J. DIXMIER

Sur la relation $i(PQ - QP) = 1$

Compositio Mathematica, tome 13 (1956-1958), p. 263-269

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1956-1958__13__263_0>

Sur la Relation $i(PQ-QP) = 1$.

J. Dixmier (Paris).

1. Introduction.

Soient $\mathfrak{K}$ l'espace hilbertien des suites $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots)$ de nombres complexes tels que $\Sigma_0^{+\infty} |\lambda_j|^2 < +\infty$, $(\xi_0, \xi_1, \ldots)$ la base orthonormale canonique de $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{Y}$ le sous-espace vectoriel partout dense de $\mathfrak{K}$ formé des $\xi \in \mathfrak{K}$ tels que $(\xi|\xi_j) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices j. Soient P' et Q' les opérateurs linéaires hermitiens, définis dans $\mathfrak{Y}$ et à valeurs dans $\mathfrak{Y}$, représentés respectivement par rapport à la base (ξ_j) par les matrices

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \ldots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \ldots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \ldots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

On a $(P'Q'-Q'P')\xi = -i\xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{Y}$. En outre, si on désigne par P'' et Q'' les plus petits prolongements fermés P'^{**} et Q'^{**} de P' et Q', on sait que P'' et Q'' sont auto-adjoints. (Ce sont les opérateurs de Heisenberg). Autrement dit, P' et Q' sont essentiellement auto-adjoints. On a facilement

$$(P'^2+Q'^2)\xi_j = (2j+1)\xi_j \quad (j = 0, 1, \ldots)$$

de sorte que $P'^2+Q'^2$ est, lui aussi, essentiellement auto-adjoint. On sait d'autre part qu'il n'existe aucun sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{K}$ réduisant à la fois P'' et Q'', ce que nous exprimerons en disant que le système $\{P'', Q''\}$ est irréductible.

Maintenant, soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien complexe, P et Q deux opérateurs hermitiens fermés dans $\mathfrak{H}$. Soit $\mathfrak{X}$ un sous-espace vectoriel partout dense dans $\mathfrak{H}$, contenu dans $\mathfrak{D}(P)$ et $\mathfrak{D}(Q)$ (la notation $\mathfrak{D}$ désignera systématiquement l'ensemble de définition d'un opérateur), stable par P et Q. Supposons qu'on ait $(PQ-QP)\xi = -i\xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{X}$, et que le système $\{P, Q\}$ soit irréductible. Dans ces conditions, existe-t-il un isomorphisme de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{K}$ transformant P en P'' et Q en Q''? C'est le problème d'unicité.

Posée sous cette forme, la question admet, comme on sait, une réponse négative. Quelques conditions supplémentaires sont nécessaires. Une condition naturelle consiste à supposer que les restrictions $P|\mathfrak{X}$ et $Q|\mathfrak{X}$ de P et Q à $\mathfrak{X}$ soient essentiellement auto-adjointes (auquel cas P et Q sont les plus petits prolongements fermés de ces restrictions). S'il en est ainsi, on peut former les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires $\lambda \to U(\lambda) = e^{i\lambda P}$, $\mu \to V(\mu) = e^{i\mu Q}$, qui forment un ensemble irréductible. De la relation $(PQ-QP)\xi = -i\xi$, on déduit *formellement* que $U(\lambda)V(\mu) = e^{i\lambda\mu}V(\mu)U(\lambda)$, et ces nouvelles relations définissent, comme on sait, les groupes $\lambda \to U(\lambda)$, $\mu \to V(\mu)$ à une équivalence unitaire près. Malheureusement, on ne sait pas démontrer rigoureusement la relation $U(\lambda)V(\mu) = e^{i\lambda\mu}V(\mu)U(\lambda)$, de sorte que la question signalée plus haut reste ouverte, à ma connaissance, sous les hypothèses envisagées.

