COMPOSITIO MATHEMATICA

BERND ROSENBERGER
EBERHARD SCHOCK

# Über nukleare $(F)$-Räume mit Basis

*Compositio Mathematica*, tome 25, n° 2 (1972), p. 207-219
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1972__25_2_207_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 25, Fasc. 2, 1972, pag. 207-219
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

# ÜBER NUKLEARE ($F$)-RÄUME MIT BASIS

von

Bernd Rosenberger und Eberhard Schock

Von Dynin und Mitiagin [1], [3] wurde gezeigt, daß in einem nuklearen ($F$)-Raum jede Basis absolut ist. Wojtyński [8] gelang die Umkehrung dieser Aussage: ist in einem ($F$)-Raum mit Basis jede Basis absolut, so ist der Raum nuklear. Hier werden nun zunächst analoge Aussagen für $\varphi$-nukleare ($F$)-Räume bewiesen, nämlich daß in einem $\varphi$-nuklearen ($F$)-Raum mit Basis jede Basis $\varphi$-absolut ist und daß andererseits ein ($F$)-Raum mit Basis $\varphi$-nuklear ist, wenn in ihm jede Basis $\varphi$-absolut ist. Dabei heißt ein topologischer linearer Raum $E$ $\varphi$-nuklear, wenn es zu jeder Nullumgebung $U$ der Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ gibt, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\delta_n(V, U)) < \infty$, wobei $\delta_n(V, U)$ die $n$-ten Durchmesser von $V$ bezüglich $U$ bezeichnen und $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige, streng monoton steigende, subadditive Funktion mit $\varphi(0) = 0$ ist (vgl. [6]). Im Gegensatz zu [8] wurde in [7] gezeigt, daß die Nuklearität eines ($F$)-Raumes $E$ schon dann nachgewiesen werden kann, wenn man Aussagen über das Verhalten nur einer einzigen Basis hat: nämlich, wenn in $E$ eine Basis existiert, die sowohl $p$-absolut als auch $q$-absolut ist mit $p \neq q$, $p \geqq 1$, $q \geqq 1$. Hier soll nun ferner die Nuklearität eines ($F$)-Raumes $E$ für den Fall bewiesen werden, daß in $E$ eine $p$-absolute Basis mit $0 < p < 1$ existiert. Insbesondere ist dann für solche Funktionen $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, die eine echte Teilklasse der Klasse aller nuklearen Räume beschreiben, ein ($F$)-Raum mit Basis genau dann $\varphi$-nuklear, wenn eine Basis $\varphi$-absolut ist.

## 1.

**1.1.** Eine Folge $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ($\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$) von Elementen $e_0, e_1, \ldots$ eines lokalkonvexen Raumes $E$ heißt bekanntlich eine *Basis*, wenn es zu jedem $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Zahlenfolge $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gibt, so daß gilt

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \xi_k e_k .$$

Durch die Zuordnungen $x \mapsto \xi_k$ werden auf $E$ lineare Funktionale $f_k$ mit $f_k(x) = \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$, definiert; dabei gilt $f_i(e_k) = \delta_{ik}$.

Eine Basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichstetig*, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ gibt, so daß die Ungleichungen

$$|f_k(x)|p_U(e_k) \leqq p_V(x), \qquad k \in \mathbb{N}$$

für alle $x \in E$ gelten. Die linearen Funktionale $f_k$ sind dann stetig. Dabei seien $\mathfrak{U}(E)$ die Nullumgebungsbasis von absolutkonvexen abgeschlossenen Nullumgebungen von $E$ und $p_U$ das Minkowski-Funktional $p_U(x) := \inf\{\rho > 0 : x \in \rho U\}$. Bekanntlich ist in einem $(F)$-Raum, d.h. in einem vollständigen metrisierbaren lokalkonvexen Raum, jede Basis gleichstetig.

**1.2.** Für zwei Teilmengen $A$ und $B$ eines lokalkonvexen Raumes $E$ mit $A \subset B$ bezeichnet man mit

$$\delta_n(A, B) = \inf\{\delta : A \subset \delta B + E_n\},$$

wobei das Infimum über alle Teilräume $E_n \subset E$ mit $\dim E_n \leqq n$ gebildet wird, den *n-ten (Kolmogorov-)Durchmesser von A bezüglich B*. Wir nennen $E$ *$\varphi$-nuklear* (vgl. [6]), wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V \subset U$ gibt, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\delta_n(V, U)) < \infty.$$

Dabei sei $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige, streng monoton steigende subadditive Funktion mit $\varphi(0) = 0$, die ohne Einschränkung als konkav [5] angenommen und bei der ohne Einschränkung $\varphi(1) = 1$ gewählt werden soll. Da ein lokalkonvexer Raum $E$ genau dann nuklear ist, wenn für alle $U \in \mathfrak{U}(E)$ ein $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $\sum \delta_n(V, U) < \infty$ existiert [3], folgt aus der Subadditivität von $\varphi$, daß jeder $\varphi$-nukleare Raum auch nuklear ist.

