COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN COUGNARD

Une propriété de l'anneau des entiers des extensions galoisiennes non abéliennes de degré *pq* des rationnels

Compositio Mathematica, tome 40, n° 3 (1980), p. 407-415

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__40_3_407_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 40, Fasc. 3, 1980, pag. 407–415
© 1980 Sijthoff & Noordhoff International Publishers – Alphen aan den Rijn
Printed in the Netherlands

UNE PROPRIÉTÉ DE L'ANNEAU DES ENTIERS DES EXTENSIONS GALOISIENNES NON ABÉLIENNES DE DEGRÉ pq DES RATIONNELS

Jean Cougnard

Introduction

Soient $N/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne de groupe de Galois G, O_N la clôture intégrale de Z dans N et $\mathcal{M}$ un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ contenant $Z[G]$. Construisons le $\mathcal{M}$-module $\mathcal{M}O_N$; si $N/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée, A. Fröhlich a démontré que $\mathcal{M}O_N$ est $\mathcal{M}$-stablement libre [6], ce qui revient à dire que sa classe dans le groupe des classes projectives de $\mathcal{M}$ est l'élément neutre. Ce résultat est encore valable, sans hypothèse sur la ramification, si on suppose que G est un p-groupe [3], [7]. Le théorème de Fröhlich ne peut pas se généraliser sous cette forme puisque l'on sait construire des corps N tels que $\mathcal{M}O_N$ ne soit pas $\mathcal{M}$-stablement libre [4].

Dans le cas modéré on remarque que $\mathcal{M}O_N$ est isomorphe à $\mathcal{M}\otimes_{Z[G]} O_N$; on se propose d'étudier ce $\mathcal{M}$-module pour certaines extensions sauvagement ramifiées. Il n'a plus alors de raison d'être localement libre, il suffit pour s'en convaincre de considérer une extension quadratique de $\mathbb{Q}$. Il convient donc d'étudier l'image de ce produit tensoriel dans le groupe de Grothendieck $G_0(\mathcal{M})$ des $\mathcal{M}$-modules de type fini; c'est ce que nous nous proposons de faire dans le cas des extensions qui ont servi au contre-exemple de [4].

Nous démontrons que $\mathcal{M}\otimes_{Z[G]} O_N$ est isomorphe à la somme directe $\mathcal{M}O_N \oplus T$ où T est un groupe fini. Dans le cas où G est non abélien d'ordre pq (p et q premiers) on montre que la classe de $\mathcal{M}\otimes_{Z[G]} O_N$ dans $G_0(\mathcal{M})$ est celle de $\mathcal{M}$. Nous montrons que cette propriété est encore vérifiée lorsque G est un p-groupe. Le résultat

0010-437X/80/0407-08$00.20/0

est encore valable lorsque G est abélien [1] ceci est alors une conséquence des travaux de Leopoldt [8].

Les calculs qui figuraient dans une première version de ce travail [5] sont supprimés dans cette rédaction, par contre on utilise les résultats de [1] et de [11] qui sont postérieurs à [5] mais n'en dépendent pas.

Je tiens à remercier Monsieur S.M.J. Wilson dont les obligeantes remarques ont permis ces simplifications.

1. Produits tensoriels et localisation

Soit G un groupe fini. L'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ est semi-simple; on choisit la famille $\{e_i\}$ des idempotents irréductibles du centre, orthogonaux deux à deux, et $\mathcal{M}$ un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$, alors $\mathcal{M}_i = e_i\mathcal{M}$ est un ordre maximal de l'algèbre simple $A_i = e_i\mathbb{Q}[G]$. Si $\mathcal{M}$ contient $\mathbb{Z}[G]$, les $\mathcal{M}_i$ ont une structure de $\mathbb{Z}[G]$-modules à droite et la somme directe $\mathcal{M} = \bigoplus_i \mathcal{M}_i$ est une somme directe de $\mathbb{Z}[G]$-modules d'où:

$$\mathcal{M} \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N \simeq \bigoplus_i \mathcal{M}_i \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N.$$

Comme $G_0(\mathcal{M})$ est isomorphe à la somme directe des $G_0(\mathcal{M}_i)$ on est ramené à une étude pour chaque facteur simple.

