COMPOSITIO MATHEMATICA

HERBERT MESCHKOWSKI

Verzerrungssätze für mehrfach zusammenhängende Bereiche

Compositio Mathematica, tome 11 (1953), p. 44-59

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1953__11__44_0>

Verzerrungssätze für mehrfach zusammenhängende Bereiche

von

Herbert Meschkowski

Berlin

I. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit benutzt ausser bekannten Sätzen von Grötzsch (Literaturverzeichnis [1]) und Rengel [2] Ergebnisse aus der Theorie der Orthonormalsysteme [10], um Schranken zu berechnen für den absoluten Betrag des Differentialquotienten einer Funktion, die einen gegebenen n-fach zusammenhängenden Bereich in der Weise schlicht abbildet, dass der unendlich ferne Punkt innerer Punkt des Bildbereiches wird. Für den Spezialfall des Einheitskreises wird man auf bereits bekannte Sätze geführt, aber auch für den Kreisring ist die explizite Berechnung der Schranken durch eine Reihenentwicklung möglich.

Die Ableitung des Verzerrungssatzes führt zu einem neuen Nachweis einer (bereits bekannten) Idendität zwischen Normalabbildungsfunktionen, aus der sich weitere Verzerrungssätze ergeben.

II. Der Grundgedanke.

$\mathfrak{B}$ sei ein schlichter beschränkter n-fach zusammenhängender Bereich, dessen Rand $\mathfrak{C}$ aus n glatten Kurven $\mathfrak{C}_\nu$ besteht. $w = f(x)$ möge $\mathfrak{B}$ schlicht auf einen Bereich $\mathfrak{B}_1$ der w-Ebene abbilden, so dass ein gewisser innerer Punkt v in den unendlich fernen Punkt der w-Ebene übergeht (Residuum $+1$). $\zeta = \zeta(w)$ möge $\mathfrak{B}_1$ auf einen Radialschlitzbereich der ζ-Ebene abbilden mit der Entwicklung

$$\zeta = \alpha w + \frac{\alpha_1}{w} + \dots \qquad (|\alpha| = 1)$$

im Unendlichen. Dabei soll $w(u)$ in 0 übergehen. Dann ist

$$\zeta = \zeta\,(w(z)) = \beta \,.\, r(z;\, u,\, v),$$

wobei β eine Zahl vom absoluten Betrage 1 ist und $r(z;\, u,\, v)$ die (eindeutig bestimmte) Funktion, die den gegebenen Bereich $\mathfrak{B}$

so auf einen Radialschlitzbereich abbildet, dass u in 0, v in ∞ übergeht mit dem Residuum + 1. Nach einem Satz von GRÖTZSCH [1] und RENGEL [2] ist nun

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} \geqq 1,$$

und daraus folgt sofort:

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=u} \geqq |\, r'(u;\, u,\, v)\,|.$$

Ebenso liefert der erwähnte Satz von GRÖTZSCH und RENGEL die untere Grenze für $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=u}$. Bezeichnen wir mit $k(z;\, u, v)$ die Funktion, die $\mathfrak{B}$ in analoger Weise auf einen Kreisschlitzbereich abbildet, so ist:

$$(1) \qquad |\, k'(u;\, u,\, v\,)\,| \geqq \left|\frac{dw}{dz}\right| \geqq |\, r'(u;\, u,\, v)\,|.$$

Für den Einheitskreis kann man diese Schranken direkt berechnen [3]. Für mehrfach zusammenhängende Bereiche sollen die Funktionen $k(z;\, u,\, v)$ und $r(z;\, u,\, v)$ durch Funktionen eines Orthonormalsystems (bzw. die Integrale dieser Funktionen) dargestellt werden. Man könnte auch daran denken, in (1) einfach die von NEHARI [6] gefundene Darstellung der Funktionen $k(z;\, u, v)$ und $r(z;\, u,\, v)$ durch die Kernfunktion des Gebiets einzusetzen. Für die praktische Berechnung der Schranken und für die Gewinnung weiterer Einsichten in den Zusammenhang zwischen den Normalabbildungsfunktionen ist es jedoch zweckmässiger, eine Darstellung durch die Integrale eines Orthonormalsystems zu geben. Ich benutze dabei einige Ergebnisse von GARABEDIAN und SCHIFFER [4], die in einfacher Weise nach der Methode der Randintegration nachgewiesen werden können.

III. Definitionen.

$A(z, u)$ sei die Funktion, die $\mathfrak{B}$ auf einen Parallelschlitzbereich mit Schlitzen parallel zur reellen Achse so abbildet, dass $z = u$ in den unendlich fernen Punkt übergeführt wird mit der Entwicklung:

$$A(z, u) = \frac{1}{z - u} + a_1(z - u) + \ldots$$

$B(z, u)$ leiste die entsprechende Abbildung auf einen Bereich, dessen Berandung aus Schlitzen parallel zur imaginären Achse besteht. Wir definieren dann nach [4] die Funktionen

$$
\begin{aligned}
M(z, u) &= \tfrac{1}{2}\left(A(z, u) - B(z, u)\right), \\
N(z, u) &= \tfrac{1}{2}\left(A(z, u) + B(z, u)\right).
\end{aligned} \tag{2}
$$