Zum Beweis des Hauptergebnisses dieses Abschnittes, Satz 1.8. benötigen wir die folgenden Lemmata (vgl. auch [3]).

**1.3.** LEMMA. *Sei $U_\infty$ die Einheitskugel in dem Banachraum $l^\infty$ der beschränkten Zahlenfolgen. Sei $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\delta_0 \geqq \delta_1 \geqq \cdots > 0$. Ferner sei*

$$B := \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty : \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{-1}|\xi_k| \leqq 1\}.$$

*Dann gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen*

$$(n+1)^{-1}\delta_n \leqq \delta_n(B, U_\infty) \leqq \delta_n.$$

BEWEIS. (i) Wir beweisen zunächst die rechte Ungleichung. Dazu betrachten wir in $l^\infty$ die linearen Teilräume

$$E_n := \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \lambda^\infty : \xi_k = 0 \text{ für } k \geqq n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gelten wegen

$$\delta_n^{-1} \sup_{k\geqq n} |\xi_k| \leqq \delta_n^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k| \leqq \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k^{-1} |\xi_k| \leqq 1$$

die Beziehungen $B \subset \delta_n U_\infty + E_n$, so daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\delta_n(B, U_\infty) \leqq \delta_n.$$

(ii) Wegen

$$(n+1)^{-1}\delta_n \sum_{k=0}^{n} \delta_k^{-1} |\xi_k| \leqq (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} |\xi_k| \leqq \sup_{k\leqq n} |\xi_k| \leqq 1$$

erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$: $U_\infty \cap E_{n+1} \subset \delta_n^{-1}(n+1)B$, so daß

$$(n+1)^{-1}\delta_n \leqq \delta_n(B, U_\infty)$$

(vgl. [4]).

**1.4.** LEMMA. *Seien* $\alpha_k \geqq 0$. *Sei*

$$A := \{\{\xi_k\} \in \lambda^\infty : \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{-1} |\xi_k| \leqq 1 \text{ mit } \xi_k = 0 \text{ für } \alpha_k = 0\}$$

(*wobei* 0/0 *durch* 0 *zu ersetzen ist*). *Ferner gelte*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)\delta_k(A, U_\infty)) \leqq 1.$$

*Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha_k) \leqq 1.$$

BEWEIS. Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)\delta_k(A, U_\infty)) \leqq 1$ gilt $\delta_k(A, U_\infty) \to 0$ für $k \to \infty$. Damit ist die Menge $A$ kompakt in $\lambda^\infty$, so daß $\alpha_k \to 0$. Sei nun $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Permutation der natürlichen Zahlen, so daß die Folge $\{\alpha_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. Aus Lemma 1.3. erhalten wir dann mit $\delta_n := \alpha_{k_n}$ auch $\delta_n \leqq (n+1)\delta_n(A, U_\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\delta_k) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)\delta_k(A, U_\infty)) \leqq 1.$$

**1.5.** LEMMA. *Sei E ein lokalkonvexer Raum. E ist genau dann* $\varphi$*-nuklear, wenn es zu jeder Nullumgebung* $U \in \mathfrak{U}(E)$ *und zu jedem* $p > 0$ *eine Nullumgebung* $V_p \in \mathfrak{U}(E)$ *gibt, so daß*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)^p \delta_k(V_p, U)) \leqq 1.$$

BEWEIS. Wir beweisen nur die eine Richtung der Aussage. Da $E$ $\varphi$-

nuklear ist, gibt es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ und zu jedem $p > 0$ eine Nullumgebung $W_p \in \mathfrak{U}(E)$ mit $W_p \subset U$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\delta_k(W_p, U)) \leqq 2^{-(p+1)}.$$

Zu $W_p$ findet man eine Nullumgebung $V_p \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V_p \subset W_p$ und $\delta_n(V_p, W_p) \leqq (n+1)^{-p}$, denn $E$ ist als $\varphi$-nuklearer Raum auch nuklear. Somit erhalten wir

$$\delta_{2k}(V_p, U) \leqq \delta_k(V_p, W_p)\delta_k(W_p, U) \leqq (k+1)^{-p}\delta_k(W_p, U), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)^p \delta_k(V_p, U)) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((2k+1)^p \delta_{2k}(V_p, U)) + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((2k+2)^p \delta_{2k+1}(V_p, U)) \\
&\quad \leqq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(2^p (k+1)^p \delta_{2k}(V_p, U)) \leqq 2^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)^p \delta_{2k}(V_p, U)) \\
&\quad \leqq 2^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\delta_k(W_p, U)) \leqq 1.
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun den folgenden wichtigen

