COMPOSITIO MATHEMATICA

H. SCHEERER

Lokalisierung von Schnitträumen

Compositio Mathematica, tome 40, nº 2 (1980), p. 269-281

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__40_2_269_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 40, Fasc. 2, 1980, pag. 269–281

LOKALISIERUNG VON SCHNITTRÄUMEN

H. Scheerer*

1. Resultate

Räume seien, wenn es nicht anders angegeben ist, hausdorffsch und vom Homotopietyp von CW-Komplexen, Abbildungen seien stetig vorausgesetzt.

Seien E, B CW-Komplexe, sei B zusammenhängend, sei $q: E \to B$ eine Serre-Faserung, deren Faser nilpotent ist.

Mit $\langle B, E\rangle$ werde der Raum der (freien) Schnitte von $E \to B$, versehen mit der kompakt-offenen Topologie, bezeichnet. Ist $A \subset B$ und $\tau: A \to E$ eine Abbildung, so sei $\langle B, E\rangle^A := \{\sigma \in \langle B, E\rangle | \sigma|A = \tau\}$ mit der Teilraumtopologie (Wir berücksichtigen τ in der Notation nicht). Mit $S\langle B, E\rangle^A$ werde die Menge der Wegekomponenten von $\langle B, E\rangle^A$ bezeichnet.

SATZ 1: *Ist B von endlicher Dimension und A ein Teilkomplex von B, so ist $\langle B, E\rangle^A$ nilpotent.*

Folgende Konventionen seien noch getroffen:

(1) Eine Abbildung $f: X \to Y$ heisst "Lokalisierung nach (einer Menge von Primzahlen) P", wenn f eine Bijektion $\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ induziert und $f_*: \pi_i(X, x) \to \pi_i(Y, f(x))$ eine Lokalisierung nach P für alle $x \in X$ und $i > 0$ ist.

(2) Wir sagen jedoch, dass $f: X \to Y$ Komponenten lokalisiert, wenn $f_*: \pi_i(X, x) \to \pi_i(Y, f(x))$ eine Lokalisierung für alle $x \in X$ und $i > 0$ ist.

Sei nun $\bar{q}: E_{fP} \to B$ eine Serre-Faserung und $c: E \to E_{fP}$ eine Abbildung über id_B, so dass c eine fasernweise Lokalisierung nach P ist

* Der Autor beendete diese Arbeit während eines durch ein Fulbright-Reisestipendium unterstützten Aufenthaltes an der Cornell University.

0010–437X/80/02/0269–14$00.20/0

(nach [6], [9], [11] existieren $\bar{q}$ und c). Komposition mit c definiert eine Abbildung $\langle B, E\rangle^A \to \langle B, E_{fP}\rangle^A$.

SATZ 2: *Ist B ein endlicher Komplex, so lokalisiert die Abbildung $\langle B, E\rangle^A \to \langle B, E_{fP}\rangle^A$ Komponenten.*

Ist ferner jede Komponente der Faser von q vom Homotopietyp eines CW-Komplexes von endlichem Typ, so ist die Abbildung $S\langle B, E\rangle^A \to S\langle B, E_{fP}\rangle^A$ endlich-zu-eins.

Diese Sätze werden mit einer Verallgemeinerung eines "klassischen" Resultates von G.W. Whitehead [16] und seiner Varianten in [12], [13] bewiesen. Die Argumente schliessen sich an solche in [1], [3], [9] an. Im falle einer trivialen Faserung wurden die Sätze 1, 2 auch in [10], [15] bewiesen.

In Abschnitt 2 stellen wir eine Reihe von Anwendungen auf Abbildungsräume, die mit Schnitträumen identifiziert werden können, zusammen; in 2.5 weisen wir auf einige Verschärfungen hin.

Eine Vorankündigung dieser Arbeit ist als [14] erschienen.

2. Anwendungen, Verallgemeinerungen

2.1. Räume von Retraktionen

Sei (X, A) ein CW-Paar, seien X, A zusammenhängend, sei A nilpotent. Sei $|X, A|$ der Raum der Retraktionen $X \to A$ und $R|X, A|$ die Menge der Komponenten von $|X, A|$. Sei A_P eine Lokalisierung von A nach P, sei $X' = X \cup A_P$ und $A \subset A_P$, $A_P \cap X = A$.

Sei $X \times A \to X$, $(x, a) \mapsto x$, die triviale Faserung und $\tau: A \to X \times A$, $a \mapsto (a, a)$. Dann ist $|X, A| = \langle X, X \times A\rangle^A$ und $R|X, A| = S\langle X, X \times A\rangle^A$. Also ist $|X, A|$ nilpotent.

Für $r \in |X, A|$ definiere man $r': X' \to A_P$ durch $r'(x) = r(x)$ für $x \in X$ und $r'(x) = x$ für $x \in A_P$. Dann lokalisiert $|X, A| \to |X', A_P|$, $r \mapsto r'$, Komponenten und $R|X, A| \to R|X', A_P|$ ist endlich-zu-eins.

2.2. Räume von Abbildungen über *B*.

Sei $f: Y \to B$ eine Abbildung und Y ein endlicher CW-Komplex. Sei $E \to B$ eine Faserung wie in Satz 1. Sei $\{Y, E\}^B$ der Raum der Abbildungen über B, sei f^*E die durch f induzierte Faserung über Y, dann ist $\{Y, E\}^B$ kanonisch homeomorph zu $\langle Y, f^*E\rangle$, also ist $\{Y, E\}^B$ nilpotent und $\{Y, E\}^B \to \{Y, E_{fP}\}^B$ lokalisiert Komponenten.

