un entier ≥ 1 .

Notons $|\mathbf{t}| = t_1 + \dots + t_{d+1}$ et $F = P(\Phi)$. Alors pour $|\mathbf{t}| = T$, on a;

$$\log |D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} F(\mathbf{v})| \leq c_2 \left\{ \log H + \sum_{j=-1}^0 L_j \log \text{Max}(1, \|\mathbf{v}_j\|) + T \log(\xi T) + \sum_{i=1}^k L_i (\|\mathbf{v}_i\| + 1)^{\rho_i} \right\}.$$

DEMONSTRATION DU LEMME 2. L'énoncé vient du lemme 3.4 de [H2].

□

4. Modifications du point et des formes linéaires

Le lemme suivant est le lemme clef pour notre raffinement. Ce lemme est un peu différent du lemme 4.1 dans [H2] car on est obligé de choisir un même nouveau point pour toutes les formes linéaires simultanément.

LEMME 2.3. Pour démontrer le théorème 1.1, on peut supposer $d \geq 1$ donc $k \geq 1$. De plus, pour $1 \leq \tau \leq t$, il existe des formes linéaires L_{τ} sur $T_G(\mathbb{C})$ et un point $\mathbf{u} \in T_G(\mathbb{C})$ ayant les propriétés suivantes.

(i) $L_{\tau}(\mathbf{z}) = -z_{\tau-1-t} + \sum_{i=0}^d \beta'_{i,\tau} z_i$ ($1 \leq \tau \leq t$) avec $\beta'_{i,\tau} \in K$, $|\beta'_{i,\tau}| \leq 1$ et $h(\beta'_{i,\tau}) \leq 2 \log B$ ($1 \leq \tau \leq t$, $0 \leq i \leq d$).

(ii) Pour tout $1 \leq \tau \leq t$, les coefficients $\beta'_{1,\tau}, \dots, \beta'_{d,\tau}$ ne sont pas tous nuls.

(iii) Pour tout $1 \leq \tau \leq t$, on a $|L_{\tau}(\mathbf{u})| \neq 0$ si et seulement si $|\mathcal{L}_{\tau}(\mathbf{v})| \neq 0$ et on se ramène à minorer $\text{Max}_{1 \leq \tau \leq t} |L_{\tau}(\mathbf{u})|$ au lieu de $\text{Max}_{1 \leq \tau \leq t} |\mathcal{L}_{\tau}(\mathbf{v})|$ pour démontrer le théorème.

(iv) En notant $W = \bigcap_{\tau} \text{Ker } L_{\tau} \subset T_G(\mathbb{C})$, pour tout sous-groupe algébrique G' de G tel que $\mathbf{u} \in T_{G'}(\mathbb{C})$, on a $T_{G'}(\mathbb{C}) + W = T_G(\mathbb{C})$.

(v) Aucun des deux espaces $T_{G_{-1}}(\mathbb{C})$ et $T_{G_1 \times \dots \times G_k}(\mathbb{C})$ n'est contenu dans W , par conséquent, $W \neq T_G(\mathbb{C})$.

DEMONSTRATION DU LEMME 2.3. Pour chaque τ avec $1 \leq \tau \leq t$, les coefficients des \mathcal{L}_{τ} appartenant à K ne sont pas tous nuls par hypothèse. Le point $\mathbf{v} = (1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ a été défini dans les hypothèses du théorème 1.1 et on a posé

$$\mathcal{L}_{\tau}(\mathbf{v}) = \beta_{0,\tau} + \beta_{1,\tau}u_1 + \dots + \beta_{d,\tau}u_d.$$

Si l'existe un indice τ , $1 \leq \tau \leq t$ tel que les nombres $\beta_{1,\tau}, \dots, \beta_{d,\tau}$ soient tous nuls, alors l'énoncé du théorème 1.1 est banal à cause de l'inégalité de Liouville (cf. par exemple le lemme 3 de [M-W]) qui montre:

$$\log |\beta_{0,\tau}| > -c_3 D \log B, \quad \text{quand } \beta_{0,\tau} \neq 0.$$

Ainsi on peut supposer que pour tout $1 \leq \tau \leq t$ les coefficients $\beta_{1,\tau}, \dots, \beta_{d,\tau}$ ne sont pas tous nuls. De même, si $d = 0$, alors le théorème est banal; ainsi on se ramène à supposer $d \geq 1$ donc $k \geq 1$.

Posons

$$\mathbf{u}_{-1} = (u_{-t}, \dots, u_{-1}) = (0, \dots, 0) \in T_{G_{-1}}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_0 = (1) \in T_{G_0}(\mathbb{C}).$$

On définit un point $\mathbf{u} \in T_G(\mathbb{C})$ par $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{-1}, \mathbf{v})$. Ainsi on a $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{-1}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$.

Pour $1 \leq \tau \leq t$, choisissons un indice $m = m(\tau)$, $0 \leq m \leq d$ tel que $|\beta_{m,\tau}| = \text{Max}\{|\beta_{i,\tau}|; 0 \leq i \leq d\}$. Grâce aux hypothèses du théorème, on a

$$\begin{aligned} \beta_{m,\tau} \neq 0 \quad \text{et} \quad |\mathcal{L}_{\tau}(\mathbf{v})| \\ = |\beta_{m,\tau}| \cdot \left| 0 + \frac{\beta_{0,\tau}}{\beta_{m,\tau}} + \frac{\beta_{1,\tau}}{\beta_{m,\tau}}u_1 + \dots + \frac{\beta_{d,\tau}}{\beta_{m,\tau}}u_d \right|. \end{aligned}$$

On note $\beta'_{i,\tau} = \beta_{i,\tau}/\beta_{m,\tau}$ ($0 \leq i \leq d$). Maintenant, nous définissons t formes linéaires L_1, \dots, L_t sur $T_G(\mathbb{C})$ en posant

$$L_{\tau}(\mathbf{z}) = -z_{\tau-1-t} + \sum_{i=0}^d \beta'_{i,\tau} z_i \quad (1 \leq \tau \leq t)$$

pour

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_{-1}, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k) = (z_{-t}, \dots, z_d) \in T_G(\mathbb{C});$$

ainsi nous avons

$$L_\tau(\mathbf{u}) = \mathcal{L}_\tau(\mathbf{v})/\beta_{m,\tau} \quad (1 \leq \tau \leq t).$$

Par conséquent, on obtient $|\beta'_{i,\tau}| \leq 1$ et $h(\beta'_{i,\tau}) \leq 2 \log B$ pour tout $0 \leq i \leq d$, en utilisant les propriétés de la hauteur logarithmique absolue (voir par exemple la page 7 de [Y]). Les propriétés (i), (ii) et (v) du lemme sont donc démontrées. Par définition de la nouvelle forme linéaire $L_\tau(\mathbf{z})$, nous avons, pour $1 \leq \tau \leq t$, $L_\tau(\mathbf{u}) \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{L}_\tau(\mathbf{v}) \neq 0$. L'inégalité de Liouville appliquée à $\beta_{m,\tau} \neq 0$ donne

$$\text{Max}_{1 \leq \tau \leq t} \log |\mathcal{L}_\tau(\mathbf{v})| \geq -c_4 D \log B + \text{Max}_{1 \leq \tau \leq t} \log |L_\tau(\mathbf{u})|,$$

d'où la propriété (iii).

