

COMPOSITIO MATHEMATICA

MANFRED HERRMANN

ULRICH STERZ

Über disjunktheitseigenschaften und reguläre Tensorprodukte

Compositio Mathematica, tome 23, n° 4 (1971), p. 471-477

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1971__23_4_471_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÜBER DISJUNKTHEITSEIGENSCHAFTEN UND REGULÄRE TENSORPRODUKTE

von

Manfred Herrmann und Ulrich Sterz

Herrn Professor Dr. O. H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

1.

In [6] und [7] wurden für Obstruktionsbetrachtungen im Rahmen der Schnitttheorie ein stellentheoretisches Maß – die sogenannte φ -Disjunktheit zweier Körper – eingeführt und der Zusammenhang zwischen linearer Disjunktheit und φ -Disjunktheit beschrieben.

Will man die lineare Disjunktheit zweier Körper $K, L \supset k$ als Abbildungseigenschaft des Tensorprodukts $K \otimes_k L$ erfassen, so wird man auf Untersuchungen des Kerns des kanonischen Homomorphismus $\psi : K \otimes_k L \rightarrow [K, L]$ ([10], III, § 14) geführt. Auf Grund solcher Betrachtungen soll in dieser Note zunächst ein Ergebnis aus [7] (Satz 4) insofern verschärft werden, als wir einen Überblick über diejenigen Stellen φ_i geben, für die allein man die Bedingungen ‘ $K \varphi_i$ -disjunkt L ’ fordern muß, um zusammen mit geeigneten Gradbedingungen die lineare Disjunktheit charakterisieren zu können. In diesem (stellentheoretischen) Rahmen erhalten wir dann in Anlehnung an [4] hinreichende Bedingungen an $K, L \supset k$ für die Regularität des Tensorprodukts $K \otimes_k L$. Diese Bedingungen erzwingen zwar das Verschwinden der globalen homologischen Dimension von $K \otimes_k L$ (vgl. dazu [2], [4]), implizieren jedoch nicht die lineare Disjunktheit von K und L bezüglich k oder die Separabilität von L/k .

2.

Seien K, L Erweiterungskörper eines Körpers k in einem Universalkörper Ω . Mit φ bezeichnen wir eine feste L -Stelle über $k : L \rightarrow \{\Omega, \infty\}$.

2.1. DEFINITION. K heißt φ -disjunkt von L über k , wenn eine Stelle ϕ des Kompositums $K \cdot L$ über k existiert, die φ und den identischen Isomorphismus von K fortsetzt.

Erweitert man den identischen Isomorphismus von K zu einer $K \cdot L$ -Stelle ϕ , so gilt $K \varphi$ -disjunkt L über k für $\varphi = : \phi|L$ [6].

2.2. Sei $[K, L]$ der von K, L in Ω erzeugte Integritätsbereich. Mit ψ bezeichnen wir den kanonischen Homomorphismus von $K \otimes_k L$ auf $[K, L]$:

$$\sum_i r_i \otimes s_i \xrightarrow{\psi} \sum r_i s_i; \quad r_i, s_i \in K, L.$$

Der Kern dieser Abbildung ist genau dann Null, wenn K linear disjunkt von L über k ist [10].

2.3. LEMMA. Sei $L = k(t_1, \dots, t_r)$ eine rein transzendente Erweiterung von k . Aus der Existenz einer $\bar{k}$ -bewerteten L -Stelle φ_0 mit $K \varphi_0$ -disjunkt L über k folgt $\ker \psi = 0$.

BEWEIS. $K \varphi_0$ -disjunkt L über k bedeutet [5] die Freiheit der beiden Körper über k . Im vorliegenden Fall ist L eine reguläre Erweiterung von k (d.h. L linear disjunkt von $\bar{k}$ über k). Aus beiden Aussagen folgt [8] K linear disjunkt von L über k und somit $\ker \psi = 0$.

BEMERKUNG. Ist die Stelle φ_0 des Lemmas sogar k -bewertet, dann kann man $\ker \psi = 0$ ohne zusätzliche Voraussetzungen an L folgern.

2.4. Im folgenden sei $L = k(\vartheta)$ eine einfache algebraische Erweiterung mit dem reduzierten Grad d . Seien $f(x), g(x)$ die Minimalpolynome von ϑ bzgl. k bzw. K .