M ist überall in $\mathfrak{B}$ regulär, N hat bei u einen einfachen Pol mit dem Reisduum $+ 1$. Weiter wird definiert:

$$
\begin{aligned}
P(z; u, v) &= \tfrac{1}{2}\left(\log k(z; u, v) - \log r(z; u, v)\right), \\
Q(z; u, v) &= \tfrac{1}{2}\left(\log k(z; u, v) + \log v(z; u, v)\right).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Zwischen den Funktionen P, Q, N, M bestehen nach [4] ((61), (63)) die Beziehungen

$$\frac{d}{dz} Q(z; u, v) = N(v, z) - N(u, z), \tag{4}$$

$$\overline{\frac{d}{dz} P(z; u, v)} = M(u, z) - M(v, z). \tag{5}$$

Auf dem Rand $\mathfrak{C}$ gilt nach [4] (16):

$$\overline{\frac{d}{dz} P\, dz} = -\frac{d}{dz} Q\, dz \tag{6}$$

und nach 4 (57):

$$\overline{\frac{dM}{dz} dz} = \frac{dN}{dz} dz. \tag{6a}$$

Wir wollen nun das „innere Produkt" zweier Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ definieren durch das Integral

$$(f', g') = \frac{1}{2i} \int\limits_C f' \bar{g}\, dz.$$

(f', f') heißt dann die Norm von $f(z)$. [1])
Aus (6a) folgt dann sofort, daß die Funktion $N(z, u)$ orthogonal ist zu allen Funktionen der Klasse $\mathfrak{F}$ der in $\mathfrak{B} + C$ eindeutigen und regulären Funktionen $f(z)$, d.h.

$$(N', f') = 0.$$

---

[1]) Die Bezeichnung ist in der Literatur nicht einheitlich, vgl. [4] und [5]. Die hier vorgeschlagene Bezeichnung hat den Vorteil, daß die Norm einer regulären und schlichten Funktion als Flächeninhalt des Bildes der Funktion selbst gedeutet werden kann.

Es wird nämlich

$$\frac{1}{2i}\int_C N'\bar{f}\,dz = -\overline{\frac{1}{2i}\int_C M' f\,dz} = 0,$$

weil M' regulär ist.

Es sei nun $\varphi_\nu(z)$ ein vollständiges Orthonormalsystem der Klasse $\mathfrak{F}'$ der Ableitungen der Funktionen der Klasse $\mathfrak{F}$.

Bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{G}$ die Klasse der Funktionen, die in $\mathfrak{B} + C$ eindeutig sind und regulär bis auf einen Pol 1. Ordnung mit dem Residuum 1 an der Stelle $z = u$. Dann ist die Ableitung jeder Funktion dieser Klasse darstellbar:

$$g'(z) = N'(zu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (g', \varphi_\nu)\varphi_\nu.$$

Das ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß $g' - N'$ zur Klasse $\mathfrak{F}'$ gehört und durch das Orthonormalsystem ist der bekannten Weise darstellbar ist. Wegen $(N', f') = 0$ ist der Fourierkoeffizient

$$(g' - N', \varphi_\nu) = (g', \varphi_\nu).$$

Bei der Darstellung einer Funktion mit einer Singularität (der hier betrachteten Art) spielt also die Funktion $N'(zu)$ dieselbe Rolle, die der meromorphe Teil bei der Darstellung durch Potenzreihen spielt.

Man kann aber auch die reguläre Funktion

$$g'(z) + \frac{1}{(z-u)^2}$$

durch das Orthonormalsystem darstellen. Dann wird:

$$g'(z) + \frac{1}{(z-u)^2} = \sum \alpha_\nu \varphi_\nu.$$

Dabei ist:

$$\alpha_\nu = (g', \varphi_\nu) + \left(\frac{1}{(z-u)^2}, \varphi_\nu\right).$$

Eliminiert man $g'(z)$ aus den beiden Darstellungen, so erhalt man:

$$N'(z, u) = -\frac{1}{(z-u)^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(u)\varphi_\nu(z), \tag{7}$$

$$c_\nu(u) = \left(\frac{1}{(z-u)^2}, \varphi_\nu(z)\right).$$

Es ist natürlich möglich, auch für weitere Funktionen mit anderen Singularitäten entsprechende Darstellungen zu finden. Das wird durchgeführt in [10] und in einer noch nicht abgeschlossenen Arbeit.[2])

$\frac{1}{\pi} M'(z, u)$ ist bekanntlich [6] die Kernfunktion des Orthonormalsystems $\varphi_\nu(z)$, so dass wir also für $M'(z, u)$ die Darstellung haben:

$$(8) \qquad M'(z, u) = \pi \sum \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(u)}.$$

Schreiben wir noch $c_\nu(u)$ ausführlich:

$$(9) \qquad c_\nu(u) = \frac{1}{2i} \int\limits_C \frac{\overline{\Phi_\nu(z)}\, dz}{(z-u)^2} = \frac{1}{2i} \int\limits_C \frac{\overline{\varphi_\nu(z) dz}}{(z-u)}.$$