Nous allons démontrer (iv). Quand G' est un sous-groupe algébrique de G tel que $\mathbf{u} \in T_{G'}$, posons

$$G'_1 = \exp_G \{ T_{G'} \cap (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathcal{G}}) \} \quad \text{avec} \quad \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in T_{G_{-1}}.$$

On a $G'_1 = G' \cap (\{\mathbf{0}\} \times \mathcal{G})$ car l'application exponentielle est surjective (voir par exemple [S]). Il existe alors un sous-groupe algébrique \mathcal{G}' de \mathcal{G} tel que $G'_1 = \{\mathbf{0}\} \times \mathcal{G}'$. Nous obtenons $\mathbf{v} \in T_{\mathcal{G}'}$ car $\mathbf{u} = (\mathbf{0}, \mathbf{v})$, donc l'hypothèse (1.6) montre $T_{\mathcal{G}'} + \mathcal{W} = T_{\mathcal{G}'}$ ce qui implique $T_{\mathcal{G}'}/\mathcal{W} \simeq T_{\mathcal{G}'}/(T_{\mathcal{G}'} \cap \mathcal{W})$. Nous en déduisons

$$\dim T_{\mathcal{G}'} - \dim T_{\mathcal{G}'} \cap \mathcal{W} = t. \tag{2.4}$$

D'autre part, par définition de W , on vérifie

$$\{\mathbf{0}\} \oplus \mathcal{W} = W \cap (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathcal{G}}),$$

alors

$$(T_{G'} \cap W) \cap (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathcal{G}}) = \{\mathbf{0}\} \oplus (T_{\mathcal{G}'} \cap \mathcal{W}),$$

d'où

$$\{(T_{G'} \cap W) + (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathcal{G}})\} / (T_{G'} \cap W) \simeq T_{\mathcal{G}'}/(T_{\mathcal{G}'} \cap \mathcal{W}). \tag{2.5}$$

Les relations (2.4), (2.5) fournissent

$$\dim\{(T_{G'} \cap W) + (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathcal{G}})\} = \dim(T_{G'} \cap W) + t,$$

en conséquence,

$$\dim T_{G'} \geq \dim(T_{G'} \cap W) + t. \tag{2.6}$$

On combine l'inégalité (2.6) avec l'isomorphisme $(T_{G'} + W)/W \simeq T_{G'}/(T_{G'} \cap W)$ pour obtenir $\dim(T_{G'} + W) \geq \dim W + t$, c'est-à-dire $\dim(T_{G'} + W) \geq \dim T_G$ ce qui achève d'établir la démonstration de propriété (iv). \square

REMARQUE 2.7. On explique ici la motivation de la modification du groupe dans le Section 2(1). Le lemme 2.3 permettra de choisir la base e définie dans le Section 3(3), dont les modules des coordonnées sont ≤ 1 . La fonction $F(\mathbf{z})$ est polynomiale en z_{-t}, \dots, z_{-1} , donc toute dérivée par rapport à ces variables d'ordre supérieur au degré L_{-1} est nulle; par conséquent, dans la dérivation

$$D_e^t F(\mathbf{su}) = \left(\beta'_{0,1} \frac{\partial}{\partial z_{-t}} + \dots + \beta'_{0,t} \frac{\partial}{\partial z_{-1}} + \frac{\partial}{\partial z_0} \right)^{t_1} \circ \dots \circ \left(\beta'_{d,1} \frac{\partial}{\partial z_{-t}} + \dots + \beta'_{d,t} \frac{\partial}{\partial z_{-1}} + \frac{\partial}{\partial z_d} \right)^{t_{d+1}} F(\mathbf{z})|_{\mathbf{z} = \mathbf{su}}$$

le degré total de tous $\beta'_{i,\tau}$ ($0 \leq i \leq d, 1 \leq \tau \leq t$) est inférieur ou égal à $c_5 L_{-1}$. Cette astuce avec le fait $|\beta'_{i,\tau}| \leq 1$ nous apporte le raffinement de ce papier. Les vecteurs e_j ($1 \leq j \leq d+1-t$) de la base de W définie dans la page 323 de [P-W1] possèdent t coordonnées qui font intervenir les $\beta_{i,\tau}$, donc pour utiliser l'astuce dessus, d'abord il faut mettre au moins t facteurs \mathbf{G}_a au groupe \mathcal{G} , ensuite, on doit ajouter un autre facteur \mathbf{G}_a pour avoir $|\beta'_{i,\tau}| \leq 1$ ($0 \leq i \leq d, 1 \leq \tau \leq t$). Même si nous ajoutons plus de $t+1$ facteurs \mathbf{G}_a , la minoration reste la même que le cas pour $\mathbf{G}_a^{t+1} \times \mathcal{G}$, ainsi la modification du Section 2(1) est celle qui est la plus convenable.

Le point \mathbf{u} doit être défini de sorte qu'il vérifie le lemme 2.3(iii) et (iv). On prend ici \mathbf{u} qui est le plus simple satisfaisant ces conditions.

3. Démonstration du théorème 1.1

À partir de maintenant, on travaille sur le point, les formes linéaires et le groupe G de dimension $d+t+1$, avec $d \geq 1$, introduits dans le Section 2(1) et lemme 2.3. Pour simplifier les notations, on écrira $\beta_{i,\tau}$ au lieu de $\beta'_{i,\tau}$ ($0 \leq i \leq d, 1 \leq \tau \leq t$), $\beta_{\tau-1-t,\tau} = -1$

et

$$\beta_{-t,\tau} = \dots = \beta_{\tau-2-t,\tau} = \beta_{\tau-t,\tau} = \dots = \beta_{-1,\tau} = 0$$

dans la définition de $L_\tau(\mathbf{z})$; ainsi

$$L_\tau(\mathbf{z}) = \sum_{i=-t}^d \beta_{i,\tau} z_i = -z_{\tau-1-t} + \sum_{i=0}^d \beta_{i,\tau} z_i \quad (1 \leq \tau \leq t).$$

On choisit un nombre réel $C_0 > 0$ assez grand, beaucoup plus grand que tous les autres nombres réels c_1, c_2, \dots , mais indépendant des paramètres D, B, V_1, \dots, V_k, E . Notons $V_0 = \text{Min}\{V_i; 1 \leq i \leq k\}$.

1. Choix de paramètres

CHOIX 3.1. En notant $[\]$ la partie entière, on pose,

$$S = [C_0^5 D(\log \log B + \log(DE)) / (\log E)]$$

$$S_0 = [S / (C_0^2)]$$

$$U_0 = \text{Max} \left\{ C_0^{(4d+5d_2+8)/t+5} D^{(d+d_2+1)/t+1} (\log B + \log(DE)) \cdot \left(\frac{\log \log B + \log D}{\log E} + 1 \right)^{(d_2+1)/t} \left(\prod_{i=1}^k (\log V_i)^{\delta_i/t} \right) (\log E)^{-d/t}, C_0^5 D^2 (\log(BV)) \right\}.$$

Soit $U > 0$ un nombre réel; posons encore

$$L_{-1} = [L_{-1}^*] \quad \text{et} \quad L_{-1}^* = U / (C_0^5 D(\log B + \log(DE)))$$

$$L_0 = [L_0^*] \quad \text{et} \quad L_0^* = U / (S \log E)$$

$$L_i = [L_i^*] \quad \text{et} \quad L_i^* = U / (DS^{\rho_i} \log V_i) \quad (1 \leq i \leq k).$$

Pour $U' = \text{Max}\{U, U_0\}$, posons

$$T = [T^*] \quad \text{et} \quad T^* = U' / (C_0 D(\log \log B + \log(DE)))$$

$$T_0 = [T / (C_0^2)].$$

Ce choix est très différent de celui de [P-W1]. Pour $t = 1$, on retrouve [H2] sauf le paramètre U_0 .