2.4.1. LEMMA. Der Kern von $\psi : K \otimes_k L \rightarrow [K, L]$ ist ein Hauptideal

BEWEIS. Nach [10], S. 184 (Th. 35) und S. 196 ist

$$k(\vartheta) \otimes_k K \cong K[x]/(f(x)).$$

Sei $\bar{x}$ die Restklasse von x modulo $f(x)$. Dann induziert ψ einen Homomorphismus $\psi^* : K[x]/(f(x)) \rightarrow [k(\vartheta), K] \cong K[x]/(g(x))$ mit

$$\sum a_v \bar{x}^v \xrightarrow{\psi^*} \sum a_v \vartheta^v,$$

woraus $\ker \psi^* = (g(\bar{x}))$ folgt.

2.4.2. LEMMA. Seien K, L wie in 2.4.1. $K \otimes_k L$ enthält genau dann keine nilpotenten Elemente (außer der Null), wenn in der Zerlegung $f(x) = \prod_{i=1}^r g_i(x)^{e_i}$ über K mit $g_1(x) = g(x)$ alle e_i verschwinden.

BEWEIS. Sind alle $e_i = 0$, so zerfällt $f(x)$ über K in paarweise verschiedene irreduzible Polynome, woraus sofort die Behauptung in einer Richtung folgt (vgl. [10], S. 196).

Bezeichnet e_{i_0} den größten positiven Exponenten unter den e_i , so ist $f(x)$ kein Teiler von $\prod_i g_i(x)$, d.h. $\prod_i g_i(\bar{x}) \neq 0$, jedoch $(\prod_i g_i(\bar{x}) p^{e_{i_0}}) = 0$.

2.4.3. LEMMA. K, L wie in 2.4.1. Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ die relativen Isomorphismen von L bzgl. k . Gilt $K \varphi_j$ -disjunkt L über k für alle $j = 1, \dots, d$, so ist $g(\bar{x})$ nilpotent.

BEWEIS. Nach Voraussetzung läßt sich jeder relative Isomorphismus von $L = k(\vartheta)$ über k zu einem relativen Isomorphismus von $K \cdot L = K(\vartheta)$ über K fortsetzen, woraus $(g(x))^{p^e} = f(x)$ für geeignetes e folgt.

BEMERKUNG. Ist insbesondere $e = 0$, d.h. die Grade von ϑ über k und K stimmen überein, dann ist $\ker \psi = 0$.

3.

3.1. Seien $K, L \supset k$ und L sei von endlichem Typ über k , so daß L endlich über der rein transzendenten Erweiterung $k(t_1, \dots, t_r) = k(t)$ ist: $L = k(t)(\vartheta_1, \dots, \vartheta_s) = k(t, \vartheta)$. Die reduzierten Grade

$$[k(t)(\vartheta_1, \dots, \vartheta_i) : k(t)(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{i-1})]_{\text{red}}$$

werden für $i = 1, \dots, s$ mit d_i bezeichnet.

(R) und (G) bedeuten die Relationen:

$$(R) \quad [k(t, \vartheta) : k(t)]_{\text{red}} = [K(t, \vartheta) : K(t)]_{\text{red}},$$

$$(G) \quad [k(t, \vartheta) : k(t)] = [K(t, \vartheta) : K(t)].$$

3.1.1. SATZ. K, L wie in 3.1. Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

(i) $K \varphi_0$ -disjunkt L über k für eine L -Stelle ϕ_0 , deren Einschränkung auf $k(t)$ eine $\bar{k}$ -bewertete Stelle φ_0 ergibt.

(ii) Für alle $i = 1, \dots, s$ existieren jeweils d_i Stellen $\Phi_j^{(i)}$ von L mit $K \Phi_j^{(i)}$ -disjunkt L über $k(t)(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{i-1})$, wobei die Einschränkungen $\Phi_j^{(i)}|_{k(t)(\vartheta_1, \dots, \vartheta_i)}$ die d_i relativen Isomorphismen $\varphi_j^{(i)}$ von $k(t)(\vartheta_1, \dots, \vartheta_i)$ über $k(t)(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{i-1})$ ergeben mögen.

(iii) Aus (R) folgt (G).

Dann gilt für den durch 2.2. gegebenen Homomorphismus $\psi : \ker \psi = 0$.