Dabei ist $\Phi_\nu(z)$ das eindeutige Integral

$$(10) \qquad \Phi_\nu(z) = \int\limits_{v_1}^{z} \varphi_\nu(t) dt.$$

v_1 ist ein zunächst beliebiger innerer Punkt von $\mathfrak{B}$. Wir notieren noch:

$$(11) \qquad \Phi_\nu(v_1) = 0.$$

IV. Darstellung von $v'(u; u, v)$ und $k'(u; u, v)$.

Aus

$$\frac{dN(u, z)}{du} = -\frac{1}{(u-z)^2} + \sum c_\nu(z) \varphi_\nu(u)$$

folgt durch Integration:

$$(12) \quad N(u, z) - N(v, z) = \frac{1}{u-z} - \frac{1}{v-z} + \sum c_\nu(z) \left(\Phi_\nu(u) - \Phi_\nu(v)\right).$$

Integration über z liefert nach (4):

$$(13) \quad Q(z; u, v) - Q(v_1; u, v) = \log \frac{z-u}{z-v} - \log \frac{v_1 - u}{v_1 - v}$$
$$- \sum C_\nu(z) \left(\Phi_\nu(u) - \Phi_\nu(v)\right).$$

Dabei ist:

$$C_\nu(z) = \int\limits_{v_1}^{z} c_\nu(t) dt = \int\limits_{v_1}^{z} \left\{ \frac{1}{2i} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\overline{\Phi_\nu(\xi)}\, d\xi}{(\xi - t)^2} \right\} dt = \frac{1}{2i} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\overline{\Phi_\nu(\xi)} d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2i} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\overline{\Phi_\nu(\xi)} d\xi}{\xi - v_1}.$$

[2]) Die Darstellung (7) läßt sich auch aus [9] (8.20) in Verbindung mit [9] (7.1) ableiten. Dort sind die Formeln auf eine ganz andere Weise gewonnen.

Also:

(14) $$C_\nu(z) = \left(\frac{1}{\xi - z}; \varphi_\nu(\xi)\right) - \left(\frac{1}{\xi - v_1}, \varphi_\nu(\xi)\right).$$

Schreiben wir (8) in der Form

$$\frac{d}{du} M(u, z) = \pi \sum \varphi_\nu(u) \overline{\varphi_\nu(z)},$$

so folgt durch Integration:

(15) $$M(u, z) - M(v, z) = \pi \sum \left(\Phi_\nu(u) \overline{\varphi_\nu(z)} - \Phi_\nu(v) \overline{\varphi_\nu(z)}\right).$$

Nach (5) und (11) ergibt sich weiter:

(16) $$P(z; u, v) - P(v_1; u, v) = \pi \sum \left(\Phi_\nu(z) \overline{\Phi_\nu(u)} - \Phi_\nu(z) \overline{\Phi_\nu(v)}\right).$$

Unter Benutzung von (3), (13) und (16) erhalten wir schließlich eine Darstellung für $k(z; u, v)$:

(17) $$k(z; u, v) = k(v_1; u, v) \cdot \frac{\dfrac{z - u}{v_1 - u} \cdot e^{-\Sigma C_\nu(z) \Phi_\nu(u) + \pi \Sigma \Phi_\nu(z) \overline{\Phi_\nu(u)}}}{\dfrac{z - v}{v_1 - v} \cdot e^{-\Sigma C_\nu(z) \Phi_\nu(v) + \pi \Sigma \Phi_\nu(z) \overline{\Phi_\nu(v)}}}.$$

Wählen wir jetzt speziell $v_1 = v$ und setzen wir

$$\int_v^z \varphi_\nu(t)\, dt = \psi_\nu(z), \qquad \int_v^z c_\nu(t)\, dt = D_\nu(z),$$

so wird

(18) $$\psi_\nu(v) = D_\nu(v) = 0,$$

und wegen der Residuenbedingung

$$\lim_{v_1 \to 0} k(v_1; u, v) \cdot (v_1 - v) = 1$$

wird aus (17):

(19) $$k(z; u, v) = \frac{(z - u)}{(z - v)(v - u)} \cdot e^{-\Sigma D_\nu(z) \psi_\nu(u) + \pi \Sigma \psi_\nu(z) \overline{\psi_\nu(u)}}.$$

Analog wird:

(20) $$r(z; u, v) = \frac{(z - u)}{(z - v)(v - u)} \cdot e^{-\Sigma D_\nu(z) \psi_\nu(u) - \pi \Sigma \psi_\nu(z) \overline{\psi_\nu(u)}}.$$

Differentiation ergibt:

(21) $$\begin{aligned} r'(u; u, v) &= -\frac{1}{(u - v)^2} \cdot e^{-\Sigma D_\nu(u) \psi_\nu(u) - \pi \Sigma |\psi_\nu(u)|^2} \\ k'(u; u, v) &= -\frac{1}{(u - v)^2} \cdot e^{-\Sigma D_\nu(u) \psi_\nu(n) + \pi \Sigma |\psi_\nu(u)|^2} \end{aligned}$$

Wir können jetzt folgende Aussage formulieren:

THEOREM I. *$w = f(z)$ möge den gegebenen schlichten und beschränkten Bereich $\mathfrak{B}$ in der Weise schlicht abbilden, dass der Punkt $v \subset \mathfrak{B}$ in den unendlich fernen Punkt übergeht. Das Residuum möge den absoluten Betrag 1 haben. Dann gilt für einen beliebigen inneren Punkt u von $\mathfrak{B}$:*

$$(22)\qquad \frac{e^{-\Re \Sigma D_\nu(u)\psi_\nu(u) - \pi \Sigma |\psi_\nu(u)|^2}}{|u-v|^2} \leqq \left|\frac{dw}{dz}\right| \leqq \frac{e^{-\Re \Sigma D_\nu(u)\psi_\nu(u) + \pi \Sigma |\psi_\nu(u)|^2}}{|u-v|^2}$$