Notons $\Gamma(S) = \{\exp_G(s\mathbf{u}); s \in \mathbb{Z}, 0 \leq s < S\}$. Pour exprimer le degré d'un sous-groupe, nous utilisons la notation du polynôme d'Hilbert-Samuel expliquée dans [P].

PROPOSITION 3.2. *Il existe un nombre réel $U > 0$ pour le choix 3.1 ayant les propriétés suivantes:*

$$U \leq U_0 \quad \text{donc} \quad U' = U_0. \quad (3.3)$$

(3.4) *Pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G vérifiant $T_{G'} + W \neq T_G$, en notant $\sigma = \dim W/W \cap T_{G'}$, on a;*

$$\begin{aligned} (T^\#)^\sigma \text{card}((\Gamma(S) + G')/G') \cdot H(G'; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#) \\ \geq C_0 H(G; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#). \end{aligned}$$

(3.5) *Il existe un sous-groupe algébrique connexe \tilde{G} de G vérifiant $T_{\tilde{G}} + W \neq T_G$, tel que, en notant $\tilde{\sigma} = \dim W/W \cap T_{\tilde{G}}$, on ait;*

$$\begin{aligned} (T^\#)^{\tilde{\sigma}} \text{card}((\Gamma(S) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot H(\tilde{G}; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#) \\ = C_0 H(G; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#). \end{aligned}$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2. Quand G' est un sous-groupe algébrique connexe de G tel que $T_{G'} + W \neq T_G$, on note $r = \dim(G/G')$ et $\sigma = \dim W/W \cap T_{G'}$; on remarque que l'on a $r > \sigma$ et on pose

$$\begin{aligned} A(G') = \left\{ C_0^{-1} (T^\#/U)^\sigma \text{card}((\Gamma(S) + G')/G') \right. \\ \left. \frac{H(G'; L_{-1}^\#/U, \dots, L_k^\#/U)}{H(G; L_{-1}^\#/U, \dots, L_k^\#/U)} \right\}^{1/(r-\sigma)} \end{aligned}$$

et

$$B(G') = A(G')^{(r-\sigma)/r} \cdot \text{Max}\{A(G'), U_0\}^{\sigma/r}.$$

On voit que $A(G')$ dépend de G' mais est indépendant de U . Parmi tous les sous-groupes algébriques connexes G' de G vérifiant $T_{G'} + W \neq T_G$, on en choisit un \tilde{G} tel que la quantité $B(\tilde{G})$ soit minimale, c'est-à-dire $B(\tilde{G}) \leq B(G')$. On pose $U = B(\tilde{G})$. Par définition de $A(G')$ et de U_0 , on a

$$A(0) \leq \left\{ \frac{(T^\#/U)^{d+1} \cdot S}{C_0 (L_{-1}^\#/U)^{\delta_{-1}} \dots (L_k^\#/U)^{\delta_k}} \right\}^{1/r} \leq U_0,$$

donc on en déduit $B(0) \leq U_0$. Comme $U \leq B(0)$, on obtient la propriété (3.3).

Dans la définition de $A(G')$, le quotient des deux fonctions H est homogène

(voir la propriété 4.4 de [H2]), ainsi (3.3) fournit

$$A(G)^{r-\sigma} \cdot U_0^\sigma / U^r = \frac{(T^\#)^\sigma \text{card}((\Gamma(S) + G')/G') \cdot H(G'; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)}{C_0 H(G; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)}.$$

Nous allons démontrer (3.4) et (3.5) en utilisant cette égalité. Si $A(G') \geq U_0$ alors $A(G)^{r-\sigma} \cdot U_0^\sigma \geq U_0^r \geq U^r$ d'après (3.3), et si $A(G') < U_0$ alors on a $U^r \leq B(G)^r = A(G)^{r-\sigma} \cdot U_0^\sigma$, ainsi on a toujours $U^r \leq A(G)^{r-\sigma} \cdot U_0^\sigma$, ce qui établit (3.4). La définition de U et (3.3) impliquent pour $\tilde{r} = \dim(G/\tilde{G})$;

$$A(\tilde{G})^{\tilde{r}-\tilde{\sigma}} \cdot \text{Max}\{A(\tilde{G}), U_0\}^{\tilde{\sigma}} = U^{\tilde{r}} \leq U_0^{\tilde{r}}, \quad \text{d'où} \quad A(\tilde{G}) \leq U_0,$$

donc

$$U^{\tilde{r}} = B(\tilde{G})^{\tilde{r}} = A(\tilde{G})^{\tilde{r}-\tilde{\sigma}} \cdot U_0^{\tilde{\sigma}}.$$

Nous en déduisons alors (3.5) □

PROPRIETE 3.6. *On a les relations suivantes:*

- (i) $DL_{-1} \log \text{Max}\{B, L_{-1}, S\} \leq C_0^{-1}U$
- (ii) $DL_0 \log \text{Max}\{L_0, S\} \leq C_0^{-1}U$
- (iii) $DL_i S^{\rho_i} \log V_i \leq c_6 U \quad (1 \leq i \leq k)$
- (iv) $DT \log T \leq C_0^{-4/5}U_0$
- (v) $L_i \leq L_i^\# \leq c_7 U / (S \log E) \quad (-1 \leq i \leq k)$
- (vi) $C_0^2 U_0 / c_8 \leq T_0 S \log E \leq c_8 C_0^2 U_0$
 $C_0^2 U_0 / c_8 \leq T S_0 \log E \leq c_8 C_0^2 U_0$
- (vii) $T^\# \geq C_0 L_i^\# \quad (-1 \leq i \leq k)$
- (viii) $S_0 \geq C_0^2$
- (ix) $T_0 \geq C_0$
- (x) $L_{-1}^\# \leq L_0^\#$
- (xi) $\mathbf{u} \notin T_{\tilde{G}}(\mathbb{C})$.

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.6. Le choix 3.1 joint à l'hypothèse (1.2) entraîne les estimations (i), (ii) et (iv). Le choix 3.1 et la propriété 4.2 de [H2] impliquent les inégalités (v) et (vii). Grâce au lemme 2.3(iv) avec le choix de \tilde{G} vérifiant $T_{\tilde{G}} + W \neq T_G$, on obtient (xi). Les autres relations sont immédiates □

2. *Les deux cas*

Notons $\Omega = \text{Ker exp}_G$. Pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $1 \leq s < S$, si l'on a $s\mathbf{u} \notin \Omega + T_{\tilde{G}}$ alors on dit que l'on est dans le cas non périodique. S'il existe un $s_0 \in \mathbb{Z}$, $1 \leq s_0 < S$ tel que $s_0\mathbf{u} \in \Omega + T_{\tilde{G}}$ alors on dit que l'on est dans le cas périodique. On note aussi

$$\Xi = \{(t, s) \in \mathbb{Z}^{d+2}, 0 \leq t_i < 2T \ (1 \leq i \leq d+1), 0 \leq s < S_0\},$$

$$S_1 = S_0, \quad T_1 = T$$

pour le cas non périodique et

$$\Xi = \{(t, s) \in \mathbb{Z}^{d+2}, 0 \leq t_i < T \ (1 \leq i \leq d), 0 \leq t_{d+1} < T_0, 0 \leq s < S\},$$

$$S_1 = S, \quad T_1 = T_0$$

pour le cas périodique. Notons encore $\delta = \dim(T_{\tilde{G}} \cap W) = d+1 - \tilde{\sigma}$.