BEWEIS. Seien $\Delta_0 = : k(t)$ und $\Delta_i = : k(t)(\vartheta_1, \dots, \vartheta_i)$ für $i = 1, \dots, s$. Nach (i) gilt $K \varphi_0$ -disjunkt Δ_0 über k , woraus nach Lemma 2.3 die Aussage folgt:

$$(1) \quad K \otimes_k \Delta_0 \cong [K, \Delta_0].$$

Nach (ii) ist $K \cdot \Delta_{i-1} \varphi_j^{(i)}$ -disjunkt Δ_i über Δ_{i-1} für alle i , wonach (vgl. Lemma 2.4.3)

$$[\Delta_{i-1}(\vartheta_i) : \Delta_{i-1}]_{\text{red}} = [K \cdot \Delta_{i-1}(\vartheta_i) : K \cdot \Delta_{i-1}]_{\text{red}}$$

und somit (R) gilt. Hieraus folgt nach (iii) die Aussage (G) ; das bedeutet insbesondere (vgl. [7], S. 270)

$$[A_{i-1}(\mathfrak{g}_i) : A_{i-1}] = [K \cdot A_{i-1}(\mathfrak{g}_i) : K \cdot A_{i-1}],$$

woraus (vgl. Bemerkung zu Lemma 2.4.3.)

$$(2) \quad K \cdot A_{i-1} \otimes_{A_{i-1}} A_i \cong [K \cdot A_{i-1}, A_i] = K \cdot A_i$$

folgt.

Mit (1) erhält man:

$$(3) \quad K \otimes_k L = K \otimes_k A_s \cong (K \otimes_k A_0) \otimes_{A_0} A_s \cong [K, A_0] \otimes_{A_0} A_s.$$

Die sukzessive Anwendung von (2) ergibt:

$$(4) \quad (K \cdot A_0) \otimes_{A_0} A_s \cong K \cdot A_s,$$

woraus

$$(5) \quad [K, A_0] \otimes_{A_0} A_s \cong [[K, A_0], A_s] = [K, A_s] = [K, L]$$

folgt. q.e.d.

BEMERKUNG. Nach Satz 4 in [7] sind die Bedingungen (i), (ii), (iii) auch notwendig.

3.2. Sei L (endlich) algebraisch über dem Körper $A_0 = k(t)$ mit der Charakteristik p . S bezeichne die separable Hülle von A_0 in L mit $L = S(\theta_1, \dots, \theta_r)$ rein inseparabel über S , wobei man sich θ_{i+1} jeweils als p -te Wurzel des Elements $a_i \in S_i =: S(\theta_1, \dots, \theta_i)$ bei $S_0 =: S$ gegeben denkt ($i = 0, \dots, r-1$). Sei $\mathfrak{p}_i$ der Kern der kanonischen Abbildung von

$$K \cdot A_0 \otimes_{A_0} S_i \rightarrow [K \cdot A_0, S_i] = K \cdot S_i.$$

3.2.1. **SATZ.** Mit den Bezeichnungen von 3.2. gelten für $i = 0, \dots, r-1$ die folgenden Voraussetzungen:

- (i) $\theta_{i+1} \notin K \cdot S_i$,
- (ii) $1, a_i, \dots, a_i^{p-1}$ sind (nach Identifizierung mit $1 \otimes 1, \dots, 1 \otimes a_i^{p-1}$) linear unabhängig über $\mathfrak{p}_i^p \subset K \cdot A_0 \otimes_{A_0} S_i$.

Dann enthält $K \cdot A_0 \oplus_{A_0} L$ keine nilpotenten Elemente.

3.2.2. **BEMERKUNGEN.** 1. (i) ist äquivalent mit der Forderung, daß das Minimalpolynom von θ_{i+1} bzgl. S_i über dem Körper $K \cdot S_i$ entweder unzerlegbar ist oder in paarweise verschiedene irreduzible Polynome zerfällt (vgl. Lemma 2.4.2.).

2. (i) und (ii) bedeuten i.a. nicht die Nullteilerfreiheit von $K \cdot A_0 \otimes_{A_0} L$.

BEWEIS VON SATZ 3.2.1. (Induktion). Die Behauptung ist richtig für $i = 0$ (vgl. [10], S. 196).