2.3. Räume von ex-Abbildungen

Seien $f: Y \to B$, $q: E \to B$ wie in 2.2, seien $s: B \to Y$, $t: B \to E$ Schnitte. Sei $\{Y, E\}^{ex}$ der Raum der ex-Abbildungen der ex-Räume $B \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{t} E \xrightarrow{q} B$, sei ferner $(Y, s(B))$ ein endliches CW-Paar. Dann ist $\{Y, E\}^{ex}$ nilpotent und $\{Y, E\}^{ex} \to \{Y, E_{fP}\}^{ex}$ lokalisiert Komponenten. Denn man identifiziert $\{Y, E\}^{ex}$ mit $\langle Y, f^*E\}^{s(B)}$, wobei die Abbildung $\tau: s(B) \to f^*E$ durch $\tau(s(b)) = (s(b), t(b))$ gegeben wird.

2.4. Räume von Faserabbildungen.

Seien $q: E_1 \to B_1$, $r: E_2 \to B_2$ Serre-Faserungen mit Fasern F_1 resp. F_2. Seien E_1, B_1, F_1 endliche zusammenhängende CW-Komplexe. Seien E_2, B_2, F_2 zusammenhängende, nilpotente CW-Komplexe von endlichem Typ.

Sei $\mathrm{Fas}(E_1, E_2)$ der Raum der fasererhaltenden Abbildungen $f: E_1 \to E_2$ (d.h. f ist ein Paar $\bar{f}: E_1 \to E_2$, $\underline{f}: B_1 \to B_2$ mit $\underline{f}q = r\bar{f}$) mit der Teilraumtopologie des Raumes $\mathrm{Abb}(E_1, E_2)$ aller Abbildungen $E_1 \to E_2$ mit der kompakt-offenen Topologie.

Sei $\tilde{r}: E_{2P} \to B_{2P}$ eine Lokalisierung der Faserung $E_2 \to B_2$. Sei $g \in \mathrm{Fas}(E_2, E_{2P})$ eine Lokalisierungsabbildung.

BEHAUPTUNG: *Die durch g induzierte Abbildung* $\mathrm{Fas}(E_1, E_2) \to \mathrm{Fas}(E_1, E_{2P})$ *lokalisiert Komponenten und ist endlich-zu-eins auf der Menge der Wegekomponenten.*

Den Beweis führen wir im Appendix.

2.5. Verallgemeinerungen.

(1) Es genügt, in Satz 1 vorauszusetzen, dass entweder (B, A) homologisch endlich-dimensional oder der Postnikov-Turm der Faser von $E \to B$ endlich ist. In Satz 2 genügt es vorauszusetzen, dass (B, A) ein homologisch endliches Paar von Komplexen ist.

(2) Unter den Voraussetzungen von Satz 2 hat für $P \supset Q$ auch die kanonische Abbildung $S\langle B, E_{fP}\rangle \to S\langle B, E_{fQ}\rangle$ endliche Fasern. Ferner gilt ein Hasse-Prinzip (vergl. [10]) für Schnitte.

3. Gruppen von Homotopieklassen von Schnitten

Definition 1: Ein gruppenähnlicher Raum ist ein Raum mit Grundpunkt * und Multiplikation $m: X \times X \to X$, so dass * eine Homotopie-Eins und die Multiplikation homotopie-assoziativ ist und so dass ein Inverses bis auf Homotopie existiert. Ferner seien alle Abbildungen und Homotopien grundpunkterhaltend.

Definition 2: Ein gruppenähnlicher Raum E über B ist ein ex-Raum $B \xrightarrow{\sigma} E \xrightarrow{q} B$, q eine Serre-Faserung, mit Multiplikation $m: E \times_q E \to E$ (wobei $E \times_q E = \{(x, y) \mid q(x) = q(y)\}$ ist), so dass in der ex-Kategorie σ eine Homotopie-Eins und m homotopie-assoziativ ist und so dass ein Inverses bis auf Homotopie existiert.

Bemerkung: Man vergleiche zu dieser Definition [2]. Auf den Fasern wird die Struktur eines gruppenähnlichen Raumes nach Definition 1 induziert.

Beispiel: *Sei $r: X \to B$ eine Serre-Faserung mit Schnitt $\sigma: B \to X$, seien X, B CW-Komplexe.*

Als Menge sei $\Omega_\sigma^n(B) = \bigcup_{b \in B} \Omega_{\sigma(b)}^n r^{-1}(b)$ mit $\Omega_{\sigma(b)}^n r^{-1}(b) = \{(\Sigma^n, *) \to (r^{-1}(b), \sigma(b))\}$. Hier sei Σ^n die n-fache (reduzierte) Einhängung von $S^0 = \{-1, 1\}$ mit Basispunkt 1. Sei ferner $\Sigma_B^n B$ die n-fache Einhängung des ex-Raumes $B \to S^0 \times B \to B$. Mit Hilfe des Schnittes σ betrachte man $X \to B$ als ex-Raum und gebe $\Omega_{\sigma(B)}^n$ die Topologie des funktionalen ex-Raumes $(\Sigma_B^n B)!E$ von [4], *Abschnitt* 4.