3. *Base du sous-espace W*

On munit W de la base, pour $0 \leq i \leq d$;

$$\mathbf{e}_{i+1} = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,t}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

où 1 est la $(i+t+1)$ -ième coordonnée dans \mathbb{C}^{d+t+1} . Remarquons que grâce au lemme 2.3(i), on a $\|\mathbf{e}_i\| \leq \sqrt{4t+1}$ ($1 \leq i \leq d+1$). Posons

$$\mathbf{w} = \left(\sum_{j=0}^d \beta_{j,1} u_j, \dots, \sum_{j=0}^d \beta_{j,t} u_j, u_0, \dots, u_d \right).$$

Nous en déduisons

$$\mathbf{w} \in W \quad \text{et} \quad \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| = \left(\sum_{1 \leq \tau \leq t} |L_\tau(\mathbf{u})|^2 \right)^{1/2}.$$

On peut estimer les coordonnées de \mathbf{w} :

$$\left| \sum_{0 \leq j \leq d} \beta_{j,\tau} u_j \right| = |L_\tau(\mathbf{u})| \quad (1 \leq \tau \leq t) \quad (3.7)$$

grâce au lemme 2.3, et

$$|u_i| \leq c_9 D \log V \quad (-t \leq i \leq d)$$

par hypothèse (1.4).

On note ι l'isomorphisme entre W et \mathbb{C}^{d+1} associé à la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1})$:

$$\iota: a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_{d+1} \mathbf{e}_{d+1} \mapsto (a_1, \dots, a_{d+1}).$$

Notons aussi (\cdot, \cdot) le produit hermitien canonique sur \mathbb{C}^{d+1} et $|\cdot| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ la norme associée. Nous allons choisir une autre base de W . Soit $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{d+1})$ une base de $\iota(W)$ orthonormée par rapport à $|\cdot|$ de telle sorte que $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_d)$ soit une base de $\iota(T_{\tilde{G}} \cap W)$. Posons $\tilde{\mathbf{e}}_i = \iota^{-1}(\mathbf{e}'_i)$ pour $1 \leq i \leq d+1$. On voit que $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d$ forment une base de $T_{\tilde{G}} \cap W$, $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{d+1})$ forme une base de W .

PROPRIETE 3.8. *Les coordonnées des matrices de passage entre*

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{d+1})$$

sont de modules ≤ 1 .

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.8. La matrice de passage entre $\iota(\mathbf{e})$ et \mathbf{e}' est unitaire. \square

Désormais, on identifie W à \mathbb{C}^{d+1} par ι ; on ne distingue donc plus \mathbf{e}' et $\tilde{\mathbf{e}}$.

Dorénavant, pour démontrer notre théorème par l'absurde, on suppose;

HYPOTHESE 3.9. $\text{Max}_{1 \leq t \leq t} |L_t(\mathbf{u})| < \exp(-C_0^3 U_0)$.

PROPRIETE 3.10. *Pour le sous-groupe \tilde{G} dans (3.5), on a les propriétés suivantes.*

(i) $H(\tilde{G}; 1, \dots, 1) \leq c_{10} C_0 U_0^{d+t+1}$.

(ii) *Notons*

$$d(\mathbf{u}, T_{\tilde{G}} \cap W) = \text{Min}\{\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|; \mathbf{x} \in T_{\tilde{G}} \cap W\}.$$

Supposons que nous sommes dans le cas périodique. Alors

$$d(\mathbf{u}, T_{\tilde{G}} \cap W) \geq c_{11} / (C_0 S U_0^{d+t+1}).$$

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.10. La propriété 4.4 de [H2] avec (3.3) montre l'estimation (i) de la même manière que la propriété 5.16 de [P-W2]. On va montrer (ii). En utilisant les notations de [P], on a $\text{deg } \tilde{G} \leq c_{12} H(\tilde{G}; 1, \dots, 1)$. D'autre part, comme on est dans le cas périodique, il existe une période $\omega \in \Omega$, vérifiant $\omega \notin T_{\tilde{G}}$ grâce à la propriété 3.6(xi), telle que $d(s_0 \mathbf{u}, T_{\tilde{G}}) = d(\omega, T_{\tilde{G}})$. Le corollaire 2 de [B-P] (cf. (5.2) de [P-W2]) entraîne donc

$d(\omega, T_{\tilde{G}}) \geq c_{13}/(\deg \tilde{G})$. Ainsi on en déduit

$$d(\mathbf{u}, T_{\tilde{G}} \cap W) \geq d(\mathbf{u}, T_{\tilde{G}}) \geq c_{14}/(S \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1)).$$

L'estimation (i) fournit l'énoncé (ii). □

Ensuite, on a l'énoncé suivant.

PROPRIETE 3.11. *Dans le cas périodique, on a*

$$\mathbf{w} \notin T_{\tilde{G}} \cap W$$

donc on a $T_{\tilde{G}} \cap W \neq W$ et $\tilde{\sigma} \geq 1$.

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.11. Grâce à l'égalité

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| = \left(\sum_{1 \leq \tau \leq t} |L_\tau(\mathbf{u})|^2 \right)^{1/2},$$

il suffit de reprendre la démonstration de la propriété 4.15 de [H2]. □

Dans le cas périodique, on renumérote $\tilde{\mathbf{e}}_{\delta+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{d+1}$, de telle sorte que, en écrivant $\mathbf{w} = w_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \dots + w_{d+1} \tilde{\mathbf{e}}_{d+1}$, on ait $|w_{d+1}| \geq \text{Max}\{|w_i|; \delta + 1 \leq i \leq d\}$; alors la propriété 3.11 montre $w_{d+1} \neq 0$; elle montre aussi que les éléments $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d, \mathbf{w})$ forment une base de W . Notons

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d+1}) = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d, \mathbf{w})$$

dans le cas périodique.

Considérons la norme $|\cdot|$ que l'on a définie avant la propriété 3.8, alors;

LEMME 3.12. *Pour tout $\mathbf{x} \in W$, nous avons*

$$|\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{x}\| \leq (4t(d+1)+1)^{1/2}.$$

DEMONSTRATION DU LEMME 3.12. En rappelant les définitions des \mathbf{e}_i et des normes $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, on obtient pour

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d+1} a_i \mathbf{e}_i,$$

les égalités

$$|\mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^{d+1} |a_i|^2 \right)^{1/2}$$

et

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{1 \leq \tau \leq t} \left| \sum_{i=1}^{d+1} a_i \cdot \beta_{i-1, \tau} \right|^2 + \sum_{i=1}^{d+1} |a_i|^2 \right)^{1/2}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne pour tout $1 \leq \tau \leq t$,

$$\left| \sum_{i=1}^{d+1} a_i \cdot \beta_{i-1, \tau} \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{d+1} |a_i|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^d |\beta_{j, \tau}|^2 \right).$$

Le lemme 2.3(i) fournit donc l'énoncé. □

PROPOSITION 3.13. *Dans le cas périodique, nous avons*

$$|w_{d+1}| \geq c_{15} / (C_0 S U_0^{d+t+1}).$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.13. Pour la norme $|\cdot|$, on note

$$\delta(\mathbf{w}, T_{\tilde{G}} \cap W) = \text{Min}\{|\mathbf{w} - \mathbf{x}| : \mathbf{x} \in T_{\tilde{G}} \cap W\}$$

qui est strictement positif par la propriété 3.11. L'hypothèse 3.9 et la proposition 3.10 fournissent