**1.6.** SATZ. *Sei $E$ ein $\varphi$-nuklearer $(F)$-Raum mit Basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und Koeffizientenfunktionalen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es zu jeder stetigen Halbnorm $p_i$ eine stetige Halbnorm $p_j$, so daß für alle $x \in E$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)| p_i(e_k)) \leqq \max\{1, p_j(x)\}.$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis in Anlehnung an [3] durch. Da in einem $(F)$-Raum jede Basis gleichstetig ist, gibt es zu jeder stetigen Halbnorm $p_i$ eine stetige Halbnorm $p_m$ mit $p_i(x) \leqq p_m(x)$ und $|f_k(x)| p_i(e_k) \leqq p_m(x)$, $k \in \mathbb{N}$, für alle $x \in E$. Sei nun

$$V_i := \{x \in E : \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| p_i(e_k) \leqq 1\},$$

dann gilt wegen $|f_k(x)f| p_i(e_k) \leqq p_m(x)$, $k \in \mathbb{N}$, schließlich $U_m \subset V_i$, wobei $U_m := \{x \in E : p_m(x) \leqq 1\}$ die zu $p_m$ gehörende abgeschlossene absolutkonvexe Nullumgebung in $E$ ist. Da $E$ $\varphi$-nuklear ist, findet man nach Lemma 1.5. zu $U_m$ eine Nullumgebung $U_n \subset U_m$, d.h. $p_n(x) \geqq p_m(x)$ für $x \in E$, mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)\delta_k(U_n, U_m)) \leqq 1.$$

Da die Basis $\{e_k\}$ gleichstetig ist, findet man zur stetigen Halbnorm $p_n$ wiederum eine stetige Halbnorm $p_j$ mit $p_j(x) \geqq p_n(x)$ und $|f_k(x)|p_n(e_k) \leqq p_j(x)$, $k \in \mathbb{N}$, für $x \in E$. Sei nun

$$q_j(f_k) := \sup\{|f_k(x)| : p_j(x) \leqq 1,\ x \in E\},$$

dann gilt für $p_n(e_k) > 0$

$$|f_k(x)| \leqq \frac{p_j(x)}{p_n(e_k)} \quad \text{und} \quad q_j(f_k) \leqq \frac{1}{p_n(e_k)}.$$

Wir setzen ferner

$$A_j := \left\{x \in E : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f_k(x)|}{q_j(f_k)} \leqq 1;\ f_k(x) = 0 \text{ für } q_j(f_k) = 0\right\},$$

dann gilt wegen

$$p_n(x) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|p_n(e_k) = \sum_{p_n(e_k)>0} |f_k(x)|p_n(e_k) \leqq \sum_{p_n(e_k)>0} \frac{|f_k(x)|}{q_j(f_k)} \leqq 1$$

auch $A_j \subset U_n$. Somit erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$ $\delta_k(A_j, V_i) \leqq \delta_k(U_n, U_m)$, so daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)\delta_k(A_j, V_i)) \leqq 1.$$

Mit $\alpha_k := q_j(f_k)p_i(e_k)$ und

$$A := \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \lambda^\infty : \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{-1}|\xi_k| \leqq 1;\ \xi_k = 0 \text{ für } p_i(e_k) = 0\}$$

gelten dann die Beziehungen $\delta_k(A, U_\infty) = \delta_k(A_j, V_i)$, $k \in \mathbb{N}$, wobei $U_\infty$ die Einheitskugel in $\lambda^\infty$ ist. Nach Lemma 1.4. gilt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(q_j(f_k)p_i(e_k)) \leqq 1.$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)|p_i(e_k)) &= \sum_{p_i(e_k)>0} \varphi(|f_k(x)|p_i(e_k)) \leqq \sum_{p_i(e_k)>0} \varphi(q_j(f_k)p_j(x)p_i(e_k)) \\ &\leqq \max\{1, p_j(x)\} \sum_{p_i(e_k)>0} \varphi(q_j(f_k)p_i(e_k)) \leqq \max\{1, p_j(x)\}\end{aligned}$$

für alle $x \in E$. Dabei beachte man, daß aus $p_i(e_k) > 0$ stets $p_n(e_k) > 0$ und damit $q_j(f_k) < \infty$ für solche natürlichen Zahlen $k$ gilt.

**1.7.** DEFINITION. Eine Basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eines lokalkonvexen Raumes $E$ heißt *φ-absolut*, wenn für jede Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)|p_U(e_k)) \leqq 1 = \varphi(1)$$

für alle $x \in V$ existiert.