V. 2. Darstellung von $k(z; u, v)$.

Bevor die Anwendung von (22) für verschiedene Spezialfälle diskutiert wird, soll die Darstellung (17) der Funktion $k(z; u, v)$ in eine Form gebracht werden, die interessante weitere Folgerungen zuläßt. Wenn der Kreisschlitzbereich, auf den $\mathfrak{B}$ durch $k(z; u, v)$ abgebildet wird, den Punkt 1 als inneren Punkt enthält, kann v_1 so gewählt werden, daß der Faktor $k(v_1; u, v)$ gleich 1 wird. Liegt 1 auf einem der Kreisschlitze, so kann man jedenfalls einen Punkt v_1 finden, für den $\varphi k(v_1; u, v) = 1$ ist mit $|\varphi| = 1$. Dann kann man (17) in der Form schreiben

$$(23)\qquad \varphi \,.\, k(z; u, v) = \frac{k^*(z, u)}{k^*(z, v)}$$

mit

$$(24)\qquad k^*(z, u) = \frac{z-u}{v_1-u} \,.\, e^{-\Sigma C_\nu(z)\Phi_\nu(u) + \pi \Sigma \Phi_\nu(z)\overline{\Phi_\nu(u)}}$$

Es liegt nahe, die Darstellung von $k(z; u, v)$ durch einen Quotienten mit einer von BERGMAN gegebenen Beziehung zwischen $k(z; u, v)$ und zwei anderen Normalabbildungsfunktionen zu vergleichen. BERGMAN hat die Funktion $k(z; u, v)$ dargestellt in der Form:

$$(25)\qquad \varphi_1 \,.\, k(z; u, v) = \frac{k_1(z, u)}{k_1(z, v)}.$$

Dabei ist $k_1(z, u)$ eine Funktion, die den gegebenen Bereich schlicht abbildet auf einen „begrenzten Kreisschlitzbereich". ([7] VI (6)). Darunter wollen wir im Folgenden einen Bereich verstehen, der von einem Kreis um den Nullpunkt und $n-1$ konzentrischen Kreisschlitzen begrenzt wird, die innerhalb dieses Kreises liegen. Man überzeugt sich leicht, dass $k_1(z, u)$ nicht mit $k^*(z, u)$ identisch ist. Wohl aber kann man aus (23) die Darstellung (25) erhalten, indem man mit einem geeigneten von u und v unabhängigen Faktor erweitert.

Es sei im Folgenden $G(z, u)$ die Greensche Funktion vom $\mathfrak{B}$, $H(z, u)$ die konjugierte Potentialfunktion, $\omega_\mu(z)$ das harmonische Maß des Randes $\mathfrak{C}_\mu$ und $\tilde{\omega}_\mu(z)$ die konjugierte Funktion. $p_{\mu\varkappa}$ seien die Perioden von $\tilde{\omega}_\mu(z)$, also

$$p_{\mu\varkappa} = \int\limits_{C_\varkappa} d\tilde{\omega}_\mu(z).$$

Wir wollen dem äußeren Rand von $\mathfrak{B}$ die Nummer 1 geben und schließlich $n - 1$ Zahlen λ_μ definieren durch das Gleichungssystem

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{u-1} \lambda_\mu p_{\mu\varkappa} = 2\pi\omega_\varkappa(u) \quad (\varkappa = 2, 3, \ldots, (u-1)) \\ &\sum_{\mu=1}^{u-1} \lambda_\mu p_{\mu 1} = 2\pi\omega_1(u) + 2\pi \qquad (\varkappa = 1) \end{aligned}$$

Es ist bekannt ([7]), daß die Determinante dieses Systems von 0 verschieden ist. Setzen wir jetzt

$$(27)\qquad g(z, u) = - G(z, u) + \sum_1^{u-1} \lambda_\mu \omega_\mu(z)$$

und

$$(28)\qquad \gamma(z, u) = g(z, u) + ih(z, u),$$

wobei $h(z, u)$ die zu $g(z, u)$ konjugierte Potentialfunktion ist, so ist nach Bergman ([7])

$$(29)\qquad k_1(z, u) = e^{\gamma(z, u)}$$

eine Funktion, die $\mathfrak{B}$ so auf einen beschränkten Kreisschlitzbereich abbildet, daß der äußere Rand von $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{C}_1$) in den Vollkreis übergeht.

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Tatsache, daß wegen

$$\omega_\mu(u) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_\mu} dH(\xi, u)$$

die Funktion $\gamma(z, u)$ bei Durchlaufung des Randes $\mathfrak{C}_1$ den Zuwachs $2\pi i$ erfährt, auf allen anderen aber den Zuwachs 0. Da $\Phi_\nu(v_1) = 0$ ist, folgt aus (23), (25) und (17):

$$(30)\qquad \delta \,.\, k_1(z, u) = k^*(z, u) \,.\, (z - v_1)^{-1} \,.\, k_1(z, v_1).$$

Dabei ist δ eine Konstante, die z.B. so gewählt werden kann, dass $\mathfrak{C}_1$ durch $k_1(z, u)$ in den Einheitskreis abgebildet wird.

$$(z - v_1)^{-1} \,.\, k_1(z, v_1)$$

ist also der Faktor, mit dem man den Bruch von (23) erweitern muss, um eine Darstellung von (25) zu erhalten.