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| - \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| \geq c_{16} / (C_0 S U_0^{d+t+1})$$

pour tout $\mathbf{x} \in T_{\tilde{G}} \cap W$. Le lemme 3.12 implique avec $\mathbf{w} - \mathbf{x} \in W$;

$$\delta(\mathbf{w}, T_{\tilde{G}} \cap W) \geq c_{17} / (C_0 S U_0^{d+t+1}).$$

Par définition de w_{d+1} , on obtient l'énoncé. □

Dans le cas non périodique, on pose aussi

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d+1}) = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{d+1}).$$

PROPOSITION 3.14. *Soient $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{d+t+1}$ et f une fonction complexe analytique au voisinage de \mathbf{z} . Dans chacun des deux cas, non périodique et périodique, on a les deux majorations suivantes:*

$$\log \text{Max}_{|t| \leq T} |D_{\mathbf{f}}^t f(\mathbf{z})| \leq \log \text{Max}_{|t| \leq T} |D_{\tilde{\mathbf{e}}}^t f(\mathbf{z})| + c_{18} C_0^{-4/5} U_0,$$

$$\log \text{Max}_{|t| \leq T} |D_{\tilde{\mathbf{e}}}^t f(\mathbf{z})| \leq \log \text{Max}_{|t| \leq T} |D_{\mathbf{f}}^t f(\mathbf{z})| + c_{18} C_0^{-4/5} U_0.$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.14. Dans le cas non périodique, l'énoncé est immédiat par le lemme 3.1 de [P-W2] grâce à la propriété 3.8. Dans le cas périodique, les coefficients des matrices de passage entre \mathbf{f} et $\tilde{\mathbf{e}}$ sont

$$w_i \ (1 \leq i \leq d+1), \ 1, \ -w_i/w_{d+1} \ (1 \leq i \leq d+1).$$

Pour tout $1 \leq i \leq d+1$, on a

$$|w_i| \leq c_{19}(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|).$$

Par définition de \mathbf{u} dans le lemme 2.3 avec la deuxième estimation de (3.7), on obtient, en utilisant l'hypothèse 3.9, que $|w_i|$ est majoré par $c_{20}D \log V$ pour tout $1 \leq i \leq d+1$. Nous avons donc, avec le choix 3.1, l'estimation (3.3), l'hypothèse (1.2) et la proposition 3.13:

$$T \log \operatorname{Max}_{1 \leq i \leq d+1} (|w_i|, |w_i/w_{d+1}|, |1/w_{d+1}|) \leq c_{21}C_0^{-4/5}U_0.$$

Pour passer de la base $\tilde{\mathbf{e}}$ à la base \mathbf{e} , on utilise la propriété 3.8. Le lemme 3.1 de [P-W2] permet d'achever la démonstration. \square

4. Base du corps de nombres K

Par hypothèse, le groupe G_i , la base de T_{G_i} , le plongement de G_i dans \mathbb{P}_{N_i} et les coordonnées projectives du point $\exp_{G_i}(\mathbf{u}_i)$ sont définis sur le corps K pour tout $-1 \leq i \leq k$. Soit $\{\beta_1, \dots, \beta_M\}$ un système de générateurs de K sur \mathbb{Q} qui contient tous les coefficients de nos formes linéaires. On prend maintenant une base de K sur \mathbb{Q} ; $\{\xi_1 = 1, \xi_2, \dots, \xi_D\}$ formée d'éléments de l'ensemble

$$\left\{ \prod_{i=1}^M \beta_i^{a_i}; \ 0 \leq a_i < [\mathbb{Q}(\beta_i) : \mathbb{Q}], \ 1 \leq i \leq M, \ a_1 + \dots + a_M < D \right\}$$

(cf. le Section 4.2 de [M-W]).

PROPRIETE 3.15. Pour la base $\{\xi_1, \dots, \xi_D\}$ ainsi définie, on a

$$h(1, \xi_1, \dots, \xi_D) \leq C_0^{-3}U_0/D \quad \text{et} \quad \operatorname{Max}\{\log |\xi_i|; \ 1 \leq i \leq D\} \leq C_0^{-3}U_0.$$

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.15. La définition de U_0 implique

$$h(1, \xi_1, \dots, \xi_D) \leq C_0 D \log(BV) \leq C_0^{-4}U_0/D,$$

d'où la première inégalité. On en déduit la deuxième estimation en utilisant la relation (1.1.11) de [W]. \square

REMARQUE 3.16. Comme on a besoin de la propriété 3.15 dans l'estimation (3.20) donc dans le lemme 3.24 pour avoir la proposition 3.25, on doit mettre le terme $C_0^5 D^2 \log(BV)$ dans la définition de U_0 (voir aussi le Section 4(2)(c) ci-dessous).

5. Construction de la fonction auxiliaire

Notons $L_i^b = \text{Max}(1, L_i)$ pour $-1 \leq i \leq k$.

PROPRIETE 3.17. À chaque polynôme P dans $K[\mathbb{P}]$, ayant des degrés $\leq (L_{-1}, \dots, L_k)$, on associe la fonction $F = P(\Phi)$. Considérons le système d'équations linéaires;

$$D_t^! F(su) = 0, \quad (t, s) \in \Xi, \tag{3.18}$$

où les coefficients de P sont des inconnues. Notons ρ le rang de ce système et v le nombre d'inconnues dans \mathbb{Z} . Alors on a

$$\rho \leq c_{22} C_0^{-1} H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b) \quad \text{et} \quad v \geq c_{23} D \cdot H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b).$$

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.17. Le lemme 6.7 de [P-W2] implique que le système (3.18) est de rang majoré par

$$c_{24} T^{\tilde{\sigma}} \text{card}((\Gamma(S_0) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot H(\tilde{G}; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)$$

dans le cas non périodique, et par

$$c_{25} T^{\tilde{\sigma}-1} T_0 \text{card}((\Gamma(S) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot H(\tilde{G}; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)$$

dans le cas périodique, car $w \notin T_{\tilde{G}}$ d'après la propriété 3.11. La propriété 4.4 de [H2] avec $L_i^b \geq L_i^*/2$ et notre propriété (3.5) montrent que chacune des quantités ci-dessus est majorée par $c_{26} C_0^{-1} H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)$ (dans le cas non périodique, remarquons que ceci provient de la propriété 3.6(xi)). D'où on a l'estimation de ρ .

L'argument de la ligne -3 de [P-W2] fournit la minoration de v . \square

Nous allons utiliser cette propriété 3.17 pour construire un polynôme $P \in K[\mathbb{P}]$. Si $p_1, \dots, p_h \in K$ désignent les coefficients non nuls d'un polynôme P , alors on définit $h(P)$ comme la hauteur logarithmique absolue du point $(1, p_1, \dots, p_h) \in \mathbb{P}_h(K)$.