L'ordre $\mathcal{M}_i$ étant maximal, tout $\mathcal{M}_i$-module de type fini, $\mathbb{Z}$-libre est $\mathcal{M}_i$-projectif; on en déduit que les groupes $K_0(\mathcal{M}_i)$ et $G_0^{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_i)$ introduits dans [9] pages 1 et 2 sont les mêmes. Il s'ensuit d'après le théorème I.2 de [9] que l'homomorphisme de Cartan de $K_0(\mathcal{M}_i)$ dans $G_0(\mathcal{M}_i)$ est un isomorphisme. Pour tout ordre maximal $\mathcal{M}$ on note $\mathrm{Cl}(\mathcal{M})$ son groupe des classes projectives et pour tout $\mathcal{M}$-module M, $[M]$ (resp. $\mathrm{cl}(M)$) désigne son image dans $G_0(\mathcal{M})$ (resp. $\mathrm{Cl}(\mathcal{M})$). On sait que $K_0(\mathcal{M}_i)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(\mathcal{M}_i)$ [9], [10], on en déduit que

$$G_0(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{Z}^s \oplus \mathrm{Cl}(\mathcal{M})$$

où s désigne le nombre de facteurs simples de $\mathbb{Q}[G]$ et $\mathrm{Cl}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Cl}(\mathcal{M}_i)$. On a alors $[\mathcal{M}] = (1, 1, \ldots, 1, 0)$ et si M est un $\mathcal{M}$-module fini $[M] = (0, \ldots, 0, X)$ avec $X \in \mathrm{Cl}(\mathcal{M})$.

PROPOSITION 1: *Le $\mathcal{M}_i$-module $\mathcal{M}_i \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$ est isomorphe à $\mathcal{M}_i O_N \oplus T_i$ où T_i est fini.*

DÉMONSTRATION: L'application de $\mathcal{M}_i \times O_N$ dans $\mathcal{M}_i O_N$ définie par la multiplication se factorise par $\mathcal{M}_i \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$ en une application

surjective f. Les propriétés des ordres maximaux et la comparaison des rangs des deux $\mathcal{M}_i$-modules donnent le résultat.

Il existe un idéal à gauche I_i de $\mathcal{M}_i$ et un entier n tels que l'on ait une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{M}_i^{n-2} \oplus I_i \to \mathcal{M}_i^n \to \mathcal{M}_i \underset{Z[G]}{\otimes} O_N \to 0.$$

La classe du produit tensoriel dans $G_0(\mathcal{M}_i)$ est $(1, -\mathrm{cl}(I_i))$ or $\mathrm{cl}(I_i)$ est déterminée par la norme réduite de I_i; ceci conduit à localiser et compléter. On voit aisément que l'on a pour tout nombre premier p

$$Z_p \underset{Z}{\otimes} \left(\mathcal{M}_i \underset{Z[G]}{\otimes} O_N\right) \simeq \left(Z_p \underset{Z}{\otimes} \mathcal{M}_i\right) \underset{Z_p[G]}{\otimes} \left(Z_p \underset{Z}{\otimes} O_N\right)$$

où Z_p désigne l'anneau des entiers p-adiques.

PROPOSITION 2: *Les facteurs premiers de l'ordre de T_i sont des places sauvagement ramifiées dans $N/\mathbb{Q}$.*

DÉMONSTRATION: Si p est modérément ramifié dans $N/\mathbb{Q}$, $Z_p \otimes_Z O_N$ est $Z_p[G]$-libre. D'après la remarque précédente on a un isomorphisme:

$$\left(Z_p \underset{Z}{\otimes} \mathcal{M}_i O_N\right) \oplus \left(Z_p \underset{Z}{\otimes} T_i\right) \simeq \left(Z_p \underset{Z}{\otimes} \mathcal{M}_i\right) \underset{Z_p[G]}{\otimes} (Z_p[G])$$

donc p ne divise pas l'ordre de T_i.