Hierbei ist benutzt worden, daß die durch (29) definierte Funktion $k_1(z, u)$ die bei BERGMAN [7] bewiesene Abbildungseigenschaft hat. Man kann aber auch darauf verzichten, $k_1(z, u)$ durch (30) definieren und unmittelbar zeigen, daß diese Funktion $\mathfrak{B}$ in der gewünschten Weise schlicht abbildet.

Aus der Definition folgt sofort, daß $k_1(z, u)$ überall in $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig ist und nur bei $z = u$ verschwindet. Da $\log \frac{k_1(z, u)}{z - u}$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre und eindeutige Funktion ist, erfährt $\arg k_1(z, v)$ bei Durchlaufung von $\mathfrak{C}_1$ den Zuwachs 2π, bei Durchlaufung der übrigen Ränder ändert sich $\arg k_1(z, u)$ nicht.

Daß der absolute Betrag von $k_1(z, u)$ auf allen Randkomponenten $\mathfrak{C}_\nu$ konstante Werte annimmt, folgt aus der Beziehung

$$\frac{dk_1}{k_1} = -\frac{\overline{dk_1}}{\overline{k_1}}; \qquad z \subset \mathfrak{C}. \tag{31}$$

Der Nachweis von (31) wird geführt durch Differentation von $\log k_1$ und Berücksichtigung von (11), (12), (15), (6) und den bekannten Eigenschaften von $G(z, u)$ und $\omega\,(z)$. — Die Schlichtheit von $k_1(z, u)$ wird in der üblichen Weise nach dem Argumentprinzip bewiesen.

VI. Ein Verzerrungssatz für den Einheitskreis.

Wir wollen jetzt den Verzerrungssatz (22) speziell für den Einheitskreis formulieren. Durch Normierung der Potenzen kommt man hier zu dem einfachen Orthonormalsystem

$$\varphi_\nu(t) = \left(\frac{\nu}{t}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\nu-1}.$$

Setzen wir $v = 0$, so wird

$$\psi_\nu(u) = (\pi\nu)^{-\frac{1}{2}} \cdot u^\nu$$

und

$$|\,\psi_\nu(u)\,|^2 = \frac{|\,u\,|^{2\nu}}{\pi\nu}. \tag{32}$$

$D_\nu(u)$ ist gleich 0 für den Einheitskreis; denn durch die Substitution $\xi = \frac{1}{\eta}$ wird aus $\left(\frac{1}{\xi - u}, \xi^{\nu-1}\right)$:

$$\frac{1}{2i\nu}\int\limits_C \frac{d\xi}{\xi^\nu(u - \zeta)} = \frac{1}{2i\nu}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{d\eta\,\eta^{\nu-1}}{\eta u - 1}.$$

Dieses Integral verschwindet, da die Nullstelle des Nenners ausserhalb des Einheitskreises liegt. Also wird nach (21):

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
|\, r'(u;\, u, v)\,| &= \frac{1}{|\,u\,|^2} \cdot e^{-\pi\Sigma |\psi_\nu(u)|^2},\\
|\, k'(u;\, u, v)\,| &= \frac{1}{|\,u\,|^2} \cdot e^{+\pi\Sigma |\psi_\nu(u)|^2}.
\end{aligned}
$$

Nun ist nach (32)

$$
\begin{aligned}
-\pi\Sigma\,|\,\psi(u)\,|^2 &= -\left(|\,u\,|^2 + \frac{|\,u^2\,|^2}{2} + \frac{|\,u^2\,|^3}{3} + \ldots\right)\\
&= \log\,(1 - |\,u\,|^2).
\end{aligned}
$$

Also wird

$$
\begin{aligned}
|\, v'(u;\, u, v)\,| &= \frac{1 - |\,u\,|^2}{|\,u\,|^2}\\
|\, k'\,(u;\, u, v)\,| &= \frac{1}{|\,u\,|^2 \cdot (1 - |\,u\,|^2)}.
\end{aligned}
$$

Der Verzerrungssatz (22) hat hier die einfache Form:

$$
(34)\qquad \frac{1 - |\,u\,|^2}{|\,u\,|^2} \leqq |\,\varphi'(u)\,| \leqq \frac{1}{|\,u\,|^2 \cdot (1 - |\,u\,|^2)}.
$$

Setzt man

$$
\frac{1}{z} = u; \qquad \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = g(z),
$$

so wird

$$
g'(z) = -\,\varphi'(u) \cdot \frac{1}{z^2},
$$

und man erhält für eine das Äußere des Einheitskreises schlicht abbildende Funktion $g(z)$, die im Unendlichen die Entwicklung

$$
g(z) = \varphi z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots \qquad (|\,\varphi\,| = 1)
$$

hat, die Abschätzung

$$
(35)\qquad 1 - \frac{1}{|\,z\,|^2} \leqq |\,g'(z)\,| \leqq \frac{1}{1 - \dfrac{1}{|\,z\,|^2}}.
$$

Das ist der bereits bekannte Verzerrungssatz für das Äußere des Einheitskreises (vgl. [3] S. 119).