PROPOSITION 3.19. *Il existe une constante $c_{27} > 0$ indépendante des paramètres D, B, V_1, \dots, V_k, E et il existe un polynôme $P \in K[[P]]$ ne s'annulant pas identiquement sur G , de degrés $\leq (L_{-1}, \dots, L_k)$ tels que*

$$h(P) \leq c_{27} C_0^{3/2} U_0 / D \tag{3.20}$$

et tels que la fonction $F = P(\Phi)$ satisfasse pour tout $(t, s) \in \Xi$;

$$\log |D_t^\dagger F(s\mathbf{u})| < -C_0^{5/2} U_0 / c_{27}. \tag{3.21}$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.19. On écrit les coefficients de P que nous allons déterminer, dans la base définie dans le Section 3(4). Considérons le système d'inéquations (3.21) dont les inconnues sont dans \mathbf{Z} . Le lemme 2.2 pour $\mathbf{v} = s\mathbf{u}$, P monomial, $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ ($1 \leq i \leq d+1$), la propriété 3.15, la proposition 3.14, le lemme 2.3(i), la propriété 3.6 et l'inégalité (3.3) montrent que la valeur absolue des coefficients de ce système est majorée par $\exp(c_{28} U_0)$. Notons ρ le rang et ν le nombre d'inconnues dans \mathbf{Z} de (3.21). Alors la propriété 3.17 montre que $\nu/(2\rho) \geq c_{29} C_0 D$, ce qui nous permet d'utiliser le lemme 6.1 de [P-W2]. Avec les notations de ce lemme, on a

$$\mu \leq C_0^3 U_0^{d+1}$$

par le choix 3.1. Alors on peut appliquer le lemme 6.1 de [P-W2] avec $m = \rho = C_0^{5/2} U_0 / c_{27}$, $\delta = C_0^{3/2} U_0 / D$ et $c_{27} \geq 2$, pour établir (3.21). Lorsque P est un polynôme dont les coefficients p_λ sont des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^D p_{\lambda,i} \xi_i$ avec la base définie dans le Section 3(4), on a

$$h(P) \leq h(1, \xi_1, \dots, \xi_D) + \log D + \log \text{Max}_{\lambda,i} \{|p_{\lambda,i}|\}.$$

On obtient (3.20) par la propriété 3.15 et choix de δ . □

6. Extrapolation

PROPOSITION 3.22. *On a pour*

$$(t, s) \in \mathbb{Z}^{d+2}, 0 \leq s < S \quad \text{et} \quad 0 \leq t_i < 2T \quad (1 \leq i \leq d+1);$$

$$|D_t^\dagger F(s\mathbf{u}) - D_t^\dagger F(s\mathbf{w})| < \exp(-c_{30} C_0^{5/2} U_0).$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.22. Pour la fonction d'une variable

$$f(z) = D_t^\dagger F(s\mathbf{u} + sz(\mathbf{w} - \mathbf{u}))$$

avec

$$(\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2}, 0 \leq s < S, 0 \leq t_i < 2T \ (1 \leq i \leq d+1),$$

on applique la majoration

$$|f(0) - f(1)| \leq \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

Donc le lemme 2.2, le lemme 2.3(i), la propriété 3.6, les estimations (3.3), (3.20) et la proposition 3.14 montrent que l'on a

$$\log \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| \leq c_{31}(\log \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| + C_0^{3/2} U_0).$$

On obtient l'énoncé en utilisant l'hypothèse 3.9. □

PROPOSITION 3.23. *Il existe un nombre réel $c_{32} > 0$ tel que pour $(\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2}$, $|\mathbf{t}| < T$ et $0 \leq s < S$, on ait*

$$\log |D_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u})| < -c_{32} C_0^2 U_0.$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.23. On déduit de (3.21) et de la proposition 3.22,

$$\log |D_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{w})| < -c_{33} C_0^{5/2} U_0$$

pour tout $(\mathbf{t}, s) \in \Xi$.

Pour le cas non périodique, on fixe t_i avec $t_i < T$ ($1 \leq i \leq d+1$) et on pose

$$f(z) = D_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} F(z\mathbf{w}).$$

Pour le cas périodique, on fixe t_i avec $t_i < T$ ($1 \leq i \leq d$) et on pose

$$f(z) = D_{\mathbf{t}_1}^{t_1} \circ \dots \circ D_{\mathbf{t}_d}^{t_d} F(z\mathbf{w}).$$

On a dans les deux cas, $\log |f^{(t)}(s)| < -c_{34} C_0^{5/2} U_0$ pour $t \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$, $0 \leq t < T_1$ et $0 \leq s < S_1$. Nous allons appliquer le lemme 3.5 de [H2] avec $r = S$, $R = 16ES$. D'abord, l'hypothèse 3.9 jointe à (3.7) entraîne $|\sum_{0 \leq j \leq d} \beta_{j,\tau} u_j| \leq 1$ pour tout $1 \leq \tau \leq t$, donc grâce à la propriété 3.6(vi), on en déduit avec le lemme 2.2, le lemme 2.3(i), la proposition 3.14, la propriété 3.6, les majorations (3.3), (3.20) et les hypothèses (1.4), (1.5); $\log |f|_{\mathbb{R}} \leq c_{35} C_0^{3/2} U_0$. Ainsi le lemme 3.5 de [H2]

fournit; $\log|f|_{2r} \leq -c_{36}C_0^2U_0$. En remarquant que l'on a $|f(s)| \leq |f|_{2r}$ pour $0 \leq s < S$, on obtient l'énoncé dans le cas non périodique. Pour le cas périodique, on utilise les inégalités de Cauchy pour avoir

$$\begin{aligned} \log|D_t^{\dagger}F(s\mathbf{w})| &= \log|f^{(t_{d+1})}(s)| \\ &\leq c_{37}(T \log T + \log|f|_{2r}) \leq -c_{38}C_0^2U_0, \end{aligned}$$

en utilisant la propriété 3.6. On obtient l'énoncé. □

7. Estimations arithmétiques

Nous présentons l'inégalité de la taille.

LEMME 3.24. *Il existe un nombre réel $c_{39} > 0$ indépendant des paramètres D, B, V_1, \dots, V_k, E ayant la propriété suivante. Soit $P \in K[\rightarrow]$ de degrés $\leq (L_{-1}, L_0, \dots, L_k)$ et $h(P) \leq \log H, H \geq e$. On prend $\mathbf{e}, \mathbf{u}, W$ comme précédemment. Soient T, S des entiers $> 0, t_1, \dots, t_{d+1}, s$ des entiers ≥ 0 avec $|\mathbf{t}| = t_1 + \dots + t_{d+1} = T, 0 \leq s < S$. On suppose que la fonction $F = P(\Phi)$ a un zéro en \mathbf{su} d'ordre exact T le long de W avec $D_e^{\dagger}F(\mathbf{su}) \neq 0$. Alors on a*

$$\begin{aligned} \log|D_e^{\dagger}F(\mathbf{su})| &\geq -c_{39}D \left\{ \log H + L_{-1} \log B + L_{-1} \log L_{-1}^b + \sum_{j=-1}^0 L_j \log S \right. \\ &\quad \left. + T \log T + T \log \text{Max}(L_0^b, L_1^b, \dots, L_k^b) + \sum_{i=1}^k L_i S^{\rho_i} \log V_i \right\}. \end{aligned}$$

DEMONSTRATION DU LEMME 3.24. On obtient l'énoncé par le même argument que celui du lemme 4.31 de [H2]. □

PROPOSITION 3.25. *La fonction F que l'on a construite vérifie*

$$D_e^{\dagger}F(\mathbf{su}) = 0 \quad \text{pour } (\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2}, |\mathbf{t}| < T, 0 \leq s < S.$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.25. On change la base de W avec les propositions 3.14 et 3.23 pour obtenir

$$\log|D_e^{\dagger}F(\mathbf{su})| < c_{40}C_0^2U_0 \quad \text{pour } |\mathbf{t}| < T, 0 \leq s < S.$$

On utilise le lemme 3.24 avec (3.20) et la propriété 3.6 jointe à l'inégalité $U \leq U_0$ dans (3.3) pour avoir le résultat suivant: si $D_e^{\dagger}F(\mathbf{su}) \neq 0$ alors $\log|D_e^{\dagger}F(\mathbf{su})| > -c_{41}C_0^{3/2}U_0$. On en déduit $C_0 < c_{42}$ d'où une contradiction. Ceci démontre la proposition 3.25. □

8. Lemme de zéros et conclusion

Le lemme suivant est une conséquence d'un théorème de [P].