COROLLAIRE 1: *Si G est un p-groupe on a $[\mathcal{M} \otimes_{Z[G]} O_N] = [\mathcal{M}]$ dans $G_0(\mathcal{M})$.*

DÉMONSTRATION: On a $[\mathcal{M}_i \otimes_{Z[G]} O_N] = [\mathcal{M}_i O_N] + [T_i]$ or d'après [3] on sait que $[\mathcal{M}_i O_N]$ est $\mathcal{M}_i$-stablement libre. Comme T_i est un p-groupe, il existe des idéaux à gauches I_{i_j} de $\mathcal{M}_i$ tels que l'on ait un isomorphisme

$$T_i \simeq \frac{\mathcal{M}_i^u}{\underset{j=1}{\overset{u}{\oplus}} I_{i_j}}.$$

La norme réduite de I_{i_j} ne fait apparaître que l'idéal premier au-dessus de p dans le centre de $\mathcal{M}_i$; cet idéal étant principal (engendrable par un élément totalement positif le cas échéant) on a $\mathrm{cl}(I_{i_j}) = 0$ dans $\mathrm{Cl}(\mathcal{M}_i)$ ce qui démontre le résultat.

Considérons maintenant les groupes G non-abéliens d'ordre pq (p et q premiers). L'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ comporte trois facteurs simples [4] et on doit étudier $[\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$, $[\mathcal{M}_2 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$, $[\mathcal{M}_3 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$ avec $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_2 \simeq \mathbb{Z}[\omega]$ (ω une racine primitive q-ième de l'unité) et $\mathcal{M}_3$ un ordre maximal de $M_q(K)$ où K est le sous-corps du p-ième corps cyclotomique tel que $[K:\mathbb{Q}] = (p-1)/q$. Il est clair que $[\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N] = [\mathcal{M}_1]$. Pour $[\mathcal{M}_3 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$ on démontre:

COROLLAIRE 2: *Si $\mathcal{M}_3$ est un ordre maximal de $M_q(K)$ contenant $e_3\mathbb{Z}[G]$ on a $[\mathcal{M}_3 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N] = [\mathcal{M}_3]$ dans $G_0(\mathcal{M}_3)$.*

DÉMONSTRATION: Remarquons (cf [2], p. 20–22) que si ℓ est premier différent de p, e_3 appartient à $\mathbb{Z}_l[G]$ et que le conducteur de $\mathcal{M}_3$ dans $\Lambda = e_3\mathbb{Z}[G]$ est une puissance de l'idéal premier principal de K au-dessus de p, on a alors $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}_3 = \Lambda_\ell$ (c'est-à-dire $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$) d'où:

$$\mathbb{Z}_\ell \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \left(\mathcal{M}_3 \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N\right) \simeq e_3\mathbb{Z}_\ell[G] \underset{\mathbb{Z}_\ell[G]}{\otimes} \left(\mathbb{Z}_\ell \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} O_N\right) \simeq \mathbb{Z}_\ell \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathcal{M}_3 O_N.$$

Ceci montre que T_3 est un p-groupe auquel on peut appliquer le raisonnement du corollaire 1; comme on peut déduire des calculs de [2] (ch VIII et IX) que $\mathcal{M}_3 O_N$ est $\mathcal{M}_3$-stablement libre, le corollaire est démontré.

Enonçons le résultat principal:

THÉOREME 1: *Soit $N/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne de groupe de Galois G, non abélien d'ordre pq, O_N la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans N et $\mathcal{M}$ un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$ alors on a l'égalité $[\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N] = [\mathcal{M}]$ dans $G_0(\mathcal{M})$.*

D'après le corollaire 2 et la remarque qui le précède, il ne reste à étudier que $[\mathcal{M}_2 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$ dans $G_0(\mathcal{M}_2)$.

2. Calcul de $[\mathcal{M}_2 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$

Précisons les notations, utilisées. Le groupe G est engendré par deux éléments σ et τ vérifiant les relations $\sigma^p = \tau^q = 1$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^r$, $r^q \equiv 1(p)$ et $r \not\equiv 1(p)$ ce qui impose $p \equiv 1(q)$. On note H le sous-groupe de G engendré par σ. Si N est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ avec groupe de Galois G, on note k le sous-corps de N formé des éléments invariants par H. Soit T le sous-groupe de G engendré par τ, la

restriction de l'action de τ à k définit un isomorphisme de T avec $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$. On désigne par O_k la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans k et par O_{N_p} (resp. O_{k_p}) le produit tensoriel $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} O_N$ (resp. $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} O_k$).