Dans [2], Rellich a montré que le problème d'unicité admettait une réponse positive lorsque $(P|\mathfrak{X})^2+(Q|\mathfrak{X})^2$ est „décomposable" (zerlegbare), c'est-à-dire lorsqu'il existe une décomposition de l'unité $(E_\mu)_{-\infty<\mu<+\infty}$ possédant les propriétés suivantes: 1) pour $\mu < \mu'$, $(E_{\mu'}-E_\mu)(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{X}$; 2) pour tout $\xi \in \mathfrak{X}$, on a $((P|\mathfrak{X})^2+(Q|\mathfrak{X})^2)\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\mu dE_\mu\xi$. Cette hypothèse entraîne que $(P|\mathfrak{X})^2 + (Q|\mathfrak{X})^2$ est essentiellement auto-adjoint (mais est beaucoup plus stricte). Dans ce mémoire, nous montrerons qu'il suffit de supposer que $(P|\mathfrak{X})^2+(Q|\mathfrak{X})^2$ est essentiellement auto-adjoint.

Envisageons maintenant le cas où il y a „f degrés de liberté". Soient $\mathfrak{K}$ l'espace hilbertien des familles $(\lambda_{n_1, n_2, \ldots, n_f})$ de nombres complexes $(n_1, n_2, \ldots, n_f = 0, 1, 2, \ldots)$ telles que $\Sigma|\lambda_{n_1, n_2, \ldots, n_f}|^2 < +\infty$, $(\xi_{n_1, n_2, \ldots, n_f})$ la base orthonormale canonique de $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{Y}$ le sous-espace vectoriel partout dense de $\mathfrak{K}$ formé des $\xi \in \mathfrak{K}$ tels que $(\xi|\xi_{n_1, n_2, \ldots, n_f}) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $n_1, \ldots, n_f$. Soient $P'_1, \ldots, P'_f$, $Q'_1, \ldots, Q'_f$ les opérateurs linéaires hermitiens, définis dans $\mathfrak{Y}$ et à valeurs dans $\mathfrak{Y}$, tels que

$$P'_r\xi_{n_1, \ldots, n_f} = \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}(\sqrt{n_r}\,\xi_{n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r-1, n_{r+1}, \ldots, n_f} - \sqrt{n_r+1}\,\xi_{n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r+1, n_{r+1}, \ldots, n_f})$$

$$Q'_r\xi_{n_1, \ldots, n_f} = \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{n_r}\,\xi_{n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r-1, n_{r+1}, \ldots, n_f} + \sqrt{n_r+1}\,\xi_{n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r+1, n_{r+1}, \ldots, n_f})$$

$(r = 1, 2, \ldots, f)$. On a $(P'_rQ'_s-Q'_sP'_r)\xi = -i\delta_{rs}\xi$, $(P'_rP'_s-P'_sP'_r)\xi = (Q'_rQ'_s-Q'_sQ'_r)\xi = 0$ pour tout $\xi \in \mathfrak{Y}$. Si on désigne par P''_r et

Q_r'' les plus petits prolongements fermés de P_r' et Q_r', les P_r'' et les Q_r'' sont auto-adjoints, et le système $(P_1'', \ldots, Q_f'')$ est irréductible. Ce système constitue le système des opérateurs de Heisenberg pour f degrés de liberté.

Par analogie avec ce qu'on a dit plus haut, on définit de manière évidente un problème d'unicité. Rellich a montré que la réponse est positive si $\Sigma_1^f((P_r|\mathfrak{X})^2+(Q_r|\mathfrak{X})^2)$ est décomposable. En fait, dans [2], Rellich étudie aussi la structure des P_r et des Q_r sans hypothèses d'irréductibilité.