LEMME 3.26. *S'il existe un polynôme de $\mathbb{C}[\mathbb{P}^1]$ de degrés $\leq L_{-1}^b, L_0^b, \dots, L_k^b$ s'annulant sur $\Gamma(S)$ avec multiplicité $\geq T$ le long de W mais ne s'annulant pas identiquement sur G , alors il existe un sous-groupe algébrique connexe G' de G , vérifiant $T_{G'} + W \neq T_G$ tel que l'on ait, en notant $\sigma = \dim W/W \cap T_{G'}$:*

$$\begin{aligned} & T^\sigma \text{card}((\Gamma(S)/(d+t+1)) + G')/G' \cdot H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_k^b) \\ & \leq c_{43} H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b). \end{aligned}$$

DEMONSTRATION DU LEMME 3.26. Par le théorème 2.1 de [P], il nous reste à montrer $T_{G'} + W \neq T_G$. Supposons $T_{G'} + W = T_G$. Nous avons alors $\sigma = r \geq 1$ en posant $r = \dim(G/G')$, ainsi ce théorème montre

$$\begin{aligned} & ((T-1)/(d+t+1))^r \text{card}((\Gamma(S)/(d+t+1)) + G')/G' \\ & \cdot H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_k^b) \leq c_{44} H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b). \end{aligned}$$

Par ailleurs, la propriété 3.6 avec (3.3) entraîne

$$\frac{H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)}{H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)} \leq c_{45} \left(\text{Max} \left(1, \frac{U_0}{S \log E} \right) \right)^r.$$

Comme $\text{card}((\Gamma(S)/(d+t+1)) + G')/G' \geq 1$, on obtient

$$T - 1 \leq c_{46} \text{Max}(1, U_0/(S \log E)),$$

d'où une contradiction avec la propriété 3.6(vi) ou (ix), en rappelant la définition de C_0 . □

LEMME 3.27. *Pour tout $-1 \leq i \leq k$, on a $L_i \geq 1$ c'est-à-dire $L_i^b = L_i$.*

DEMONSTRATION DU LEMME 3.27. D'après la proposition 3.25, il existe un polynôme P non nul dans $K[\mathbb{P}^1]$ de degrés $\leq (L_{-1}, \dots, L_k)$ tel que la fonction $F = P(\Phi)$ vérifie

$$D_e^t F(s\mathbf{u}) = 0 \quad \text{pour } (\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2}, |\mathbf{t}| < T \quad \text{et} \quad 0 \leq s < S. \quad (3.28)$$

D'abord, on va montrer $L_{-1} \geq 1$. Par définition de nos formes linéaires dans le lemme 2.3, on a $T_{G_{-1}} \cap W = \{0\}$. Ainsi on obtient $T_{G_{-1}} + W = T_G$ car $\dim T_{G_{-1}} = t$ et $\dim W = d+1$. Par conséquent, on peut compléter la base \mathbf{e} de W

en une base

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}, \mathbf{e}_{d+2}, \dots, \mathbf{e}_{d+t+1})$$

de T_G par des éléments indépendants $\mathbf{e}_{d+2}, \dots, \mathbf{e}_{d+t+1} \in T_{G_{-1}}$. Supposons $L_{-1} = 0$. Alors le polynôme P ne dépend pas des variables associées à G_{-1} . Ainsi la fonction F s'annule à l'ordre T en \mathbf{su} ($0 \leq s < S$) le long de T_G d'après (3.28), en considérant la base \mathbf{e}' au lieu de \mathbf{e} . Le théorème 2.1 de [P] fournit donc qu'un sous-groupe algébrique connexe G'' de G vérifie que

$$\begin{aligned} T^r \text{card}((\Gamma(S/(d+t+1)) + G'')/G'')H(G''; L_{-1}^b, \dots, L_k^b) \\ \leq c_{47}H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b) \quad \text{avec } r = \dim(G/G''). \end{aligned}$$

D'autre part, la propriété 3.6(v) avec (3.3) montre

$$\frac{H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)}{H(G''; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)} \leq c_{48} \left(\text{Max} \left(1, \frac{U_0}{S \log E} \right) \right)^r.$$

De l'inégalité $\text{card}((\Gamma(S/(d+t+1)) + G'')/G'') \geq 1$, on déduit

$$T - 1 \leq c_{49} \text{Max} \left(1, \frac{U_0}{S \log E} \right)$$

qui contredit la propriété 3.6(vi) ou (ix), d'où $L_{-1} \geq 1$.

La propriété 3.6(x) entraîne $L_0 \geq 1$.

Ensuite, nous allons montrer $L_j \geq 1$ pour tout $1 \leq j \leq k$. Supposons $L_{m+1} = \dots = L_k = 0$ et $L_1 \geq 1, \dots, L_m \geq 1$ ($0 \leq m \leq k-1$). Considérons le groupe $G[m] = G_{-1} \times \dots \times G_m$ et notons $d[m] = \dim G[m]$, $W[m]$ (resp. $\Gamma[m]$) la projection de W (resp. Γ) sur $T_{G[m]}$. Comme le polynôme P ne dépend pas des variables associées à G_{m+1}, \dots, G_k , la fonction F s'annule à l'ordre T en \mathbf{su} ($0 \leq s < S$) le long de $W[m]$ par (3.28). De nouveau le théorème 2.1 de [P] entraîne qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe $G'[m]$ de $G[m]$, distinct de $G[m]$ tel que

$$\begin{aligned} T^q \text{card}((\Gamma[m](S/(d[m]+1)) + G'[m])/G'[m])H(G'[m]; L_{-1}^b, \dots, L_m^b) \\ \leq c_{50}H(G[m]; L_{-1}^b, \dots, L_m^b) \quad \text{où } q = \dim W[m]/W[m] \cap T_{G'[m]}. \end{aligned}$$

La propriété 3.6(v) et (3.3) entraînent comme en haut;

$$T^q \leq c_{51} \left(\text{Max} \left(1, \frac{U_0}{S \log E} \right) \right)^{\dim(G[m]/G'[m])}$$

Ainsi la propriété 3.6(vi) ou (ix) implique $q < \dim(G[m]/G'[m])$, d'où $T_{G'[m]} + W[m] \neq T_{G[m]}$. Posons

$$G' = G'[m] \times G_{m+1} \times \cdots \times G_k;$$

alors on a $T_{G'} + W \neq T_G$. De plus comme $W \simeq W[m] \oplus (W \cap V)$ en notant $V = T_{G_{m+1}} \oplus \cdots \oplus T_{G_k}$, on a

$$(T_{G'} + W)/T_{G'} \simeq (T_{G'[m]} + W[m])/T_{G'[m]}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} & T^\sigma \text{ card}((\Gamma(S/(d+t+1)) + G')/G')H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_k^b) \\ & \leq c_{52} H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b) \quad \text{où } \sigma = \dim W/W \cap T_{G'}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

d'après l'égalité $\sigma = q$ et grâce à la définition du symbole $H(\dots)$ (cf. p. 362 de [P]). Remarquons que le nombre

$$\frac{H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)}{H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)}$$

ne dépend pas de L_{m+1}^b, \dots, L_k^b . Alors on a

$$\frac{H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)}{H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)} = c_{53} \frac{H(G; L_{-1}^b, \dots, L_m^b, L_{m+1}^\#, \dots, L_k^\#)}{H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_m^b, L_{m+1}^\#, \dots, L_k^\#)}. \tag{3.30}$$