L'ordre maximal $\mathcal{M}_2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[T]/\Sigma_{i=0}^{q-1} \tau^i$ c'est-à-dire $\mathbb{Z}[G]/(1-\sigma, \Sigma_{i=0}^{q-1} \tau^i)$.

On veut démontrer que l'on a:

$$\left[\mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N\right] = [\mathcal{M}_2] \text{ dans } G_0(\mathcal{M}_0) \tag{1}$$

or nous avons la suite exact de $\mathbb{Z}[T]$-modules:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \hat{H}_0(H, O_N) \longrightarrow H_0(H, O_N) \xrightarrow{T_{N/k}} H^0(H, O_N) \\ \longrightarrow \hat{H}^0(H, O_N) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{2}$$

où $T_{N/k}$ désigne la trace dans l'extension N/k et $H_0(H, O_N) = O_N/(1-\sigma)O_N$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[T] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$. La structure de T-module est obtenue par le passage au quotient.

Puisque T est d'ordre q, on a

$$\mathbb{Z}_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} (\mathcal{M}_2 \oplus T) \simeq \mathbb{Z}_p[T] \tag{3}$$

comme par ailleurs $\hat{H}_0(H, O_N)$ et $\hat{H}^0(H, O_N)$ sont des p-groupes on obtient la suite exacte de $\mathcal{M}_2$-modules:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} \hat{H}_0(H, O_N) \longrightarrow \mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N \longrightarrow \mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} O_k \\ \longrightarrow \mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} \hat{H}^0(H, O_N) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{4}$$

mais les résultats du cas abélien [1] montrent que $[\mathcal{M}_2 \otimes_{\mathbb{Z}[T]} O_k] = [\mathcal{M}_2]$. Donc pour avoir l'égalité (1) il faut et il suffit que l'on ait dans $G_0(\mathcal{M}_2)$:

$$\left[\mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} \hat{H}^0(H, O_N)\right] = \left[\mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} \hat{H}_0(H, O_N)\right]. \tag{5}$$

On note $G_0'(\mathbb{Z}_p[T])$ le groupe de Grothendieck des $\mathbb{Z}_p[T]$-modules finis. La relation (3) et le lemme 1 de [11] montrent que la relation (5) est une conséquence du:

THÉORÈME 2: *Les $Z_p[T]$-modules $\hat{H}^0(H, O_N)$ et $\hat{H}_0(H, O_N)$ ont même image dans $G_0'(Z_p[T])$.*

En fait nous démontrons un résultat plus précis: Le groupe T opère sur k ce qui permet de définir l'algèbre simple $A = k * T$ de centre $\mathbb{Q}$ dont les éléments sont les sommes $\Sigma_{i=0}^{q-1} a_i\tau^i$ $(a_i \in k)$, le produit étant défini par $a_i\tau^i \cdot b_j\tau^j = a_i\tau^i(b_j)\tau^{i+j}$. On considère dans A l'ordre $\Lambda = O_k * T$. Si on complète en p on obtient un Z_p-ordre Λ_p de la $\mathbb{Q}_p$-algèbre centrale simple A_p. Le théorème 40. 13 de [10] montre que Λ_p est un ordre héréditaire. Tout Λ_p-module fini est par restriction un $Z_p[T]$-module fini, on en déduit un homomorphisme de $G_0'(\Lambda_p)$ (le groupe de Grothendieck de la catégorie des Λ_p-modules finis) dans $G_0'(Z_p[T])$. Le théorème 2 résulte alors du:

THÉORÈME 3: *Les modules $\hat{H}_0(H, O_N)$ et $\hat{H}^0(H, O_N)$ ont même image dans $G_0'(\Lambda_p)$.*

Le résultat est trivial si N/k est modérément ramifiée. Nous supposerons donc désormais que p est ramifié dans N/k.