Die kanonische Projektion $q: \Omega_{\sigma(B)}^n \to B$ ist dann eine Serre-Faserung. Ferner ist $\Omega_{\sigma(B)}^n \times_q \Omega_{\sigma(B)}^n$ homeomorph zu $(\Sigma_B^n B \vee \Sigma_B^n B)!E$. Daher induziert die Abbildung $\Sigma_B^n B \to \Sigma_B^n B \vee \Sigma_B^n B$ eine Multiplikation $\Omega_\sigma^n(B) \times_q \Omega_\sigma^n(B) \to \Omega_\sigma^n(B)$ über B, und $q: \Omega_\sigma^n(B) \to B$ ist mit dieser Multiplikation ein gruppenähnlicher Raum über B, dessen Einselement der Schnitt $\tilde{\sigma}: B \to \Omega_\sigma^n(B)$ ist, welcher $b \in B$ auf die konstante Abbildung $\Sigma^n \to \sigma(b)$ abbildet.

Der Beweis dieser Behauptungen lässt sich mittels Resultaten in [3], [4] führen.

Bezeichnung: Wenn erforderlich bezeichnen wir Homotopiemengen in der Kategorie mit Grundpunkt mit $[X, Y]$, in der Kategorie ohne Grundpunkt mit $[X, Y]^{fr}$.

DEFINITION 3: Ein gruppenähnlicher Raum X heisst "schwach nilpotent", wenn die Gruppen $[S^n, X]^{fr}$ nilpotent sind für $n \geq 0$.

BEMERKUNGEN: (1) Eine dazu äquivalente Bedingung ist folgende: Die Komponentengruppe $\pi_0(X)$ ist nilpotent und operiert nilpotent auf den Gruppen $\pi_n(X, *)$ für $n \geq 1$. Nach [13] ist $[S^n, X]^{fr}$ für $n \geq 1$ ein semidirektes Produkt $\pi_n(X, *) \times_s \pi_0(X)$. Die Wirkung eines Elementes $z \in \pi_0(X)$ auf einem Element $a \in \pi_0(X, *)$ werde mit $\hat{z}(a)$ bezeichnet (eine Notation, welche im Beweis des folgenden Satzes verwandt wird).

(2) Nach [12] ist ein zusammenhängender Raum Y genau dann nilpotent, wenn der Schleifenraum $\Omega_* Y$ schwach nilpotent ist.

DEFINITION 4: Die Gruppe G operiere auf einer Gruppe K vermöge eines Homomorphismus von G in die Automorphismengruppe von K. Diese Operation heisst "nilpotent", wenn es ein k gibt mit $\Gamma^k(K) = \{1\}$, wobei man rekursiv $\Gamma^0(K) := K$ und $\Gamma^i(K) := \langle\{g(a) \cdot a^{-1} \mid a \in \Gamma^{i-1}(K),\ g \in G\}\rangle$ für $i \geq 1$ definiert. (Hier bezeichnet $\langle\{\cdots\}\rangle$ die von $\{\cdots\}$ erzeugte Untergruppe von K).

Sei $q: E \to B$ ein gruppenähnlicher Raum über B mit Einselement $\sigma: B \to E$. Sei $A \subset B$ und $\langle B, E\rangle^A$ bzgl. $\tau = \sigma \mid A$ definiert. Die Multiplikation $E \times_q E \to E$ über B induziert eine Gruppenstruktur auf $S\langle B, E\rangle^A$ und eine Operation von $S\langle B, E\rangle^A$ auf $S\langle B, \Omega_\sigma^n(B)\rangle^A$.

Wir benötigen noch folgendes

LEMMA: *Sei (B, A) ein CW-Paar. Dann ist der kanonische Homomorphismus $S\langle B, E\rangle^A \to S\langle B, E\rangle$ injektiv.*

BEWEIS: Seien $u,\ v \in \langle B, E\rangle^A$. Sei H_t eine freie Homotopie zwischen u und v; es ist zu zeigen, dass dann eine Homotopie rel A zwischen u, v existiert.

Auf dem Teilraum

$$(B \times 0 \times I) \cup (B \times 1 \times I) \cup (A \times I \times I) \cup (B \times I \times 0)$$

von $B \times I \times I$ definiere man $S(b, t, 0) = m(H_t(b), \sigma(b))$, $S(b, 0, s) = u(b)$, $S(b, 1, s) = v(b)$ und

$$S(b, t, s) = \begin{cases} m(H_t(b), H_{2s}(b)^{-1}), & 2s \leq t, \\ G_{r(t,s)}(m(H_t(b), H_t(b)^{-1}), & 2s \geq t, \end{cases}$$

für $b \in A$, wobei G_r eine Homotopie zwischen $E \to E$, $x \mapsto m(x, x^{-1})$, und $E \to E$, $x \mapsto \sigma(q(x))$, und $r(t, s) = (s - t/2)/(1 - t/2)$ ist. Dann lässt sich S zu $\tilde{S}$ auf $B \times I \times I$ erweitern, so dass $\tilde{S} \mid B \times 1 \times I$ eine Homotopie rel A zwischen u und v ist.

SATZ: *Sei $q: E \to B$ ein gruppenähnlicher Raum über B mit Homotopie-Eins σ, sei (B, A) ein endlich-dimensionales CW-Paar, sei B zusammenhängend und sei die Faser X von q schwach nilpotent. Dann ist $S\langle B, E\rangle^A$ nilpotent und operiert nilpotent auf $S\langle B, \Omega_\sigma^n(B)\rangle^A$ für $n \geq 1$.*

BEWEIS: Wegen des Lemmas ist $S\langle B, E\rangle^A$ bzw. $S\langle B, \Omega_\sigma^n(B)\rangle^A$ eine Untergruppe von $S\langle B, E\rangle$ bzw. $S\langle B, \Omega_\sigma^n(B)\rangle$, und es genügt daher, die Behauptung für $A = \emptyset$ zu beweisen.