Pour $-1 \leq i \leq m$, nous avons $L_i^b \leq L_i^\#$ et cette inégalité jointe à la propriété 4.4 de [H2] implique

$$\frac{H(G; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)}{H(G'; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)} \geq c_{54} \frac{H(G; L_{-1}^b, \dots, L_m^b, L_{m+1}^\#, \dots, L_k^\#)}{H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_m^b, L_{m+1}^\#, \dots, L_k^\#)} \tag{3.31}$$

En combinant les estimations (3.29), (3.30), nous obtenons une contradiction avec la propriété (3.4) jointe à l'inégalité (3.31). Par conséquent, on a $L_i \geq 1$ pour tout $-1 \leq i \leq k$. \square

Nous allons compléter la démonstration du théorème 1.1. La proposition 3.25 permet de vérifier les hypothèses du lemme 3.26. Grâce au lemme 3.27, on a $L_i^b \leq L_i^\#$ ($-1 \leq i \leq k$). La propriété 4.4 de [H2] avec $L_i^b \leq L_i^\#$ implique

$$\frac{H(G; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)}{H(G'; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)} \geq \frac{H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)}{H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)}. \tag{3.32}$$

Le lemme 3.26 fournit

$$T^\sigma \text{ card}((\Gamma(S) + G')/G') \leq c_{55} \frac{H(G; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)}{H(G'; L_{-1}^b, \dots, L_k^b)} \quad (3.33)$$

pour un sous-groupe algébrique connexe G' de G , vérifiant $T_{G'} + W \neq T_G$ alors on combine (3.32) et (3.33) pour avoir

$$T^\sigma \text{ card}((\Gamma(S) + G')/G') \leq c_{56} \frac{H(G; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)}{H(G'; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)} \quad (3.34)$$

D'autre part, d'après (3.4), on a

$$T^\sigma \text{ card}((\Gamma(S) + G')/G') \geq c_{57} C_0 \frac{H(G; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)}{H(G'; L_{-1}^\#, \dots, L_k^\#)}$$

qui entraîne avec (3.34); $C_0 \leq c_{58}$, d'où une contradiction avec la définition de C_0 . Ceci termine la démonstration du théorème 1.1.

4. Démonstration du théorème 1.7 et remarques

1. Démonstration du théorème 1.7

La démonstration de ce théorème est la même que celle du théorème 1.1 sauf le point suivant. Dans la démonstration de la proposition 3.2, on remplace les majorations

$$A(0) \leq \left\{ \frac{(T^\# / U)^{d+1} \cdot S}{C_0 (L_{-1}^\# / U)^{\delta_{-1}} \dots (L_k^\# / U)^{\delta_k}} \right\}^{1/t} \leq U_0$$

par

$$A(0) \leq \left\{ \frac{(T^\# / U)^{d+1}}{C_0 (L_{-1}^\# / U)^{\delta_{-1}} \dots (L_k^\# / U)^{\delta_k}} \right\}^{1/t} \leq U_0$$

car $\Gamma(S) = \{0\}$, ce qui donne la différence d'un facteur S , et donc avec le choix $D \log V_i = A_i$ ($1 \leq i \leq k$), on raffine le nombre U_0 .

2. Remarques pour les articles [H2] et [P-W1]

D'abord, on corrige ici des erreurs de [H2].

(a) Page 404, ligne 6~7, il faut enlever “grâce à l'hypothèse $D \log V_i \geq 1$ ($1 \leq i \leq k$) dans (2.4)”, et on doit écrire pour l'estimation de la ligne 8:

$$\log |\mathcal{L}(\mathbf{v})| > -C_2 D^{d+d_2+2} (\log B + \log D) (\log \log B + \log D)^{d_2+1}.$$

(b) Page 417, ligne—10, il faut enlever “par définition du cas périodique” dans la démonstration de la propriété 4.14.

Ensuite, on ajoute des corrections de [P-W1].

(c) La remarque 3.16 du Section 3 montre qu'il faut avoir $U_0 \geq D^2 \log(BV)$. Ainsi il faut prendre le maximum de $C \cdot D^2 \log(BV)$ et des estimations énoncées dans tous les théorèmes de [P-W1].

(d) En notant β un des coefficients des formes linéaires, on doit mettre $|\beta| \leq B^D$ au lieu de $|\beta| \leq BD$ dans les plusieurs endroits dans la démonstration de [P-W1], pour la raison qui est expliquée au Section 6(2) de [H2].

(e) Dans la définition de $\tilde{\delta}(\mathbf{w}, T_{\tilde{G}})$ de la page 328 de [P-W1], il faut écrire $\mathbf{u} \in W \cap T_{\tilde{G}}$ au lieu de $\mathbf{u} \in T_{\tilde{G}}$. D'ailleurs la norme $|\cdot|$ n'est définie que sur W .

Remerciements

L'auteur voudrait remercier Professeur M. Waldschmidt et Professeur P. Philippon pour les remarques diverses.

Références

- [B-P] Bertrand, D., Philippon, P.: Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs, *Ill. J. Math.* 32 (1988), 263–280.
- [B] Bijlsma, A.: Simultaneous approximation of the coordinates of algebraic points of abelian functions, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 44 (3) (1982), 265–275.
- [D] David, S.: Théorie de Baker pour des familles de groupes algébriques commutatifs, *Thèse, Univ. Paris VI*, 1989, pp. 32–63.
- [F] Fel'dman, N. I.: Simultaneous approximation of the periods of an elliptic function by algebraic numbers (en anglais), *Amer. Math. Soc. Transl.*, Ser. 2 59 (1966), 271–284.
- [H1] Hirata-Kohno, N.: Formes linéaires d'intégrales elliptiques, *Sém. de Théorie des Nombres, Paris 1988/89*, Progr. Math., Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 1–23.
- [H2] Hirata-Kohno, N.: Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques, *Invent. Math.* 104 (1991), 401–433.

- [H3] Hirata-Kohno, N.: Nouvelles mesures de transcendance liées aux groupes algébriques commutatifs, dans: *Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants*, Luminy 1990, éd. P. Philippon, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992, pp. 165–172.
- [H4] Hirata-Kohno, N.: Les points entiers sur une courbe algébrique ayant la jacobienne simple preprint.
- [L] Loxton, J. H.: Some problems involving powers of integers, *Acta Arithm* 46 (1986), 113–123.
- [M-W] Mignotte, M., Waldschmidt, M.: Linear forms in two logarithms and Schneider's method, *Math. Ann.* 231 (1978), 241–267.
- [P] Philippon, P.: Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Bull. Soc. Math. Fr.* 114 (1986), 355–383, Errata et addenda, *ibidem* 115 (1987), 393–395.
- [P-W1] Philippon, P., Waldschmidt, M.: Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs, *Sém. de Théorie des Nombres, Paris 1986/87*, Progr. Math., Birkhäuser, Boston, 1988, pp. 313–347.
- [P-W2] Philippon, P., Waldschmidt, M.: Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs, *Ill. J. Math.* 32 (1988), 281–314.
- [S] Serre, J.-P.: Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, dans: *Nombres transcendants et groupes algébriques*, *Astérisque* 69/70 (1979), 191–202.
- [W] Waldschmidt, M.: Nombres transcendants et groupes algébriques, *Astérisque* 69/70 (1979).
- [Wü] Wüstholz, G.: Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen, *Annals of Math.* 129 (1989), 501–517.
- [Y] Yu, Kunrui: Linear forms in elliptic logarithms, *J. Number Theory* 20 (1985), 1–69.