2. Le théorème d'unicité pour un degré de liberté.

THÉORÈME 1. *Soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien, P et Q deux opérateurs hermitiens fermés dans $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$ un sous-espace partout dense dans $\mathfrak{H}$ contenu dans $\mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$, stable par P et Q. On suppose que*

1) $(PQ-QP)\xi = -i\xi$ *pour tout* $\xi \in \mathfrak{X}$;

2) *la restriction à $\mathfrak{X}$ de P^2+Q^2 est essentiellement auto-adjointe;*

alors, il existe des sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux $\mathfrak{H}_\iota$ de $\mathfrak{H}$, de somme hilbertienne $\mathfrak{H}$, possédant les propriétés suivantes:

a) *chaque $\mathfrak{H}_\iota$ réduit P et Q;*

b) *le système induit par P, Q dans chaque $\mathfrak{H}_\iota$ est unitairement équivalent au système des opérateurs de Heisenberg pour un degré de liberté.*

En outre, P et Q sont auto-adjoints, et $P|\mathfrak{X}$ et $Q|\mathfrak{X}$ sont essentiellement auto-adjoints.

Démonstration. Soient R et S les opérateurs définis dans $\mathfrak{X}$ par $R\xi = P\xi-iQ\xi$, $S\xi = P\xi+iQ\xi$. On a, pour $\xi \in \mathfrak{X}$ et $\xi' \in \mathfrak{X}$

$$(R\xi|\xi') = (P\xi-iQ\xi|\xi') = (\xi|P\xi'+iQ\xi') = (\xi|S\xi').$$

Donc l'adjoint de R prolonge S, de sorte que $\mathfrak{D}(R^*)$ est partout dense dans $\mathfrak{H}$. On peut alors former le plus petit prolongement fermé $T = R^{**}$ de R, dont l'adjoint $T^* = R^*$ prolonge S. Pour $\xi \in \mathfrak{X}$, on a

$$SR\xi = (P+iQ)(P-iQ)\xi$$
$$= P^2\xi+Q^2\xi-i(PQ-QP)\xi = P^2\xi+Q^2\xi-\xi$$
$$RS\xi = (P-iQ)(P+iQ)\xi$$
$$= P^2\xi+Q^2\xi+i(PQ-QP)\xi = P^2\xi+Q^2\xi+\xi.$$

En vertu de l'hypothèse 2) du théorème, SR et RS sont essentiellement auto-adjoints. Or T^*T prolonge SR et est auto-adjoint (car T est fermé). Donc T^*T est le plus petit prolongement fermé de SR. Si $\xi \in \mathfrak{D}(T^*T)$, il existe une suite $\xi_n \in \mathfrak{X}$ telle que $\xi_n \to \xi$ et

$T^*T\xi_n \to T^*T\xi$. Alors, $TT^*\xi_n = RS\xi_n = SR\xi_n + 2\xi_n = T^*T\xi_n + 2\xi_n \to T^*T\xi + 2\xi$, donc $\mathfrak{D}(TT^*) \supset \mathfrak{D}(T^*T)$ et TT^* prolonge T^*T+2; comme ce dernier opérateur est auto-adjoint, ainsi que TT^*, on a $\mathfrak{D}(TT^*) = \mathfrak{D}(T^*T)$, $TT^* = T^*T+2$, et TT^* est le plus petit prolongement fermé de RS.

Si $\xi \in \mathfrak{H}$ est tel que $T^*\xi = 0$, on a $TT^*\xi = 0$; comme $TT^* = T^*T+2 \geqq 2$, on en déduit $\xi = 0$. Par suite, $T(\mathfrak{H})$ est partout dense dans $\mathfrak{H}$. Si $T = UH$ est la décomposition polaire de T, H est un opérateur auto-adjoint $\geqq 0$ dont le noyau $\mathfrak{M}_0 = H^{-1}(0)$ est le même que celui de T et de T^*T, et U est un opérateur partiellement isométrique tel que $U(\mathfrak{M}_0) = \{0\}$, appliquant isométriquement $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_0$ sur $\mathfrak{H}$. On a $T^*T = HU^*UH = H^2$, et $TT^* = UH^2U^*$. L'opérateur U^* applique isométriquement $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{M}$. La restriction de T^*T à $\mathfrak{M}$ est un opérateur auto-adjoint dans $\mathfrak{M}$, unitairement équivalent à TT^* dans $\mathfrak{H}$ (donc $\geqq 2$). Soient $\mathfrak{S}$ le spectre ($\geqq 0$) de T^*T et $\mathfrak{S}'$ le spectre ($\geqq 2$) de TT^*. Si on avait $\mathfrak{M}_0 = \{0\}$, U serait unitaire, et H^2 serait unitairement équivalent à H^2+2, ce qui est absurde. Donc $\mathfrak{M}_0 \neq \{0\}$ et par suite $\mathfrak{S} = \{0\} \cup \mathfrak{S}'$. Par ailleurs, puisque $TT^* = T^*T+2$, on a $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}+2$. Donc, si n est un entier $\geqq 0$, on a