Mit B^k werde das k-Skelett von B bezeichnet. Wir können nach [1] annehmen, dass $B^0 = \{*\}$ ist.

Das Einselement von $\Omega_\sigma^n(B) \to B$ bezeichnen wir gleichfalls mit σ. Für $\eta \in S\langle B, E\rangle$ und $\omega \in S\langle B, \Omega_\sigma^n(B)\rangle$ (für $n = 0$ können wir $S\langle B, \Omega_\sigma^n(B)\rangle$ mit $S\langle B, E\rangle$ identifizieren) notieren wir die Wirkung von η auf ω mit $\eta\omega\eta^{-1}$. Im Hinblick auf Definition 4 betrachten wir für $K = S\langle B, \Omega_\sigma^n(B)\rangle$ die Reihe $\Gamma^0 K = K$ und $\Gamma^i K = \langle\{\eta\omega\eta^{-1}\omega^{-1} \mid \eta \in S\langle B, E\rangle,\ \omega \in \Gamma^{i-1}K\}\rangle$ für $i \geq 1$. Wir zeigen durch Induktion nach k, daß es Terme $K_0, K_1, \ldots$ der Reihe $\Gamma^0 K, \Gamma^1 K, \ldots$ gibt, so daß $\omega \in K_k$ zur Konsequenz hat, daß $\omega \mid B^k$ homotop $\sigma \mid B^k$ ist.

Sei $E^k := q^{-1}(B^k)$ und $S\langle B^k, E\rangle$ bezeichne $S\langle B^k, E^k\rangle$.

Induktionsanfang: Man hat $S\langle B^0, E\rangle = \pi_0(X)$ und $S\langle B^0, \Omega_\sigma^n(B)\rangle = \pi_n(X, *)$. Die Existenz von K_0 folgt nun aus der Voraussetzung, daß X schwach nilpotent ist.

Induktionsschritt: Die Existenz von K_k sei schon gezeigt, $k \geq 0$. Sei $\eta \in S\langle B, E\rangle$, $\omega \in K_k$. Wir können annehmen, daß $\omega \mid B^k = \eta\omega\eta^{-1} \mid B^k = \sigma \mid B^k$ ist. Denn ist das nicht der Fall, so können ω und $\eta\omega\eta^{-1}$ jedenfalls entsprechend vertikal deformiert werden. Die im folgenden berechneten Hindernisse hängen aber wegen des Lemmas nicht von der Wahl dieser Deformationen ab.

Das Hindernis für eine Homotopie rel B^k zwischen $\omega \mid B^{k+1}$ und $\sigma \mid B^{k+1}$ ist ein Element von $[\vee_j S_j^{k+1}, \Omega_*^n(X)]$, wenn B^{k+1} die Cofaser einer Abbildung $\vee_j S_j^k \to B^k$ ist [1]. Das Hindernis ist also ein Element $(a_j)_{j \in J}$ aus $\Pi_j \pi_{n+k+1}(X, *)$ (J eine Indexmenge). Das entsprechende Hindernis für $\eta\omega\eta^{-1}\omega^{-1}$ ist dann $(\hat{z}(a_j)a_j^{-1})_{j \in J}$, wobei z das durch $\eta(*)$ repräsentierte Element in $\pi_0(X)$ ist. (In der folgenden Bemerkung wird die Form dieses Hindernisses hergeleitet). Daraus folgt die Existenz von K_{k+1}.

BEMERKUNG: Sei $B = B' \cup e_m$ und $q: E \to B$ ein gruppenähnlicher Raum über B mit Faser X, sei $E' = q^{-1}(B')$. Ist $u \in \langle B', E' \rangle^*$ (insbesondere ist also $u(*) = *$), so ist das Hindernis für eine Erweiterung von u auf B ein Element $a \in \pi_{m-1}(X, *)$. Ist $v \in \langle B', E' \rangle^*$, so ist das Hindernis für eine Erweiterung des Produktes uv gerade das Produkt (oder die Summe) der Hindernisse. Ist v jedoch ein Element von $\langle B', E' \rangle$, so ist das Hindernis zur Erweiterung von v die erste Komponente eines Elementes $(b, z) \in [S^{m-1}, X]^{fr} = \pi_{m-1}(X, *) \times_s \pi_0(X)$, wobei $z \in \pi_0(X)$ durch $v(*)$ repräsentiert wird. Die zweite Komponente ist wichtig als Index, der in Rechnungen eingeht, wie folgendes Beispiel zeigt: Das Hindernis für eine Erweiterung von vuv^{-1} berechnet sich aus $(b, z)(a, 1)(b, z)^{-1} = (\hat{z}(a), 1)$ als $\hat{z}(a) \in \pi_{m-1}(X, *)$. Entsprechendes gilt für Hindernisse zur Erweiterung von Homotopien.

KOROLLAR: *Sei $E \to B$ eine Serre-Faserung mit Faser X nilpotent (d.h. jede Zusammenhangskomponente von X ist nilpotent), sei $A \subset B$ und seien die Voraussetzungen von Satz* 1 *erfüllt. Dann ist $\langle B, E \rangle^A$ nilpotent.*

BEWEIS: Zu zeigen ist, dass jede Komponente von $\langle B, E \rangle^A$ nilpotent ist. Sei $\sigma \in \langle B, E \rangle^A$, dann ist $\pi_n(\langle B, E \rangle^A, \sigma) = S\langle B, \Omega^n_\sigma(B) \rangle^A$ für $n \geq 1$ nach [4], Cor. 7.4, $\Omega^n_\sigma(B)$ hat $\Omega^n_{\sigma(*)}X$ als Faser, und $\Omega^1_{\sigma(*)}X$ ist schwach nilpotent.