Dann besteht für alle $x \in E$ die Identität

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)e_k,$$

wobei die Reihe absolut-$\varphi$-summierbar ist (vgl. [5]). Für $\varphi_p : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $\varphi_p(t) := t^p$, $0 < p \leqq 1$, erhalten wir eine $p$-absolute Basis. Natürlich ist jede $\varphi$-absolute Basis auch 1-absolut (= absolut).

**1.8.** Mit Definition 1.7. lautet dann Satz 1.6.

SATZ. *In einem $\varphi$-nuklearen $(F)$-Raum $E$ mit Basis ist jede Basis $\varphi$-absolut.*

KOROLLAR. *In einem nuklearen $(F)$-Raum $E$ mit Basis ist jede Basis $p$-absolut*, $0 < p \leqq 1$.

## 2.

**2.1.** Sei $P$ eine Menge nichtnegativer Zahlenfolgen $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, so daß

(i) zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in P$ existiert mit $\rho_k > 0$,

(ii) für alle $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in P$ stets eine Folge $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in P$ existiert mit $\sigma_n \geqq \max\{\rho_n, \tau_n\}$.

In [2] wird der Folgenraum

$$\Lambda_\varphi(P) = \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} =: \xi : q_\rho(\xi) := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|\xi_k|\rho_k) < \infty;\ \{\rho_k\} \in P\}$$

mit der durch die Nullumgebungsbasis

$$\{U_{\rho,\varepsilon} := q_\rho^{-1}([0, \varepsilon]) : \{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \rho \in P,\ \varepsilon > 0\}$$

erzeugten Topologie betrachtet. $\Lambda(P)$ bezeichne den Raum $\Lambda_{\mathrm{id}}(P)$. Dieser Folgenraum $\Lambda_\varphi(P)$ ist genau dann lokalkonvex, wenn er zu $\Lambda(P)$ isomorph ist. $\Lambda_\varphi(P)$ ist genau dann $\varphi$-nuklear, wenn es zu jeder Folge $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in P$ eine Folge $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in P$ gibt, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\sigma_n^{-1}\rho_n) < \infty$, wobei $0/0 = 0$ zu setzen ist; wenn es zu jeder Folge $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in P$ eine Folge $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in P$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\sigma_n^{-1}\rho_n) < \infty$ gibt, dann ist $\Lambda_\varphi(P)$ auch lokalkonvex. Ist also $\Lambda_\varphi(P)$ insbesondere $\varphi$-nuklear, so ist $\Lambda_\varphi(P)$ lokalkonvex (vgl. [2] und [6]).

**2.2.** $(F)$-Räume, in denen es eine $\varphi$-absolute Basis gibt, lassen sich nun sehr einfach darstellen. Es gilt nämlich der

SATZ. *Jeder (F)-Raum E mit einer φ-absoluten Basis* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *kann mit einem Folgenraum* $\Lambda_\varphi(P)$ *identifiziert werden.*

BEWEIS. Wir setzen in $E$ das Fundamentalsystem $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Halbnormen von $E$ ohne Einschränkung als monoton wachsend voraus, d.h. für $m \leqq n$ gelte $p_m(x) \leqq p_n(x)$ für alle $x \in E$. Sei nun $P := \{\{p_n(e_k)\}_{n,k\in\mathbb{N}}\}$. Dazu erzeugen wir den Folgenraum $\Lambda_\varphi(P)$. Sei $K: E \to \Lambda_\varphi(P)$ die durch $x \mapsto \{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ definierte lineare Abbildung. Da die Basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\varphi$-absolut ist, existiert zu jeder stetigen Halbnorm $p_i$ eine stetige Halbnorm $p_j$ mit

$$q_i(\{f_k(x)\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)|p_i(e_k)) \leqq 1$$

für $x \in U_j = \{x \in E : p_j(x) \leqq 1\}$, so daß $KU_j \subset V_{i,1}$, wobei $V_{i,1} = \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} : q_i(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|\xi_k|p_i(e_k)) \leqq 1\}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Stetigkeit von $\varphi$ ein $\alpha > 0$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)|\alpha p_i(e_k)) \leqq \varepsilon \text{ für } x \in U_j,$$

so daß $K(\alpha U_j) \subset V_{i,\varepsilon} = \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} : q_i(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|\xi_k|p_i(e_k)) \leqq \varepsilon\}$. $K$ ist also stetig. Da ferner alle Folgen $\{\xi_k e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \Lambda_\varphi(P)$ in $E$ absolut-$\varphi$-summierbar und damit absolut-summierbar sind (vgl. [5]), kann man $x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e_k$ setzen, und es gilt $Kx = \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. $K$ ist also eine Abbildung auf $\Lambda_\varphi(P)$. Wegen

$$p_i(x) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k| p_i(e_k) \leqq \varphi^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|\xi_k|p_i(e_k))\Big) = \varphi^{-1}(q_i(\xi))$$

gilt für die Abbildung $K^{-1} : \Lambda_\varphi(P) \to E$ mit $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \mapsto x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e_k$ dann $K^{-1}(V_{i,1}) \subset U_i$, d.h. $K^{-1}$ ist ebenfalls stetig.