$$\mathfrak{S} \cap [n+2, n+4[= \mathfrak{S}' \cap [n+2, n+4[= (\mathfrak{S} \cap [n, n+2[)+2.$$

Comme $\mathfrak{S} \cap [0, 2[= \{0\}$, on voit que $\mathfrak{S}$ se compose des nombres $0, 2, 4, \ldots$ et $\mathfrak{S}'$ des nombres $2, 4, 6, \ldots$ Soit $\mathfrak{M}_j$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{H}$ formé des ξ tels que $T^*T\xi = 2j\xi$. Alors, $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots$ sont deux à deux orthogonaux et $\oplus_j \mathfrak{M}_j = \mathfrak{H}$. On a $TT^*\xi = (2j+2)\xi$ pour $\xi \in \mathfrak{M}_j$. D'autre part, U^* transforme TT^* en la restriction de T^*T à $\mathfrak{M}$. Donc U^* transforme $\mathfrak{M}_j$ en $\mathfrak{M}_{j+1}$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots$

Soit $(\varepsilon_{0,\iota})_{\iota \in I}$ une base orthonormale de $\mathfrak{M}_0$. Alors, les vecteurs $\varepsilon_{j,\iota} = U^{*j}\varepsilon_{0,\iota}$ forment, pour $\iota \in I$, une base orthonormale de $\mathfrak{M}_j$. On a $U^*\varepsilon_{j,\iota} = \varepsilon_{j+1,\iota}$ pour tout $j \geqq 0$ et tout $\iota \in I$. Donc $U\varepsilon_{j,\iota} = \varepsilon_{j-1,\iota}$ pour tout $j > 0$ et tout $\iota \in I$ (et, rappelons-le, $U\varepsilon_{0,\iota} = 0$). D'autre part, $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(H) = \mathfrak{Y} \supset \mathfrak{X}$ est l'ensemble des $\xi = \Sigma \xi_{j,\iota}\varepsilon_{j,\iota} \in \mathfrak{H}$ tels que $\Sigma_{j,\iota} j|\xi_{j,\iota}|^2 < +\infty$, et, pour un tel ξ, on a

$$T\xi = \Sigma_{j\geqq 0, \iota \in I} \sqrt{2j+2}\, \xi_{j+1,\iota}\varepsilon_{j,\iota}$$

On constate aisément que $\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(HU^*)$ est égal à $\mathfrak{Y}$ et que

$$T^*\xi = \Sigma_{j\geqq 0, \iota \in I} \sqrt{2j+2}\, \xi_{j,\iota}\varepsilon_{j+1,\iota}.$$