Nach Induktionsvoraussetzung habe $K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_i$ keine nilpotenten Elemente. Sei $\alpha \in K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_{i+1}$,

$$\alpha = \sum_{j=1}^m k_j^{(0)} \otimes s_j + \sum_{j=1}^m k_j^{(1)} \otimes s_j \theta_{i+1} + \cdots + \sum_{j=1}^m k_j^{(p-1)} \otimes s_j \theta_{i+1}^{p-1},$$

wo $s_1, \dots, s_m$ eine Basis von S_i über Δ_0 bilden. Ist α nilpotent, so liegt α im Kern $\mathfrak{p}_{i+1}$ des kanonischen Homomorphismus

$$\psi_{i+1} : K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_{i+1} \rightarrow [K \cdot \Delta_0, S_{i+1}], \text{ d.h.}$$

$$\psi_{i+1}(\alpha) = \sum_{j=1}^m k_j^{(0)} s_j + \sum_{j=1}^m k_j^{(1)} s_j \theta_{i+1} + \cdots + \sum_{j=1}^m k_j^{(p-1)} s_j \theta_{i+1}^{p-1} = 0.$$

Daraus folgt wegen (i)

$$\sum_{j=1}^m k_j^{(v)} s_j = 0,$$

also $\sum_{j=1}^m k_j^{(v)} \otimes s_j \in \mathfrak{p}_i$ für alle $v = 0, \dots, p-1$.

Aus α nilpotent folgt $\alpha^{p^e} = 0$ für geeignetes $e > 0$, und da

$$\begin{aligned} \alpha^p &= \sum_{j=1}^m k_j^{(0)p} \otimes s_j^p + \sum_{j=1}^m k_j^{(1)p} \otimes s_j^p a_i + \cdots + \sum_{j=1}^m (k_j^{(p-1)})^p \\ &\quad \otimes s_j^p a_i^{p-1} \in K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_i, \end{aligned}$$

ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\alpha^p = \left(\sum_{j=1}^m k_j^{(0)} \otimes s_j \right)^p (1 \otimes 1) + \cdots + \left(\sum_{j=1}^m k_j^{(p-1)} \otimes s_j \right)^p (1 \otimes a_i^{p-1}) = 0.$$

Wegen (ii) gilt $\left(\sum_{j=1}^m k_j^{(v)} \otimes s_j \right)^p = 0$,

also – nach Induktionsvoraussetzung –

$$\sum_{j=1}^m k_j^{(v)} \otimes s_j = 0,$$

für alle $v = 0, \dots, p-1$, das heißt $\alpha = 0$.

3.2.3. BEMERKUNG. Man könnte Voraussetzung (ii) in 3.2.1 ersetzen durch die Forderung: Enthält $K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_i$ keine nilpotenten Elemente, so enthält das Erweiterungsideal $\Gamma(\mathfrak{p}_i)$ in

$$K \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_{i+1} \cong (K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_i) \otimes_{S_i} S_{i+1}$$

(p_i wie in 3.2) keine nilpotenten Elemente. In diesem Fall erhält man die Aussage des Satzes, wenn man zeigt, daß

$$R = : K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_{i+1} / \Gamma(p_i)$$

ohne nilpotente Elemente ist. Nun gilt

$$R \cong (K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_i / p_i) \otimes_{S_i} S_{i+1} \cong K \cdot S_i \otimes_{S_i} S_i(\theta_{i+1}),$$

und nach (i) (vgl. 3.2.2. Bemerkung 1 und Lemma 2.4.2) besitzt R keine nilpotenten Elemente.

4.

4.1. Seien $K, L \supset k$ und L von endlichem Typ über k mit $L = \Delta_0(\vartheta_1, \dots, \vartheta_s)$ wie in 3.1. In Analogie zu [4] betrachten wir die Spektren von $A = K \otimes_k \Delta_0$ und $B = K \otimes_k L$.

B ist ein flacher A -Modul; demzufolge [3], 0.6.3.3 ist der Morphismus $f: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ insbesondere flach in jedem *abgeschlossenen* Punkt von $\text{Spec } B$. Ferner ist A ein regulärer Ring (vgl. [4], 6.7.4.1). Nach [4], 6.5.2. kann in diesem Fall die Regularität von B aus Regularitätsforderungen an die Fasern $f^{-1}(y) = \text{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$ mit $y \in \text{Spec } A$ und $\kappa(y) = \text{Residuenkörper von } A_y$ gewonnen werden.

Da $B \otimes_A \kappa(y) = \kappa(y) \otimes_A (A \otimes_{\Delta_0} L) \cong \kappa(y) \otimes_{\Delta_0} L =: F(y)$ ist (Isomorphismus von $\kappa(y)$ -Moduln), werden wir im folgenden durch geeignete Beziehungen¹ zwischen $\kappa(y)$ und L die Regularität von B erhalten.