**2.3.** Faßt man die Ergebnisse von Satz 1.8. und Satz 2.2. zusammen, so erhält man den

SATZ. *Jeder φ-nukleare (F)-Raum E mit Basis kann mit einem φ-nuklearen Folgenraum* $\Lambda_\varphi(P)$ *identifiziert werden.*

KOROLLAR. *Jeder φ-nukleare (F)-Raum E mit Basis ist isomorph zu einem φ-nuklearen Folgenraum* $\Lambda(P)$.

BEWEIS. Da $\Lambda_\varphi(P)$ $\varphi$-nuklear ist, ist $\Lambda_\varphi(P)$ lokalkonvex und damit isomorph zu $\Lambda_{\mathrm{id}}(P)$.

## 3.

**3.1.** In diesem Abschnitt beweisen wir zunächst die Umkehrung des Satzes 1.8. Anschließend zeigen wir, daß für gewisse Funktionen $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ein $(F)$-Raum mit Basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ schon dann $\varphi$-nuklear ist, wenn die Basis $\{e_k\}$ $\varphi$-absolut ist. Zum Beweis der Umkehrung von Satz 1.8. benötigen wir den folgenden Satz (vgl. [2], Zusatz zu Satz 9).

SATZ. *Sei $P = \{\{\rho_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}\}$ ein monoton wachsendes (abzählbares) System von Folgen, d.h. für $m \leqq n$ gelte $\rho_{mk} \leqq \rho_{nk}$, $k \in \mathbb{N}$. Der Folgenraum $\Lambda_\varphi(P)$ sei nuklear und lokalkonvex. Dann gibt es zu jeder Folge $\{\rho_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in P$ eine Folge $\{\rho_{mk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in P$, so daß*

$$\sum_{\substack{k=0\\k\notin N_m}}^{\infty} \varphi(\rho_{nk}\rho_{mk}^{-1}) < \infty,$$

*wobei $N_m := \{k \in \mathbb{N} : \rho_{mk} = 0\}$.*

BEWEIS. Wir setzen ohne Einschränkung voraus, daß $\lim_{t\to 0} t^{-1}\varphi(t) = \infty$. Angenommen, es gibt ein $\rho_{n_0} = \{\rho_{n_0 k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in P$, so daß für alle $\rho_m = \{\rho_{mk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in P$ die Reihe

$$\sum_{\substack{k=0\\k\notin N_m}}^{\infty} \varphi(\rho_{n_0 k}\rho_{mk}^{-1})$$

divergiert. Setzt man $\rho_0 = \rho_{n_0}$, dann kann man annehmen, da $P$ ein monoton wachsendes System von Folgen ist und da $\Lambda_\varphi(P)$ nuklear ist, daß

$$\sum_{\substack{k=0\\k\notin N_m}}^{\infty} \varphi(\rho_{0k}\rho_{mk}^{-1}) = \infty$$

für alle $m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_{mk}\rho_{lk}^{-1} < \infty$$

für alle $m, l \in \mathbb{N}$ mit $m < l$. Sei nun $I := \{k \in \mathbb{N} : \rho_{0k} > 0\}$; $k_0$ sei das minimale Element von $I$. Dann wählen wir eine monoton wachsende Folge $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ aus $I$ mit

$$\sum_{\substack{j=k_{i-1}\\j\in I}}^{k_i-1} \varphi(\rho_{0j}\rho_{ij}^{-1}) > \frac{1}{i}.$$

Wir definieren uns nun eine Folge $\xi := \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ und zeigen daß $\xi \in \Lambda(P)$, aber $\xi \notin \Lambda_\varphi(P)$. Sei nämlich $\xi_j = 0$ für $j \notin I$ und $\xi_j = (\rho_{ij})^{-1}$ für $k_{i-1} \leqq j < k_i$ und $j \in I$. Dann haben wir für $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i| \rho_{mi} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i - 1} \rho_{mj} \rho_{ij}^{-1}$$
$$\leqq \sum_{i=0}^{k_m - 1} |\xi_i| \rho_{mi} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i - 1} \rho_{mj} \rho_{m+1,j}^{-1} < \infty,$$

und die Folge $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ gehört zu $\Lambda(P)$. Andererseits aber gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(|\xi_i| \rho_{0i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i - 1} \varphi(\rho_{0j} \rho_{ij}^{-1}) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i};$$

also gehört die Folge $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ nicht zu $\Lambda_\varphi(P)$. $\Lambda_\varphi(P)$ ist somit nach 2.1. nicht lokalkonvex. Aus dem Widerspruch folgt die Behauptung des Satzes.