Si $\xi \in \mathfrak{Y}$, il existe (par définition de T) une suite $\xi_n \in \mathfrak{X}$ telle que $\xi_n \to \xi$ et $R\xi_n \to T\xi$. Or

$$\|R(\xi_m-\xi_n)\|^2=(SR(\xi_m-\xi_n)|\xi_m-\xi_n)=((P^2+Q^2-1)(\xi_m-\xi_n)|\xi_m-\xi_n)$$
$$= \|P(\xi_m-\xi_n)\|^2+\|Q(\xi_m-\xi_n)\|^2+\|\xi_m-\xi_n\|^2$$

donc $P\xi_n$ et $Q\xi_n$ ont des limites. Par suite $\xi \in \mathfrak{D}(P)$ et $\xi \in \mathfrak{D}(Q)$, de sorte que $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$. Le plus petit prolongement fermé de $P|\mathfrak{X}$ (resp. de $Q|\mathfrak{X}$) prolonge $P|\mathfrak{Y}$ (resp. $Q|\mathfrak{Y}$). En outre, les égalités $R\xi_n = P\xi_n - iQ\xi_n$ et $S\xi_n = P\xi_n + iQ\xi_n$ donnent à la limite

$$T\xi = P\xi - iQ\xi \qquad T^*\xi = P\xi + iQ\xi;$$

donc, pour $\xi \in \mathfrak{Y}$, on a

$$P\xi = \tfrac{1}{2}(T^*\xi + T\xi) \qquad Q\xi = \frac{1}{2i}(T^*\xi - T\xi).$$

Soit $\mathfrak{H}_\iota$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{H}$ engendré par $\varepsilon_{0,\iota}$, $\varepsilon_{1,\iota}, \ldots$ Alors, les $\mathfrak{H}_\iota$ sont deux à deux orthogonaux, et $\mathfrak{H} = \oplus_\iota \mathfrak{H}_\iota$. Chaque $\mathfrak{H}_\iota$ réduit H et U, donc T et T^*, donc $P|\mathfrak{Y}$ et $Q|\mathfrak{Y}$. D'après ce qu'on a rappelé dans l'introduction, les opérateurs induits par $P|\mathfrak{Y}$ et $Q|\mathfrak{Y}$ dans chaque $\mathfrak{H}_\iota$ sont essentiellement auto-adjoints, et leurs plus petits prolongements fermés forment un système unitairement équivalent aux opérateurs de Heisenberg pour un degré de liberté. Il en résulte d'abord que $P|\mathfrak{Y}$ et $Q|\mathfrak{Y}$ sont essentiellement auto-adjoints. Comme P et Q sont hermitiens fermés, P et Q sont auto-adjoints et sont les plus petits prolongements fermés de $P|\mathfrak{Y}$ et $Q|\mathfrak{Y}$. Donc les $\mathfrak{H}_\iota$ réduisent P et Q, et le système induit par P, Q dans chaque $\mathfrak{H}_\iota$ est unitairement équivalent au système des opérateurs de Heisenberg pour un degré de liberté. Enfin le plus petit prolongement fermé de $P|\mathfrak{X}$ prolonge $P|\mathfrak{Y}$ comme on l'a vu plus haut, donc est P d'après ce qui précède. De même, le plus petit prolongement fermé de $Q|\mathfrak{X}$ est Q. D'où le théorème.

Remarque. On a vu dans la démonstration précédente que $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$. En fait (comme il est connu), on a $\mathfrak{Y} = \mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$, de sorte que $T = P - iQ$, $T^* = P + iQ$. En effet, l'adjoint de $P - iQ$ prolonge $P + iQ$. Comme $P - iQ$ prolonge T, T^* prolonge $P + iQ$. D'où $\mathfrak{Y} \supset \mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$.

3. Cas de f degrés de liberté.

Théorème 2. *Soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien, $P_1, \ldots, P_f, Q_1, \ldots, Q_f$ des opérateurs hermitiens fermés dans $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$ un sous-espace vectoriel partout dense dans $\mathfrak{H}$ contenu dans $\mathfrak{D}(P_1) \cap \ldots \cap \mathfrak{D}(P_f) \cap \mathfrak{D}(Q_1) \ldots \cap \mathfrak{D}(Q_f)$, stable par $P_1, \ldots, P_f, Q_1, \ldots, Q_f$. On suppose que:*