VII. Verzerrung im Kreisring.

Um für den Kreisring ein Orthonormalsystem zu finden, gehen wir von der Tatsache aus, dass jede in Ring $r \leqq |z| \leqq 1$ reguläre und eindeutige Funktion in eine Laurent-Reihe entwickelt werden kann. Da wir ein System suchen zur Darstellung der Funktionen, deren Integrale eindeutig sind, kann a_{-1} (der Koeffizient von z^{-1}) gleich 0 angenommen werden. Da die Potenzen im Ring $r \leqq |z| \leqq 1$ orthogonal sind, so brauchen wir sie nur noch zu normieren, um ein vollständiges Orthonormalsystem zu erhalten. Das Orthonormalsystem für den Ring wird also

$$(36)\qquad \begin{aligned} \varphi_\nu(z) &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} . (1 - r^{2\nu})^{-\frac{1}{2}} . z^{\nu-1} = \alpha_\nu z^{\nu-1}, \\ \varphi_{-\nu}(z) &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} . (r^{-2\nu} - 1)^{-\frac{1}{2}} . z^{-\nu-1} = \alpha^{-\nu} z^{-\nu-1}; \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots. \end{aligned}$$

Aus (36) erhält man das System der Integralfunktionen

$$(37)\qquad \begin{aligned} \psi_\nu(z) &= (\nu\pi)^{-\frac{1}{2}} (1 - r^{2\nu})^{-\frac{1}{2}} (z^\nu - v^\nu) = \frac{\alpha_\nu}{\nu} (z^\nu - v^\nu), \\ \psi_{-\nu}(z) &= (\nu\pi)^{-\frac{1}{2}} (r^{-2\nu} - 1)^{-\frac{1}{2}} (v^{-\nu} - z^{-\nu}) = \frac{\alpha_{-\nu}}{\nu} (v^{-\nu} - z^{-\nu}). \end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt das in (19) auftretende Glied $D_\nu(u)$ zunächst für $\nu > 0$:

$$(38)\qquad D_\nu(u) = \alpha_\nu \left(\frac{1}{\xi - u}, \xi^{\nu-1}\right) - \alpha_\nu \left(\frac{1}{\xi - v}, \xi^{\nu-1}\right) = I_1 - I_2$$

Nennen wir den äußeren Kreis K_1, den inneren K_2, so wird das erste Glied I_1 in (38):

$$I_1 = \frac{\alpha_\nu}{2i\nu} \int\limits_{K_1 \nearrow} \frac{\overline{\xi^\nu - v^\nu}}{\xi - u} d\xi - \frac{\alpha_\nu}{2i\nu} \int\limits_{K_1 \nearrow} \frac{\overline{\xi^\nu - v^\nu}}{\xi - u} d\xi = I_3 - I_4.$$

Da auf K_1 $\xi\bar{\xi} = 1$ gilt, erhalten wir.

$$(39)\qquad I_3 = -\frac{\alpha_\nu v^\nu . 2\pi i}{2i\nu} + \frac{\alpha_\nu}{2i\nu} \int\limits_{K_1 \nearrow} \frac{d\xi}{\xi^\nu . (\xi - u)}.$$

Das in (39) rechts stehende Integral ist aber 0. Das wurde bereits im Kapital VI gezeigt. — Auf K_2 gilt $\xi\bar{\xi} = v^2$, und wir erhalten für I_4 wegen $|\xi| < |u|$:

$$I_4 = \frac{\alpha_\nu v^{2\nu}}{2i\nu} \int\limits_{K_2 \nearrow} \frac{d\xi}{\xi^\nu(\xi - u)} = -\frac{\alpha_\nu v^{2\nu}}{2i\nu u} \int\limits_{K_2 \nearrow} \frac{1}{\xi^\nu}\left(1 + \frac{\xi}{u} + \frac{\xi^2}{u^2} + \dots\right) d\xi$$

$$= -\frac{\alpha_\nu \,.\, v^{2\nu}\pi}{r \,.\, u^\nu}.$$

Es wird also

$$I_1 = -\frac{\alpha_\nu \overline{v^\nu}\pi}{\nu} + \frac{\alpha_\nu \pi r^{2\nu}}{\nu \,.\, u^\nu}.$$

Analog gilt:

$$I_2 = -\frac{\alpha_\nu \overline{v^\nu}\pi}{\nu} + \frac{\alpha_\nu \pi r^{2\nu}}{\nu v^\nu},$$

und wir erhalten schließlich

$$D_\nu(u) = \frac{\alpha_\nu \pi r^{2\nu}}{\nu}\left(\frac{1}{u^\nu} - \frac{1}{v^\nu}\right). \tag{40}$$

Berechnen wir jetzt $D_{-\nu}(u)$. Hier bekommen wir

$$D_{-\nu} = \alpha_{-\nu}\left(\frac{1}{\xi - u}, \ \xi^{-\nu-1}\right) - \alpha_{-\nu}\left(\frac{1}{\xi - v}, \ \xi^{-\nu-1}\right)$$

$$= J_1 - J_2.$$

Dabei ist.

$$J_1 = \frac{\alpha_{-\nu}}{2i\nu} \int\limits_{K_1 \nearrow} \frac{(\overline{v^{-\nu}} - \overline{\xi^{-\nu}})}{\xi - u} d\xi - \frac{\alpha_{-\nu}}{2i\nu} \int\limits_{K_2 \nearrow} \frac{\overline{v^{-\nu} - \xi^{-\nu}}}{\xi - u} d\xi.$$