**3.2.** Als Folgerung aus diesem Satz erhalten wir nun das

LEMMA. *Sei E ein nuklearer (F)-Raum mit φ-absoluter Basis. Dann ist E φ-nuklear.*

BEWEIS. Nach Satz 2.2. ist $E$ topologisch isomorph zu dem nuklearen lokalkonvexen Folgenraum $\Lambda_\varphi(P)$. Da das Fundamentalsystem $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen Halbnormen von $E$ ohne Einschränkung als monoton wachsend vorausgesetzt werden kann, sind die Voraussetzungen von Satz 3.1. erfüllt. $\Lambda_\varphi(P)$ ist also nach 2.1. $\varphi$-nuklear, d.h. $E$ ist ein $\varphi$-nuklearer $(F)$-Raum.

Verwendet man nun ein Ergebnis von W. Wojtyński [8], daß ein $(F)$-Raum $E$ mit Basis nuklear ist, wenn alle Basen in $E$ absolut sind, dann erhalten wir den folgenden

**3.3.** SATZ. *Sind in einem (F)-Raum E mit Basis alle Basen absolut und gibt es eine φ-absolute Basis, dann ist E φ-nuklear.*

KOROLLAR. *Sei E ein (F)-Raum mit Basis. E ist genau dann φ-nuklear, wenn alle Basen in E φ-absolut sind.*

**3.4.** Lemma 3.2. ergibt nun die Frage: Kann man in Lemma 3.2. die Voraussetzung der Nuklearität fallenlassen? Dies führt zu dem folgenden

PROBLEM. *Sei* $\lim_{t \to 0} (\varphi(t))^{-1} t = 0$. *Sei E ein (F)-Raum mit φ-absoluter Basis. Ist E dann nuklear (und damit φ-nuklear)?*

Das Problem läßt sich positiv lösen für $\varphi_p(t) = t^p$, $0 < p < 1$. Dann gilt nämlich

**3.5.** SATZ. *Sei E ein (F)-Raum mit p-absoluter Basis,* $0 < p < 1$. *Dann ist E nuklear.*

BEWEIS. Da die Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $p$-absolut ist, gibt es zu jeder stetigen Halbnorm $p_U$ eine stetige Halbnorm $p_V$, so daß für alle $x \in E$

$$q_U(x) := (\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^p p_U(e_k)^p)^{1/p} \leqq p_V(x).$$

Außerdem gilt wegen

$$p_U(x) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| p_U(e_k) \leqq (\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^p p_U(e_k)^p)^{1/p} = q_U(x),$$

daß die Topologie des lokalkonvexen Raumes $E$ auch durch das System der Quasinormen $q_U$ erzeugt werden kann. Zu $p_U$ betrachten wir nun die Nullumgebung $U_q := \{x \in E : q_U(x) \leqq 1\}$. Ferner sei $W := \{x \in E : \tilde{q}_W(x) := \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| p_V(e_k) \leqq 1\}$, wobei $p_V$ die oben gewählte stetige Halbnorm ist. Wir ordnen nun jeder zu $x \in E$ gehörigen Restklasse aus $E(W) = E/\tilde{q}_W^{-1}(0)$ bzw. $E(U_q) = E/q_U^{-1}(0)$ die Folge $\{f_k(x)p_V(e_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $\{f_k(x)p_U(e_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ zu, dann kann man $E(W)$ bzw. $E(U_q)$ mit einem linearen Teilraum von $\mathfrak{l}^1$ bzw. $\mathfrak{l}^p$ identifizieren. Der kanonischen Abbildung von $E(W)$ auf $E(U_q)$ entspricht dann die durch die Matrix $\{p_V(e_k)^{-1} p_U(e_k)\delta_{ki}\}$ erzeugte Abbildung von $\mathfrak{l}^1$ in $\mathfrak{l}^p$. Aus der Stetigkeit dieser Abbildung und aus der Hölderschen Ungleichung

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_U(e_k)}{p_V(e_k)}\right)^p |\xi_k|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_U(e_k)}{p_V(e_k)}\right)^r\right)^{1/r} \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|$$

für alle $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{l}^1$ mit $1/p = 1/r + 1$ erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_U(e_k)}{p_V(e_k)}\right)^r < \infty$$

mit $r = p/(1-p)$. Damit haben wir zu jeder Nullumgebung $U_q$ eine Nullumgebung $W$ gefunden, so daß die kanonische Abbildung $E(W) \to E(U_q)$ vom Typus $\mathfrak{l}^r$, $r = p/(1-p)$, ist. Daher ist $E$ nuklear (vgl. [4]).