1) $(P_jP_k - P_kP_j)\xi = 0$ *pour tout* $\xi \in \mathfrak{X}$;
   $(Q_jQ_k - Q_kQ_j)\xi = 0$ *pour tout* $\xi \in \mathfrak{X}$;
   $(P_jQ_k - Q_kP_j)\xi = -i\delta_{jk}\xi$ *pour tout* $\xi \in \mathfrak{X}$;

2) *les restrictions des opérateurs* $P_j^2+Q_j^2$, $P_j^2+P_k^2$, $Q_j^2+Q_k^2$, $P_j^2+Q_k^2$ *à* $\mathfrak{X}$ *sont essentiellement auto-adjointes* (j, $k = 1, 2, \ldots, f$; $j \neq k$);

alors, il existe des sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux $\mathfrak{H}_\iota$ *de* $\mathfrak{H}$, *de somme hilbertienne* $\mathfrak{H}$, *possédant les propriétés suivantes*:

a) *chaque* $\mathfrak{H}_\iota$ *réduit* $P_1, \ldots, P_f, Q_1, \ldots, Q_f$;

b) *le système induit par* $P_1, \ldots, P_f, Q_1, \ldots, Q_f$ *dans chaque* $\mathfrak{H}_\iota$ *est unitairement équivalent au système des opérateurs de Heisenberg pour* f *degrés de liberté.*

Démonstation. D'après le th. 1, les opérateurs P_j et Q_j sont auto-adjoints, et les opérateurs $P_j|\mathfrak{X}$, $Q_j|\mathfrak{X}$ sont essentiellement auto-adjoints. Soient R et S les opérateurs définis dans $\mathfrak{X}$ par $R\xi = P_1\xi - iP_2\xi$, $S\xi = P_1\xi + iP_2\xi$. L'adjoint de R prolonge S. Soit $T = R^{**}$. Alors T^* prolonge S, donc T^*T prolonge SR, et TT^* prolonge RS. Or, pour $\xi \in \mathfrak{X}$, on a $RS\xi = SR\xi = (P_1^2+P_2^2)\xi$. Comme $(P_1^2+P_2^2)|\mathfrak{X}$ est essentiellement auto-adjoint et que T^*T, TT^* sont auto-adjoints, on a $T^*T = TT^*$. Donc T est normal. Donc les restrictions de P_1 et P_2 à $\mathfrak{X}$ sont prolongeables en deux opérateurs auto-adjoints permutables. Comme $P_1|\mathfrak{X}$ et $P_2|\mathfrak{X}$ sont essentiellement auto-adjoints, on voit que P_1 et P_2 sont permutables. De même, P_j et P_k (resp. Q_j et Q_k, P_j et Q_k) sont permutables pour $j \neq k$.

Conformément au § 2, introduisons les opérateurs R_j, S_j définis dans $\mathfrak{X}$ par $R_j\xi = P_j\xi - iQ_j\xi$, $S_j\xi = P_j\xi + iQ_j\xi$. Soit $T_j = R_j^{**}$. Soit $T_j = U_jH_j$ la décomposition polaire de T_j. Soit A_j l'algèbre de von Neumann engendrée par les projecteurs spectraux de P_j et Q_j. D'après l'alinéa précédent, les A_j sont deux à deux permutables. D'autre part, si un opérateur unitaire permute à A_j, il laisse invariant T_j d'après la remarque du § 2, donc il permute à U_j et aux projecteurs spectraux de H_j. Donc U_j et les projecteurs spectraux de H_j appartiennent à A_j. Donc, pour $j \neq k$, U_j et H_j permutent à U_k et H_k. Soit $\mathfrak{M}_l^j$ le sous-espace propre de $T_j^*T_j$ correspondant à la valeur propre $2l$. D'après ce qui précède, les projecteurs $P_{\mathfrak{M}_l^j}$ sont deux à deux permutables. Et, pour $k \neq j$, U_k et U_k^* laissent stables $\mathfrak{M}_l^j$. Soit alors $(\varepsilon_{0,0,\ldots,0,\iota})_{\iota\in I}$ une base orthonormale de $\mathfrak{M}_0^1 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_0^f$. Posons

$$\varepsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_f,\iota} = U_1^{*j_1} U_2^{*j_2} \ldots U_f^{*j_f} \varepsilon_{0,0,\ldots,0,\iota}.$$