Da auf K_2 gilt $\xi\bar{\xi} = r^2$, so ist das 2. Integral gleich 0, da die Nullstelle u des Nenners außerhalb von K_2 liegt. Auf K_1 gilt wieder $\xi\bar{\xi} = 1$:

$$J_1 = \frac{\alpha_{-\nu}\overline{v^{-\nu}}}{2i\nu} \int\limits_{K_1} \frac{d\xi}{\xi - u} - \frac{\alpha_{-\nu}}{2i\nu} \int\limits_{K_2} \frac{d\xi \,.\, \xi^\nu}{\xi - u}$$

$$= \frac{\alpha_{-\nu}\overline{v^{-\nu}} \,.\, 2\pi i}{2i\nu} - \frac{\alpha_{-\nu} \,.\, 2\pi i \,.\, u^\nu}{2i\nu}.$$

Damit wird

$$D_{-\nu} = J_1 - J_2 = \frac{\pi\alpha_{-\nu}}{\nu}(v^\nu - u^\nu). \tag{41}$$

Nach (38) und (40) folgt jetzt

$$D_\nu(u) \,.\, \psi_\nu(u) = \frac{\alpha_\nu^2 \pi r^{2\nu}}{r^2} \cdot \left(u^\nu - v^\nu\right)\left(\frac{1}{u^\nu} - \frac{1}{v^\nu}\right),$$

also

$$D_\nu(u)\,\psi_\nu(u) = -\frac{r^{2\nu}}{\nu(1-v^{2\nu})}\cdot\frac{(u^\nu-v^\nu)^2}{u^\nu-v^\nu}. \tag{42}$$

Analog wird

$$\begin{aligned} D_{-\nu}(u)\psi_{-\nu}(u) &= \frac{\alpha_{-\nu}^2\pi}{\nu^2}\left(v^\nu-u^\nu\right)\left(\frac{1}{v^\nu}-\frac{1}{u^\nu}\right), \\ D_{-\nu}(u)\psi_{-\nu}(u) &= -\frac{r^{2\nu}}{\nu(1-r^{2\nu})}\cdot\frac{(u^\nu-v^\nu)^2}{u^\nu v^\nu}. \end{aligned} \tag{43}$$

Die Glieder mit positivem und negativem Index ν liefern also denselben Wert. Bilden wir die Summe über das ganze Orthonormalsystem, so erhalten wir:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' D_\nu(u)\,\psi_\nu(u) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2v^{2\nu}}{\nu(1-v^{2\nu})}\cdot\frac{(u^\nu-v^\nu)^2}{u^\nu-v^\nu}. \tag{44}$$

Der Strich beim Summenzeichen soll andeuten, daß $\nu = 0$ auszulassen ist. — Berechnen wir jetzt $\pi\,|\,\psi_\nu(u)\,|^2$ und $\pi\,|\,\psi_{-\nu}(u)\,|^2$:

$$\pi\,|\,\psi_\nu(u)\,|^2 = \frac{|\,u^\nu - v^\nu\,|^2}{\nu(1-r^{2\nu})}$$

$$\pi\,|\,\psi_{-\nu}(u)\,|^2 = \frac{\left|\frac{1}{u^\nu}-\frac{1}{v^\nu}\right|^2}{\nu(r^{-2\nu}-1)} = \frac{v^{2\nu}}{\nu(1-v^{2\nu})}\cdot\frac{|\,u^\nu-v^\nu\,|^2}{|\,u^\nu v^\nu\,|^2}.$$

Also wird

$$\pi\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}|\,\psi(u)\,|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\,u^\nu-v^\nu\,|^2}{\nu(1-v^{2\nu})}\cdot\left(1+\frac{v^{2\nu}}{|\,u^\nu v^\nu\,|^2}\right). \tag{45}$$

Nach (21), (44) und (45) wird nun

$$|\,v'(u;\,u,\,v)\,| = |\,u-v\,|^{-2}\,.\,e^{\gamma(u,\,v)\,-\,\delta(u,\,v)} \tag{46}$$

$$|\,k'(u;\,u,\,v)\,| = |\,u-v\,|^{-2}\,.\,e^{\gamma(u,\,v)\,+\,\delta(u,\,v)}. \tag{47}$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned} \gamma(u,\,v) &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{v^{2\nu}}{\nu(1-v^{2\nu})}\cdot\Re\frac{(u^\nu-v^\nu)^2}{u^\nu v^\nu}, \\ \delta(u,\,v) &= \sum\frac{|\,u^\nu-v^\nu\,|^2}{\nu(1-v^{2\nu})}\cdot\left(1-\frac{v^{2\nu}}{|\,u^\nu v^\nu\,|^2}\right). \end{aligned} \tag{48}$$

VIII. Weitere Verzerrungssätze.

Wis beginnen mit einem *Hilfssatz*:

$\mathfrak{S}$ sei ein „beschränkter Kreisschlitzbereich", dessen Vollkreis der Einheitskreis ist. $w_1 = g(\zeta)$ möge $\mathfrak{S}$ schlicht abbilden, daß das Bild des Einheitskreises wieder der äußere Rand des Bildes wird und $|w_1| \leqq 1$ gilt für $|\zeta| = 1$. $g(0)$ sei gleich 0. Dann ist $|g'(0)| \leqq 1$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus einem Satz von Rengel [2]: „$w = f(z)$ bilde das Innere des mit endlich vielen konzentrischen Kreisschlitzen versehenen Kreises $|z| < R$ eineindeutig und konform mit $f(0) = 0$ und $|f'(0)| = 1$ so ab, daß ∞ nicht zum Bild oder zum Rand gehört und $|z| = R$ in den äußeren Rand $\mathfrak{C}_1$ übergeht. $\mathfrak{C}_1$ hat von 0 die Maximalentfernung M. Dann gilt:

$$M \geqq R. \tag{49}$$

Gleichheitszeichen steht nur für $f(z) = e^{i\varphi} . z$."

Damit soll jetzt der Hilfssatz bewiesen werden. Wäre $|g'(0)| = q > 1$, so würde $w = \dfrac{g(\zeta)}{q}$ eine Funktion sein, von der der Rengelsche Satz aussagt: $M \geqq 1$. $w_1 = q . w$ hätte dann eine Maximalentfernung $M_1 \geqq q > 1$, entgegen der Voraussetzung.

Aus dem Hilfssatz ergibt sich leicht

Theorem II. *$w = f(z)$ möge den n-fach zusammenhängenden beschränkten Bereich $\mathfrak{B}$ so schlicht abbilden, daß der Durchmesser des Bildgebietes höchstens gleich 1 ist. Dann gilt*

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=u} < |k_1'(u, u)|. \tag{50}$$

Dabei ist $k_1(z, u)$ die (bis auf eine Drehung eindeutig bestimmte) Funktion, die $\mathfrak{B}$ so auf einen „beschränkten Kreisschlitzbereich" mit dem Einheitskreis als Vollkreis schlicht abbildet, so daß die äußeren Ränder einander entsprechen.

$|k_1'(u, u)|$ kann aus (29) bzw. (30) berechnet werden. [3]) Zum Beweis setzt man

$$t(z) = w(z) - w(u).$$

Dann ist $t(u) = 0$, und da das Bild ganz im Einheitskreis um $t = 0$ liegt, kann der Hilfssatz angewandt werden. $\zeta = k_1(z, u)$

[3]) Die Greensche Funktion kann ebenfalls durch Orthonormalsysteme berechnet werden [7].

sei die Funktion, die die Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf das mit konzentrischen Kreisschlitzen versehene Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene so leistet, daß $z = u$ in $\zeta = 0$ übergeht. Dann gilt:

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=u} = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=u} = \left|\frac{dt}{d\zeta}\right| \cdot \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

$\left|\frac{dt}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}$ ist nach dem Hilfssatz < 1, und wir erhalten:

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=u} < \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=u} = \left|k_1'(u, u)\right|.$$

Hier steht immer das $<$-Zeichen, da der Einheitskreis der t-Ebene nicht vom Bildbereich ganz ausgefüllt wird (sonst wäre der Durchmesser 2) und da die Funktion $w(\zeta)$ deshalb sicher keine einfache Drehung ist.

Man kann aus dem Hilfssatz auch eine Verzerrungsaussage herleiten, bei der das Gleichheitszeichen möglich ist, allerdings gilt die Aussage nur für einen festen Punkt des gegebenen Bereiches.

THEOREM III. *$w = f(z)$ möge den gegebenen Bereich $\mathfrak{B}$ so schlicht abbilden, daß der äussere Rand in den Einheitskreis des Bildgebietes (als äußerer Rand) übergeht und der Punkt $z = u$ dem Nullpunkt des Bildgebietes entspricht. Dann gilt*:

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=u} \leq \left|k_1'(u, u)\right|.$$

Der Beweis wird wie bei Theorem II geführt.

LITERATUR.

HERBERT GRÖTZSCH,

[1] Das Kreisbogenschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche. — Berichte der math.-phys. Klasse der sächsischen Akademie, 83. Band, 1931.

E. RENGEL,

[2] Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung. — Schriften des Math. Seminars Bd I, 4 Berlin, 1932.

L. BIEBERBACH,

[3] Einführung in die konforme Abbildung. Berlin 1949.

P. GARABEDIAN and M. SCHIFFER,

[4] Idendities in the theory of conformal mapping. — Transact. Am. Math. Soc., 1949.

O. LEHTO,

[5] Anwendung orthonormaler Systeme auf gewisse funktionentheoretische Extremalprobleme. — Annales Acad. Scient. Fennicae Series A I 59, 1949.

Z. NEHARI,

[6] The kernel function and canonical maps. — Duke Math. Journal Vol. 16 Nr. 1, 1919.

S. BERGMAN,

[7] The kernel function and conformial mapping. — Survey of the math. Soc., vol. 5, 1950.

O. LEHTO,

[8] A method of analytic continuation. — Annales Acad. Sc. Fenn. Ser. A 1 70, 1950.

S. BERGMAN and M. SCHIFFER,

[9] Kernel functions and conformal mapping. — Comp. Math., vol. 8, fasc. 3, 1951.

H. MESCHKOWSKI,

[10] Einige Extremalprobleme aus der Theorie der konformen Abbildung. Annales Ac. Sc. Fenn., Ser. A, I 117, 1952.

(Oblatum 12-6-52).