4. Beweis von Satz 2

LEMMA: *Sei (B, A) ein endliches CW-Paar, sei $E \to E_1$ ein Morphismus gruppenähnlicher Räume über B. Die induzierte Abbildung der Fasern $X \to X_1$ habe die folgenden Eigenschaften:* (*i*) *Der Homomorphismus $\pi_0(X) \to \pi_0(X_1)$ ist P-Lokalisierung.* (*ii*) *Die auf den Komponenten der Einselemente induzierte Abbildung $X_* \to X_{1*}$ ist eine Lokalisierung nach P.*

Mit σ bzw. σ_1 werde das Einselement von $E \to B$ bzw. dasjenige von $E_1 \to B$ bezeichnet. Dann ist die kanonische Abbildung $S\langle B, E \rangle^A \to S\langle B, E_1 \rangle^A$ Lokalisierung nach P.

BEWEIS: Wir beweisen zuerst, dass $S\langle B, E \rangle \to S\langle B, E_1 \rangle$ eine P-Lokalisierung ist. Dazu können wir annehmen, dass $B^0 = \{*\}$ ist. Wir zeigen durch Induktion nach k, dass $S\langle B^k, E \rangle \to S\langle B^k, E_1 \rangle$ eine Lokalisierung nach P ist.

Für $k=0$ folgt dies aus der Voraussetzung (i). Nehmen wir also an, das Resultat sei richtig für ein $k \geq 0$. Seien $\rho: S\langle B^{k+1}, E\rangle \to S\langle B^k, E\rangle$ und $\rho_1: S\langle B^{k+1}, E_1\rangle \to S\langle B^k, E_1\rangle$ induziert durch die Restriktion von Schnitten auf das k-Skelett. Betrachten wir das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & S\langle B^{k+1}, E\rangle & \xrightarrow{\rho} & S\langle B^k, E\rangle \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_1 & \longrightarrow & S\langle B^{k+1}, E_1\rangle & \xrightarrow{\rho_1} & S\langle B^k, E_1\rangle. \end{array}$$

Hier bezeichnet K bzw. K_1 den Kern von ρ bzw. ρ_1. Sei $\sigma_k = \sigma \mid B^k$ und $((\sigma_1)_k = \sigma_1 \mid B^k$. Aufgrund des Lemmas in Abschnitt 3 ist K gleich der Menge der Homotopieklassen rel B^k von Erweiterungen von σ_k auf B^{k+1}, entsprechend ist K_1 gleich der Menge der Homotopieklassen rel B^k von Erweiterungen von $(\sigma_1)_k$ auf B^{k+1}. Mit den Identifikationen aus dem Beweis des Satzes von Abschnitt 3 ist dann $K \to K_1$ eine P-Lokalisierung. Nach Induktionsvoraussetzung ist $S\langle B^k, E\rangle \to S\langle B^k, E_1\rangle$ eine Lokalisierung. Wenn wir zeigen können, dass Bild$(\rho) \to$ Bild(ρ_1) Lokalisierung ist, folgt die Behauptung für $k+1$ aus der Exaktheit der P-Lokalisierung [6].

Man beweist dies wiederum mithilfe von Hindernistheorie. Zum Beispiel sieht man wie folgt, dass Bild(ρ_1) eine P-lokale Gruppe ist: Sei $\alpha \in S\langle B^{k+1}, E_1\rangle$ und $\rho_1(\alpha) = \beta^n$, $\beta \in S\langle B^k, E_1\rangle$ und $n > 0$ relativ prim zu allen Elementen aus P. Sei β' ein Repräsentant von β. Das Hindernis für eine Erweiterung von β' auf B^{k+1} kann als erste Komponente eines Elementes h der nilpotenten P-lokalen Gruppe $K_1 \times_s \pi_0(X_1)$ interpretiert werden (3. Bemerkung). Das Hindernis für $(\beta')^n$ berechnet sich als erste Komponente von h^n und ist 0. Folglich verschwindet auch das Hindernis zur Erweiterung von β', und es ist $\beta \in$ Bild(ρ_1).

Mit ähnlichen Argumenten erhält man, dass $S\langle B, E\rangle^A \to S\langle B, E_1\rangle^A$ eine Lokalisierung ist.

KOROLLAR: *Sei $E \to B$ eine Serre-Faserung, so dass die Voraussetzungen des ersten Teils von Satz 2 erfüllt sind. Dann ist für $u \in \langle B, E\rangle^A$ die durch $\langle B, E\rangle^A \to \langle B, E_{fP}\rangle^A$ induzierte Abbildung der Komponente von u in $\langle B, E\rangle^A$ in die Komponente von $c \cdot u$ in $\langle B, E_{fP}\rangle^A$ eine Lokalisierung.*

Von Satz 2 bleibt nun noch zu zeigen, dass $S\langle B, E\rangle^A \to S\langle B, E_{fP}\rangle^A$ endliche Fasern hat. Wir beweisen dies erst für $A = *$, dann für $A = \emptyset$, und schliesslich folgt der allgemeine Fall daraus.