Les $\varepsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_f,\iota}$ ($\iota \in I$) forment une base orthonormale de $\mathfrak{M}_{j_1}^1 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_{j_f}^f$. Alors, les $\varepsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_f,\iota}$, pour ι fixé, engendrent un sous-espace vectoriel fermé $\mathfrak{H}_\iota$ de $\mathfrak{H}$, et les $\mathfrak{H}_\iota$ possèdent, comme on le voit aussitôt, les propriétés du théorème.

REMARQUE. Dans [2], Rellich a établi les résultats du th. 2 sous l'hypothèse que $N = \Sigma_1^f((P_j|\mathfrak{X})^2+(Q_j|\mathfrak{X})^2)$ est décomposable. Cette hypothèse entraîne que chaque opérateur $N_j = (P_j|\mathfrak{X})^2 + (Q_j|\mathfrak{X})^2$ est essentiellement auto-adjoint. Montrons par exemple que N_1 est essentiellement auto-adjoint. Pour $\xi \in \mathfrak{X}$, on a

$$\begin{aligned}(N\xi|N\xi) &= (N_1\xi+\Sigma_2^f N_j\xi|N_1\xi+\Sigma_2^f N_j\xi)\\ &= (N_1\xi|N_1\xi)+(\Sigma_2^f N_j\xi|\Sigma_2^f N_j\xi)+(N_1\xi|\Sigma_2^f N_j\xi)+(\Sigma_2^f N_j\xi|N_1\xi).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}(N_1\xi|\Sigma_2^f N_j\xi) &= (P_1^2\xi+Q_1^2\xi|\Sigma_2^f(P_j^2\xi+Q_j^2\xi))\\ &= \Sigma_2^f(||P_1P_j\xi||^2+||P_1Q_j\xi||^2+||Q_1P_j\xi||^2+||Q_1Q_j\xi||^2).\end{aligned}$$

Donc $(N\xi|N\xi) \geqq (N_1\xi|N_1\xi)$ et par suite $||N_1\xi|| \leqq ||N\xi||$. D'autre part, soit $(E_\mu)_{-\infty<\mu<+\infty}$ la décomposition de l'unité associée à N, avec $E_\mu = 0$ pour $\mu < 0$, et $E_\mu(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{X}$ pour tout μ. Si $\xi \in E_\mu(\mathfrak{H})$, on a $||N^k N_1\xi|| = ||N_1 N^k\xi|| \leqq ||N^{k+1}\xi|| \leqq \mu^{k+1}||\xi||$, donc [1] $N_1\xi \in E_\mu(\mathfrak{H})$. Ainsi, chaque sous-espace $E_\mu(\mathfrak{H})$ réduit N_1, et N_1 induit dans $E_\mu(\mathfrak{H})$ un opérateur hermitien continu partout défini. Comme $\mathfrak{H}$ est somme hilbertienne des sous-espaces $(E_{n+1}-E_n)(\mathfrak{H})$, on en déduit aisément que N_1 est essentiellement auto-adjoint.

Par contre, je n'ai pu déduire de l'hypothèse que N est décomposable la conclusion que $(P_1|\mathfrak{X})^2+(P_2|\mathfrak{X})^2$, par exemple, est essentiellement auto-adjoint. Le th. 2 ne contient donc pas le résultat cité de Rellich.

BIBLIOGRAPHIE

B. A. LENGYEL et M. H. STONE

[1] Elementary proof of the spectral theorem, Ann. of Math., 37 (1936), pp. 853—864.

F. RELLICH

[2] Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen, Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 1946, pp. 107—115.

(Oblatum 27-5-'58)