Le théorème 3 est la conséquence de plusieurs lemmes dont la démonstration nécessite le rappel de quelques définitions. Le groupe de Whitehead de A_p est noté $K_1(A_p)$ et $K_1(A_p)_{Z_p}$ désigne le sous-groupe des éléments de $K_1(A_p)$ dont la norme réduite est dans Z_p ([11] lemme 3). Pour tout anneau S on note S^* le groupe multiplicatif des éléments inversibles de S. L'application qui à tout Λ_p-module fini associe son ordre définit une application de $G_0'(\Lambda_p)$ dans $\mathbb{Q}^*$ notée ord.

LEMME 1: *L'application $G_0'(\Lambda_p)$ dans $G_0(\Lambda) \oplus \mathbb{Q}^*$ qui à $[M]$ associe $([M], ord\ (M))$ est injective.*

DÉMONSTRATION: D'après [11], théorème 2, puisque l'ordre Λ_p est héréditaire on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow K_1(A)_{Z_p} \longrightarrow K_1(A) \xrightarrow{\delta} G_0'(\Lambda_p) \xrightarrow{i} G_0(\Lambda)$$

qui devient ici:

$$0 \longrightarrow Z_p^* \longrightarrow \mathbb{Q}_p^* \xrightarrow{\delta} G_0'(\Lambda_p) \xrightarrow{i} G_0(\Lambda_p)$$

où i est l'application naturelle de $G_0'(\Lambda_p)$ dans $G_0(\Lambda_p)$ et δ est

l'homomorphisme de groupe tel que si $\lambda \in \mathbb{Q}_p^*$ est norme réduite d'un élément ν et si $r \in \mathbb{Z}_p$ vérifie $r\nu \in \Lambda_p$ alors $\delta(\lambda) = [\Lambda_p/r\Lambda_p] - [\Lambda_p/r\nu\Lambda_p]$.

Il est évident que le noyau de $\mathrm{ord} \circ \delta$ est $\mathbb{Z}_p^*$, *donc que* $\ker i \cap \ker \mathrm{ord} = \mathrm{im}\ \delta \cap \ker \mathrm{ord} = \delta(\ker(\mathrm{ord} \circ \delta)) = \{0\}$.

On peut choisir un élément Π de O_{N_p} de la façon suivante:

$$O_{N_p} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} O_{k_p}\Pi^i$$

chacun des facteurs $O_{k_p}\Pi^i$ étant stable par l'action du groupe T. Lorsque p n'est pas décomposé dans $k/\mathbb{Q}$ on peut prendre pour Π une uniformisante à laquelle on impose la condition $\tau(\Pi) = \alpha\Pi$ où α est une racine q-ième de l'unité (primitive si p est ramifié dans $k/\mathbb{Q}$, égale à 1 si p est inerte). Une tel choix étant possible car $N/\mathbb{Q}$ est une extension décomposée et $p \equiv 1(q)$.

Lorsque p est décomposé dans $k/\mathbb{Q}$, le groupe T permute les complétés de O_N pour les métriques prolongeant la métrique p-adique de $\mathbb{Z}_p$, il suffit alors de prendre pour Π la somme d'une unformisante et de ses conjugués (pour les idéaux au-dessus de p).

Finalement, dans chacun des cas, on note t le saut de ramification des idéaux premiers au-dessus de p dans l'extension N/k.

On peut énoncer:

LEMME 2: *Avec les notations précédentes on a la décomposition*:

$$\Pi^t O_{k_p} + (1-\sigma)O_{N_p} = \Pi^t O_{N_p}.$$

DÉMONSTRATION: On a la congruence $\sigma(\Pi) \equiv \Pi(\Pi^{t+1})$ d'où l'on déduit que pour $1 \leq u \leq p-1$ $\sigma(\Pi^u) \equiv \Pi^u(\Pi^{t+u})$. Donc pour un élement x quelconque de $\Pi^t O_{N_p}$ on peut trouver un élément y de O_{k_p} et un élément z de O_{N_p} tels que:

$$x - \Pi^t y - (1-\sigma)z \in \Pi^p \Pi^t O_{N_p}$$

comme l'indice de ramification de p dans N/k est p, on est en mesure d'appliquer le lemme de Nakayama pour les O_{k_p}-modules.