Sei $q: E \to B$ eine Serre-Faserung mit Faser X und sei $u: B \to E$ ein Schnitt. Sei $u_k = u \mid B^k$, sei $E^k = q^{-1}(B^k)$, sei res: $\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle^* \to \langle B^k, E^k\rangle^*$ die Restriktionsabbildung. Sei $\langle B^k, E^k\rangle^*_u$ die Zusammenhangskomponente von u_k und $\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle^*_u$ sei $\mathrm{res}^{-1}(\langle B^k, E^k\rangle^*_u)$. Dann ist $\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle^*_u \to \langle B^k, E^k\rangle^*_u$ eine Faserung mit Faser $\mathrm{res}^{-1}(u_k)$. Das Endstück der exakten Homotopiesequenz dieser Faserung liest sich dann wie folgt: $\cdots \longrightarrow \pi_1(\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle^*_u, u_{k+1}) \longrightarrow$

$$\pi_1(\langle B^k, E^k\rangle^*_u, u_k) \xrightarrow{d} \pi_0(\mathrm{res}^{-1}(u_k)) \longrightarrow \pi_0(\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle^*_u) \longrightarrow \{\langle u_k\rangle\}.$$

Hier ist $\pi_0(\mathrm{res}^{-1}(u_k))$ gleich der Menge der Homotopieklassen rel B^k von Erweiterungen des Schnittes u_k auf B^{k+1}. Man kann also $\pi_0(\mathrm{res}^{-1}(u_k))$ nach [1] so mit $[\vee_j S_j^{k+1}, X]$ identifizieren, daß d ein Homomorphismus ist.

Wir beweisen nun unter den Voraussetzungen des Satzes durch Induktion nach k, daß $S\langle B^k, E^k\rangle^* \to S\langle B^k, E^k_{fP}\rangle^*$ endliche Fasern hat, Für $k = 0$ ist das klar. Angenommen also, die Behauptung sei schon für $k \geq 0$ gezeigt. Aufgrund der Induktions-voraussetzung und des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
S\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle^* & \xrightarrow{\mathrm{res}_*} & S\langle B^k, E^k\rangle^* \\
\downarrow & & \downarrow \\
S\langle B^{k+1}, E^{k+1}_{fP}\rangle^* & \xrightarrow{\mathrm{res}_*} & S\langle B^k, E^k_{fP}\rangle
\end{array}$$

genügt es zu zeigen: Ist $\langle u_k\rangle \in S\langle B^k, E^k\rangle^*$, dann hat $\mathrm{res}_*^{-1}\{\langle u_k\rangle\} \to S\langle B^{k+1}, E^{k+1}_{fP}\rangle^*$ endliche Fasern. Ist $\mathrm{res}_*^{-1}\{\langle u_k\rangle\}$ leer, so ist nichts zu zeigen. Sonst können wir annehmen, daß $u_{k+1} \in \langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle^*$ existiert mit $u_{k+1} \mid B^k = u_k$; mit $\bar{u}_{k+1}$ bezeichnen wir die Komposition von u_{k+1} mit $E^{k+1} \to E^{k+1}_{fP}$, und es sei $\bar{u}_k = \bar{u}_{k+1} \mid B^k$. Betrachten wir jetzt das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow \pi_1(\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle^*_u, u_{k+1}) & \longrightarrow & \pi_1(\langle B^k, E^k\rangle^*_u, u_k) & \xrightarrow{d} \\
\downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow \pi_1(\langle B^{k+1}, E^{k+1}_{fP}\rangle^*_{\bar{u}}, \bar{u}_{k+1}) & \longrightarrow & \pi_1(\langle B^k, E^k_{fP}\rangle^*_{\bar{u}}, \bar{u}_k) & \xrightarrow{d}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\xrightarrow{d} \pi_0(\mathrm{res}^{-1}(u_k)) & \xrightarrow{g} & \pi_0(\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle^*_u) & \longrightarrow * \\
\downarrow & & \downarrow & \\
\xrightarrow{d} \pi_0(\mathrm{res}^{-1}(\bar{u}_k)) & \xrightarrow{g} & \pi_0(\langle B^{k+1}, E^{k+1}_{fP}\rangle^*_{\bar{u}}) & \longrightarrow *
\end{array}$$

(Zur Bezeichnungsweise: Hier ist wie bei den einleitenden Bemerkungen zu Beginn des Beweises $\langle B^k, E^k\rangle_u^*$ die Zusammenhangskomponente von u_k in $\langle B^k, E^k\rangle^*$ und $\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle_u^* = \mathrm{res}^{-1}\langle B^k, E^k\rangle_u^*$, entsprechend für $\bar{u}$ in der unteren Zeile).

Die ersten beiden senkrechten Pfeile sind Lokalisierungen nach 3. Lemma. Der dritte Pfeil ist Lokalisierung, wenn die anfangs skizzierten Identifizierungen vorgenommen werden. Ferner operiert die Gruppe $\pi_1(\langle B^k, E^k\rangle_u^*, u_k)$ vermöge des Homomorphismus d auf $\pi_0(\mathrm{res}^{-1}(u_k))$, desgleichen $\pi_1(\langle B^k, E^k_{fP}\rangle_{\bar{u}}^*, \bar{u}_k)$ auf $\pi_0(\mathrm{res}^{-1}(\bar{u}_k))$, die Orbiten sind jeweils die Fasern von g. Aus der Exaktheit des Diagramms folgt die Induktionsbehauptung.

Bemerkung: Der Homomorphismus d wird wie folgt durch das Differenzenelement [1] definiert: Ein Element $\alpha \in \pi_1(\langle B^k, E^k\rangle_u^*, u_k)$ wird durch eine Selbsthomotopie H_t von u_k repräsentiert und $d(\alpha) := d(u_{k+1}, H_t, u_{k+1})$.

Wir wollen jetzt die entsprechenden Überlegungen für den Fall der freien Schnitte durchführen.