4.2.1. SATZ. Ist L von endlichem Typ über k und erfüllen $\kappa(y)$ und L die gleichen Forderungen (ii), (iii) wie K und L in 3.1.1, (wobei y die f -Bilder der abgeschlossenen Punkte von $\text{Spec } B$ durchläuft), dann ist $K \otimes_k L$ regulär.

BEWEIS. a) Da L von endlichem Typ über k , ist $F(y)$ nach [10], S. 184 eine endlich erzeugte $\kappa(y)$ -Algebra und damit [1], S. 25 und [4], 6.4.4 ein artinscher Ring.

b) Nach Satz 3.1.1 ist $F(y)$ nullteilerfrei. Wegen a) und b) ist $F(y)$ nach [1], S. 70 endliche direkte Summe gewisser Körper und besitzt daher als halbeinfacher Ring die globale homologische Dimension 0 [2], Cor. 2.7, S. 111. Also ist [9], IV-35 $F(y) = \kappa(y) \otimes_{\Delta_0} L$ regulär. Analog zu [4], 6.7.4.1 erhält man hieraus nach [4], 6.5.2 die Regularität der Lokalisierungen von B nach allen maximalen Idealen dieses Ringes. Das bedeutet nach [9], IV-42 die Regularität von $B = K \otimes_k L$. q.e.d.

¹ die u.a. auf Aussagen über die Fortsetzbarkeit gewisser Stellen beruhen.

BEMERKUNG. Aus den Bedingungen (ii), (iii) aus 4.2.1 folgt i.a. nicht die lineare Disjunktheit von K und L über k . Beispiel: Sei $L = \Delta_0$ und K so gewählt, daß K nicht linear disjunkt von L über k . In diesem Fall ist $\kappa(y)$ trivialerweise linear disjunkt von L über Δ_0 , und die beiden Tensorprodukte $\kappa(y) \otimes_{\Delta_0} L \cong \kappa(y)$ und $K \otimes_k L$ sind nach [4], 6.7.4.1 regulär. Ferner bedeuten unsere Forderungen nicht die Separabilität von L über k (vgl. [7]).

4.2.2. SATZ. Ist L von endlichem Typ über k und erfüllt $\kappa(y)$ die gleichen Voraussetzungen wie K in Satz 3.2.1, (wobei y die f -Bilder der abgeschlossenen Punkte von $\text{Spec } B$ durchläuft), dann ist $K \otimes_k L$ regulär.

BEWEIS. Nach Satz 3.2.1 besitzt $F(y)$ keine nilpotenten Elemente. Nach [1], S. 70 genügt diese Aussage anstelle der Nullteilerfreiheit von $F(y)$ für die Schlüsse im Beweis von Satz 4.2.1.

LITERATUR

N. BOURBAKI

[1] *Eléments de mathématique. Livre II. Algèbre. Chapitre VIII.* Paris 1967.

H. CARTAN AND S. EILENBERG

[2] *Homological algebra.* Princeton 1956.

A. GROTHENDIECK

[3] *Eléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 4 (1960).

A. GROTHENDIECK

[4] *Eléments de géométrie algébrique. IV. Etude locale des schémas et de morphismes de schémas. II.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 24 (1965).

M. HERRMANN

[5] Eine Charakterisierung freier Körper durch den Stellenbegriff. *Math. Ann.* 159, (1965) 271–272.

M. HERRMANN

[6] Zur Erweiterung algebraischer Spezialisierungen. *Math. Ann.* 179 (1968) 47–52.

M. HERRMANN UND U. STERZ

[7] Über Obstruktionen bei Spezialisierungserweiterungen. *Math. Ann.* 182 (1969) 263–272.

S. LANG

[8] *Introduction to algebraic geometry.* New York: Interscience Publ. 1958.

J.-P. SERRE

[9] *Algèbre locale. Multiplicités. Lecture Notes in Mathematics 11.* Berlin–New York: Springer 1965.

O. ZARISKI AND P. SAMUEL

[10] *Commutative algebra. Vol. I.* New York. D. v. Nostrand Comp., Inc. 1958.

(Oblatum 22–VII–70)

M. Herrmann
U. Sterz
Sektion Mathematik
Univ. Halle (Saale)
DDR