REMARQUE: La décomposition du lemme 2 est en fait une décomposition de $\Pi^t O_{N_p}$ en somme directe de Λ_p-modules.

LEMME 3: *On a un isomorphisme de* Λ_p*-modules entre* O_{N_p}/O_{k_p} *et* $(1-\sigma)O_{N_p}$.

DÉMONSTRATION: Le choix de Π donne une décomposition:

$$O_{N_p} = \bigoplus_{i=0}^{p=1} O_{k_p}\Pi_i$$

de Λ_p-modules d'où l'on déduit

$$\Pi_t O_{N_p} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} O_{k_p}\Pi^{t+i}.$$

On a toujours un isomorphisme de Λ_p-modules entre $O_{k_p}\Pi^i$ et $O_{k_p}\Pi^{i+a}$. On a donc les isomorphismes de Λ_p-modules:

$$O_{N_p}/O_{k_p} \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{q} O_{k_p}\Pi^i\right)^{(p-1)/q} \simeq \frac{\Pi^t O_{n_p}}{\Pi^t O_{k_p}}$$

or d'après le lemme 2 ce dernier module est Λ_p-isomorphe à $(1-\sigma)O_{N_p}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3: Localisons et complétons en p la suite exacte (2). On obtient une suite exacte de Λ_p-modules d'où dans $G_0(\Lambda_p)$:

$$\begin{aligned}[\hat{H}_0(H, O_N)] - [\hat{H}^0(H, O_N)] &= [O_{k_p}] - [O_{N_p}/(1-\sigma)O_{N_p}] \\ &= [(1-\sigma)O_{N_p}] - [O_{N_p}/O_{k_p}]\end{aligned}$$

ce qui d'après le lemme 3 est nul.

Or les groupes $\hat{H}_0(H, O_N)$ et $\hat{H}^0(H, O_N)$ ont même ordre car H est cyclique et O_N est un sous-module d'un $Z[H]$-module libre ayant même rang. Le lemme 1 permet alors de conclure.

REMARQUE: L'hypothèse q premier peut être omise si l'on précise au §2 que l'ordre de r dans $(Z/pZ)^*$ est q.

REFERENCES

[1] D. CHATELAIN: Etude du O-module $O \otimes_{Z[G]} O_N$ pour une extension $N/\mathbf{Q}$ abélienne de groupe G avec O ordre maximal de $\mathbf{Q}[G]$, O_N anneau des entiers de N. *Séminaire de Théorie des Nombres de Besançon* 1976–1977.

[2] J. COUGNARD: Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers. *Thèse* (Bordeaux I – 1975).

[3] J. COUGNARD: Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers des p-extensions. *Compositio Math. 33, 3* (1976) 303–336.

[4] J. COUGNARD: Un contre exemple à une conjecture de J. Martinet. *Algebraic number fields*, *p.* 539–559, édité par A. Fröhlich (Academic Press).

[5] J. COUGNARD: Une propriété de l'anneau des entiers des extensions galoisiennes non abéliennes de degré *pq* des rationnels. *Séminaire de Theorie des Nombres de Besançon* 1976–1977.

[6] A. FRÖHLICH: Arithmetic and Galois-module structure. *J. für reine angew. Math.*, *286–287* (1976) 380–440.

[7] A. FRÖHLICH: Some problems of Galois-module structure for wild extensions. *Proc. London Math. Soc.* Vol. XXXVII part 2, Sept. 1978, p. 193–212.

[8] H.W. LEOPOLDT: Über die Haupordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers. *J. für reine angew. Math.*, *201* (1959) 119–149.

[9] R.G. SWAN and E.G. EVANS: *K-theory of finite groups and orders.* Lecture notes in Mathematics 149. Springer Verlag, 1970.

[10] I. REINER: *Maximal orders.* Academic Press, 1975.

[11] S.M.J. WILSON: Reduced Norms in the *K*-theory òf orders. *J. of Algebra 46* (1977) 1–11.

(Oblatum 3-I-1978 & 22-V-1979)

Faculté des Sciences
Mathématiques
25030 BESANCON CEDEX
E.R.A. C.N.R.S. n° 07 0654