Sei $\widetilde{\mathrm{res}}$: $\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle \to \langle B^k, E^k\rangle$ die Restriktionsabbildung. Es genügt für $\langle u_k\rangle \in S\langle B^k, E^k\rangle$ zu zeigen, daß $\widetilde{\mathrm{res}}_*^{-1}\{\langle u_k\rangle\} \to S\langle B^{k+1}, E^{k+1}_{fP}\rangle$ endliche Fasern hat. Sei u_{k+1} eine Erweiterung von u_k auf B^{k+1}, sei $\langle B^k, E^k\rangle_u$ die Zusammenhangskomponente von u_k und $\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle_u = \widetilde{\mathrm{res}}^{-1}\langle B^k, E^k\rangle_u$. Dann hat man wie eben ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow \pi_1(\langle B^k, E^k\rangle_u, u_k) & \xrightarrow{\tilde{d}} & \pi_0(\widetilde{\mathrm{res}}^{-1}(u_k)) & \longrightarrow & \pi_0(\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle_u) & \longrightarrow & * \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\longrightarrow \pi_1(\langle B^k, E^k_{fP}\rangle_{\bar{u}}, \bar{u}_k) & \xrightarrow{\tilde{d}} & \pi_0(\widetilde{\mathrm{res}}^{-1}(\bar{u}_k)) & \longrightarrow & \pi_0(\langle B^{k+1}, E^{k+1}\rangle_{\bar{u}}) & \longrightarrow & *
\end{array}$$

Es ist $\pi_0(\widetilde{\mathrm{res}}^{-1}(u_k)) = \pi_0(\mathrm{res}^{-1}(u_k))$, und wir identifizieren $\pi_0(\widetilde{\mathrm{res}}^{-1}(u_k))$ (bzw. $\pi_0(\widetilde{\mathrm{res}}^{-1}(\bar{u}_k))$) wie vorher mit einer Gruppe. Die Gruppe $F := \pi_1(\langle B^k, E^k\rangle_u, u_k)$ (bzw. $\bar{F} := \pi_1(\langle B^k, E^k_{fP}\rangle_{\bar{u}}, \bar{u}_k))$ ist nilpotent; die Abbildung $\tilde{d}$ ist jedoch in diesem Falle ein gekreuzter Homomorphismus. Genauer gilt folgendes: Sei $\rho: F \to \pi_1(X, *)$ durch Einschränkung der Selbsthomotopien auf den Basispunkt erklärt (entsprechend $\bar{\rho}: \bar{F} \to \pi_1(X_P, *)$. Man hat eine kanonische Operation $a \mapsto \hat{a}$ der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, *)$ auf $\pi_0(\widetilde{\mathrm{res}}^{-1}(u_k)) = [\vee S_j^{k+1}, X]$ (entsprechend für $\pi_1(X_P, *)$). Für $\tilde{d}$ gilt dann die Formel

$$\tilde{d}(xy) = \tilde{d}(x)\widehat{\rho(x)}(\tilde{d}(y)) \text{ für } x, y \in F.$$

(Entsprechendes gilt für $x, y \in \bar{F}$). Ferner operiert F auf $\pi_0(\widetilde{\mathrm{res}}^{-1}(u_k))$ vermöge $\tilde{d}$ (entsprechend $\bar{F}$ auf $\pi_0(\widetilde{\mathrm{res}}^{-1}(\bar{u}_k))$). Damit folgt die Behauptung aus [8].

Bemerkung: Die Abbildung $\tilde{d}$ wird analog zum punktierten Fall durch ein Differenzenelement für freie Homotopien gegeben. Die übliche Additionsformel geht dann in die Formel für einen gekreuzten Homomorphismus über.

Es bleibt noch zu zeigen, dass für $A \neq \emptyset$ die Abbildung $S\langle B, E\rangle^A \to S\langle B, E_{fP}\rangle^A$ endliche Fasern hat. Sei $E \mid A := q^{-1}(A)$, und betrachten wir die durch Restriktion von Schnitten definierte Faserung $\langle B, E\rangle \to \langle A, E \mid A\rangle$ mit Faser $\langle B, E\rangle^A$. Die Zeilen des folgenden Diagramms sind exakt als Stücke von Homotopiesequenzen von Faserungen:

$$\begin{array}{ccccccc}
S\langle B, E\rangle & \longleftarrow & S\langle B, E\rangle^A & \longleftarrow & \pi_1(\langle A, E \mid A\rangle, \tau) & \longleftarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
S\langle B, E_{fP}\rangle & \longleftarrow & S\langle B, E_{fP}\rangle^A & \longleftarrow & \pi_1(\langle A, E_{fP} \mid A\rangle, \bar{\tau}) & \longleftarrow & \cdots .
\end{array}$$

Der erste senkrechte Pfeil hat endliche Fasern, der dritte senkrechte und alle folgenden sind Lokalisierungen von endlich erzeugten nilpotenten Gruppen. (Hier ist A nicht notwendig zusammenhängend, hat aber endlich viele Zusammenhangskomponenten; für eine solche Basis gilt der Satz von Abschnitt 3, wenn die Voraussetzungen – wie hier – über jeder Komponente der Basis erfüllt sind). Daraus und aus der Exaktheit folgt die Behauptung.