KOROLLAR (1). *Sei $E$ ein $(F)$-Raum mit Basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. $E$ ist genau dann nuklear, wenn die Basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $p$-absolut ist für ein (jedes) $p \in (0, 1)$.*

Als Verschärfung von Satz 3.3. Korollar erhalten wir

KOROLLAR (2). *Sei $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine Funktion mit $\lim_{t\to 0} \varphi(t)t^{-p} > 0$ für ein $p \in (0, 1)$. $E$ sei ein $(F)$-Raum mit Basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. $E$ ist genau dann $\varphi$-nuklear, wenn die Basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\varphi$-absolut ist.*

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.8., Lemma 3.2., Satz 3.5. und der Tatsache, daß jede $\varphi$-absolute Basis, wobei $\lim_{t\to 0} \varphi(t)t^{-p} > 0$ für ein $p \in (0, 1)$, auch $p$-absolut ist.

**3.6.** Ungelöst bleibt das Problem 3.4. also für diejenigen Funktionen $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, für die $\lim_{t\to 0} t(\varphi(t))^{-1} = 0$ und $\lim_{t\to 0} \varphi(t)t^{-p} = 0$ für jedes $p \in (0, 1)$. Ein Beispiel für eine solche Funktion liefert

$\varphi(t) := t(1-\log t)$ für $0 < t < t_0$, $t_0$ geeignet gewählt. Dies führt zu dem Problem, diejenigen stetigen, streng monoton steigenden Funktionen $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(0) = 0$ zu charakterisieren, für die die Nuklearität eines lokalkonvexen Raumes $E$ aus der folgenden Voraussetzung folgt: Zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ gebe es eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V \subset U$, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\delta_n(V, U)) < \infty.$$

**3.7.** Ein lokalkonvexer Raum $E$ mit der Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}(E)$ heiße im folgenden *$N(f)$-Raum* genau dann, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ gibt mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\delta_n(V, U)) < \infty,$$

wobei $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig und streng monoton steigend mit $f(0) = 0$ ist. Topologische Produkte, Quotientenräume nach abgeschlossenen Teilräumen und – für verallgemeinerte Hilberträume – Teilräume von $N(f)$-Räumen sind wieder $N(f)$-Räume. Da aus $\sum_{n=0}^{\infty} f(\delta_n(V, U)) < \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} \delta_n(V, U) = 0$, ist jeder $N(f)$-Raum ein Schwartz-Raum, aber es gibt Schwartz-Räume, die für kein $f$ ein $N(f)$-Raum sind, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei $|c_0|$ die Menge aller positiven monotonen Nullfolgen und

$$\Lambda(|c_0|) = \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|\gamma_k < \infty,\ \{\gamma_k\} \in |c_0|\}.$$

Mit $\beta_n = \sqrt{\gamma_n}$, $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir $U_\beta \subset U_\gamma$ und $\delta_k(U_\beta, U_\gamma) = \sqrt{\gamma_k} \to 0$, wobei $U_\beta := \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \Lambda(|c_0|) : \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|\beta_k \leqq 1\}$. $\Lambda(|c_0|)$ ist also ein Schwartz-Raum. Sei nun $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig, streng monoton steigend mit $f(0) = 0$. Die Nullfolge $\alpha_k := f^{-1}(1/(k+1))$, $k \in \mathbb{N}$, ist positiv und monoton. Für die beschränkte Teilmenge

$$B = \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \Lambda(|c_0|) : \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k| \leqq 1\}$$

von $\Lambda(|c_0|)$ aber gilt $\delta_k(B, U_\alpha) = \alpha_k = f^{-1}(1/(k+1))$, $k \in \mathbb{N}$. Also ist $f(\delta_k(B, U_\alpha)) = (k+1)^{-1}$ nicht summierbar und $\Lambda(|c_0|)$ kein $N(f)$-Raum.

Der folgende, uns von B. S. Mitjagin mitgeteilte Satz zeigt, daß nicht jeder $N(f)$-Raum nuklear ist.

SATZ 1. *Sei $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig, streng monoton mit $f(0) = 0$. Es gelte: Für alle $p > 0$ gebe es positive Zahlen $c_p$ und $\varepsilon_p$, so daß für alle $t \in (0, \varepsilon_p)$ gilt*

$$f(t) \leqq c_p t^p.$$

*Dann gibt es einen nicht nuklearen $N(f)$-Raum.*

BEWEIS: Wir konstruieren einen nicht nuklearen Potenzreihenraum von unendlichem Typus. Sei

$$\Lambda(P) = \{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|\rho^{\alpha_n} < \infty,\ 0 < \rho < \infty\}$$

so gilt bekanntlich für die $n$-ten Durchmesser der Nullumgebungen

$$U_\rho = \{\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|\rho^{\alpha_n} \leqq 1\}$$

die Gleichung $\delta_n(U_{2\rho}, U_\rho) = (\frac{1}{2})^{\alpha_n}$; sei $\beta_n = (\frac{1}{2})^{\alpha_n}$. Wir haben also eine Folge $\{\beta_n\}$ zu konstruieren, für die gilt $\sum_{n=0}^{\infty} f(\beta_n) < \infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^k = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $\varphi = f^{-1}$ und $\gamma_n = f(\beta_n)$. Sei ferner $\mathbb{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $\mathbb{N}$ in abzählbar viele disjunkte abzählbare Teilmengen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ können wir nach Voraussetzung eine Folge $\gamma^{(k)}$ bestimmen mit $\gamma_n^{(k)} = 0$ für $n \notin \mathbb{N}_k$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} \leqq \frac{1}{2^k} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\gamma_n^{(k)})^k = \infty.$$

Sei $\gamma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)}$. Dann ist, weil $\mathbb{N}$ disjunkt zerlegt ist,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \gamma_n^{(k)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}_k} \gamma_n^{(k)} \leqq 1,$$

aber für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\gamma_n)^j = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}_k} \varphi(\gamma_n^{(k)})^j = \infty.$$

Die Folge $\{(\log \beta_n)/(\log \frac{1}{2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\beta_n = \varphi(\gamma_n)$ hat keinen endlichen Häufungspunkt, sie läßt sich somit in eine monoton wachsende Folge $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ umordnen. Der durch die Folge $\{\alpha_n\}$ charakterisierte Potenzreihenraum von unendlichem Typus ist somit zwar ein $N(f)$-Raum, aber nicht nuklear.

Umgekehrt gilt der

SATZ 2. *Sei $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig und streng monoton steigend mit $f(0) = 0$. Es gelte: Für alle $p > 0$ gibt es positive Zahlen $c_p$ und $\varepsilon_p$, so daß für alle $t \in [0, \varepsilon_p]$ gilt*

$$t^p \leqq c_p f(t).$$

*Dann gibt es einen nuklearen Raum $E$, der kein $N(f)$-Raum ist.*

BEWEIS. Wir zeigen, daß der Raum ($s$) der schnell fallenden Zahlenfolgen kein $N(f)$-Raum ist. Wegen

$$\delta_n(U_\sigma, U_\rho) = \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{\log(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^k} \quad \text{mit } k = \log\frac{\sigma}{\rho}$$

und $t^p \leqq c_p f(t)$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f\left(\frac{1}{(n+1)^k}\right) \geqq \frac{1}{c_p}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(n+1)^{kp}} = \infty \text{ für alle } p \leqq \frac{1}{k}.$$

Also ist für alle $\rho$, $\sigma$ mit $\rho \leqq \sigma$

$$\sum f(\delta_n(U_\sigma, U_\rho)) = \infty$$

und ($s$) kein $N(f)$-Raum.

## LITERATUR

A. S. DYNIN and B. S. MITIAGIN
[1] Criterion for nuclearity in terms of approximate dimension. Bull. Acad. Polon. Sci. 8, 535–540 (1960).

C. FENSKE und E. SCHOCK
[2] Nuklearität und lokale Konvexität von Folgenräumen. Math. Nachr. 45, 327–335 (1970).

B. S. MITIAGIN
[3] Approximate dimension and bases in nuclear spaces. Russ. Math. Surveys 16, 59–127 (1961).

A. PIETSCH
[4] Nukleare lokalkonvexe Räume. 2. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1969.

B. ROSENBERGER
[5] $F$-Normideale von Operatoren in normierten Räumen. Ber. Ges. Math. Datenv. Bonn 44 (1971).
[6] $\varphi$-nukleare Räume ,Math. Nachr. 52, 147–160 (1972).

E. SCHOCK
[7] ($F$)-Räume mit $p$-absoluter Basis. Ber. Ges. Math. Datenv. Bonn 10, 23–28 (1969).

W. WOJTIŃSKI
[8] On conditional bases in non-nuclear Fréchet spaces, Studia Math. 35, 77–96 (1970).

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn
D-5300 Bonn, Wegelerstraße 6

(Oblatum 20–VII–1971 & 29–XII–1971)