Appendix

Beweis der Behauptung von 2.4:

Nach [5] ist $\mathrm{Fas}(E_1, E_2)$ homeomorph zum Schnittraum $\langle B_1, q \cdot_1 r\rangle$, wobei $q \cdot r\colon E_1 \cdot E_2 \to B_1 \times B_2$ eine gewisse Funktionalfaserung ist und $q \cdot_1 r$ die Zusammensetzung $E_1 \cdot E_2 \to B_1 \times B_2 \to B_1$. Die Faser von $q \cdot_1 r$ ist $\mathrm{Fas}(F_1, E_2)$, diejenige von $q \cdot_1 \bar{r}$ ist $\mathrm{Fas}(F_1, E_{2P})$, wobei F_1 auch die triviale Faserung $F_1 \to *$ bezeichnet. Der Abbildung $\mathrm{Fas}(E_1, E_2) \to \mathrm{Fas}(E_1, E_{2P})$ entspricht die Abbildung von Schnitträumen $\langle B_1, q \cdot_1 r\rangle \to \langle B_1, q \cdot_1 \bar{r}\rangle$.

Es ist $\mathrm{Fas}(E_1, E_2)$ der Pullback der durch q und r induzierten Abbildungen $\mathrm{Abb}(B_1, B_2) \to \mathrm{Abb}(E_1, B_2) \leftarrow \mathrm{Abb}(E_1, E_2)$, also ist $\mathrm{Fas}(E_1, E_2)$ nilpotent. Entsprechend folgt, dass $\mathrm{Fas}(F_1, E_2)$ und $\mathrm{Fas}(F_1, E_{2P})$ nilpotent sind.

Unter unseren Voraussetzungen ist F_{2P} nach [6] die Faser von $E_{2P} \to B_{2P}$. Man hat das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Abb}(F_1, F_2) & \longrightarrow & \mathrm{Fas}(F_1, E_2) & \longrightarrow & B_2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Abb}(F_1, F_{2P}) & \longrightarrow & \mathrm{Fas}(F_1, E_{2P}) & \longrightarrow & B_{2P}.
\end{array}$$

Es folgt, dass $\mathrm{Fas}(F_1, E_2) \to \mathrm{Fas}(F_1, E_{2P})$ Komponenten lokalisiert.

Da $\mathrm{Abb}(F_1, F_2) \to \mathrm{Abb}(F_1, F_{2P})$ endlich-zu-eins auf der Menge der Wegekomponenten ist, so ist auch Fas $(F_1, E_2) \to \mathrm{Fas}(F_1, E_{2P})$ endlich-zu-eins auf der Menge der Wegekomponenten.

Jetzt bemerken wir, dass Satz 2 auch noch unter folgender Abschwächung der Voraussetzungen gilt: Sei $\bar{q} : \bar{E} \to B$ eine Serre-Faserung und $c : E \to \bar{E}$ eine Abbildung über B, so dass c auf den Fasern Komponenten lokalisiert und endlich-zu-eins auf der Menge der Komponenten der Fasern ist.

Damit folgt die Behauptung.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H.J. BAUES: *Obstruction Theory.* Lecture Notes in Math. 628. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.

[2] A.J. BERRICK: The Samuelson ex-product. *Quart. J. Math. (2) 27* (1976) 173–180.

[3] P.I. BOOTH and R. BROWN: Spaces of partial maps, fibred mapping spaces and the compact-open topology. *Gen. Top. and its Applic. 8* (1978) 181–195.

[4] P.I. BOOTH and R. BROWN: On the application of fibred mapping spaces to exponential laws for bundles, ex-spaces and other categories of maps. *Gen. Top. and its Applic. 8* (1978) 165–179.

[5] P.I. BOOTH, Ph.R. HEATH and R.A. PICCININI: Fibre preserving maps and functional spaces. Lecture Notes in Math. 673. Algebraic Topology, Proceedings, Vancouver 1977, 158–167. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1978.

[6] A.K. BOUSFIELD and D.M. KAN: *Homotopy limits, completions and localizations.* Lecture Notes in Math. 304. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1972.

[7] H. FEDERER: A study of function spaces by spectral sequences. *Trans. Amer. Math. Soc. 82* (1956) 340–361.

[8] P.J. HILTON: On orbit sets for group actions and localization. Lecture Notes in Math. 673. Algebraic Topology, Proceedings, Vancouver 1977, 185–201. Springer-Verlag 1978.

[9] P.J. HILTON, G. MISLIN and J. ROITBERG: *Localization of nilpotent groups and spaces.* Mathematics Studies 15, North-Holland/American Elsevier 1975.

[10] P.J. HILTON, G. MISLIN, J. ROITBERG, and R. STEINER: On free maps and free homotopies into nilpotent spaces. Lecture Notes in Math. 673. Algebraic Topology, Proceedings, Vancouver 1977, 202–218. Springer-Verlag 1978.

[11] P.J. KAHN: Mixing homotopy types of manifolds. *Top. 14* (1975) 203–216.

[12] J. ROITBERG: Note on nilpotent spaces and localization. *Math. Z. 137* (1974) 67–74.
[13] H. SCHEERER: Bemerkungen über Gruppen von Homotopieklassen. *Archiv der Math. 28* (1977) 301–307.
[14] H. SCHEERER: Localisation des espaces de sections et de rétractions. *C.R. Acad. Sc. Paris, t. 287* (1978) Série A, 851–853.
[15] D. SULLIVAN: Infinitesimal computations in topology. *Public Math. 47* (1977). Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris.
[16] G.W. WHITEHEAD: On mappings into grouplike spaces. *Comment. Math. Helv. 28* (1954) 320–327.

(Oblatum 16–II–1979 & 17–IV–1979)

1. Math. Inst.
Freie Universität Berlin
Hüttenweg 9
D-1000 Berlin 33