

# COMPOSITIO MATHEMATICA

PIERRE HENRI BLOCH

**Ueber eine Laplace-Transformierte, welche in  
keiner Halbebene beschränkt ist**

*Compositio Mathematica*, tome 9 (1951), p. 289-292

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1951\\_\\_9\\_\\_289\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__9__289_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Ueber eine Laplace-Transformierte, welche in keiner Halbebene beschränkt ist

von

Pierre Henri Bloch

Bern

---

Es war bisher eine offene Frage, ob es Laplace-Transformierte gibt, die in keiner Halbebene beschränkt sind <sup>1)</sup>.

In dieser Arbeit soll nachgewiesen werden, daß tatsächlich solche Laplace-Transformierte existieren. Dazu muß eine Funktion  $F(t)$  gefunden werden, deren Laplace-Transformierte  $f(s)$  <sup>2)</sup> in keiner Halbebene beschränkt ist. Im Folgenden wird eine solche Funktion  $F(t)$  angegeben <sup>3)</sup>.

Im Intervall

$$J_0: 0 \leq t < 1$$

sei

$$F(t) \equiv 0$$

und im Intervall

$$J_m: m \leq t < m + 1, m = 1, 2, 3, \dots$$

gelte

$$F(t) = e^{t^2} e^{i\nu_m t},$$

wobei die Zahlen  $\nu_m$  reell und noch zu bestimmen sind. Wir fordern, daß die Zahlen  $\nu_m$  folgende Ungleichungen erfüllen:

$$(1) \quad |\nu_m| \geq |\nu_{m-1}| + 1, \nu_0 = 0, \nu_1 < 0,$$

$$(2) \quad \frac{\nu_m}{\nu_{m+1}} < 0,$$

---

<sup>1)</sup> Vgl. G. DOETSCH, Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. I, Theorie der Laplace-Transformation, Basel 1950, Verlag Birkhäuser, S. 181.

<sup>2)</sup> Der Laplace-Transformation  $f(s) = f(x + iy) = \int_0^\infty F(t) e^{-st} dt$  wird in dieser Arbeit der Riemannsche Integralbegriff zugrunde gelegt und für die Funktionen  $F(t)$  werden dieselben Voraussetzungen gemacht wie a.a.O. <sup>1)</sup>, S. 29 ff.

<sup>3)</sup> Es wird eine ähnliche Methode verwendet, wie bei P. H. BLOCH, Ueber den Zusammenhang zwischen den Konvergenzabszissen, der Holomorphie- und der Beschränktheitsabszisse bei der Laplace-Transformation, Comment. Math. Helvetici 22 (1949).

$$(3) \quad \left| \int_{T_1}^{T_2} F(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt \right| < (1/2)^m$$

gilt im Bereich

$$m \leq T_1 \leq T_2 \leq m + 1, \quad x \geq -m, \quad |y| \leq |v_{m-1}|,$$

$$(4) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} F(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt \right| < (1/2)^m$$

gilt im Bereich

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq m, \quad x \geq -m, \quad |y| \geq |v_m|.$$

Die Existenz der Zahlen  $v_m$  zeigen wir durch vollständige Induktion und nehmen als Induktionsvoraussetzung an, Zahlen  $v_0 = 0, v_1, \dots, v_{m-1}$ , die den Ungleichungen (1) — (4) genügen, seien bereits gefunden. Wir zeigen, daß sich dann  $v_m$  konstruieren läßt. Als Hilfssatz benötigen wir hierfür das verallgemeinerte Riemannsche Lemma <sup>4)</sup>.

Nach dem Riemannschen Lemma bestimmen wir zunächst eine positive Zahl  $v'_m$  so, daß

$$(5) \quad \left| \int_{T_1}^{T_2} e^{t^2} e^{-xt} e^{-iyt} dt \right| < (1/2)^m,$$

wenn nur

$$m \leq T_1 \leq T_2 \leq m + 1, \quad x \geq -m, \quad |y| \geq v'_m$$

und eine zweite positive Zahl  $v''_m$  so, daß

$$(6) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} F(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt \right| < (1/2)^m,$$

wenn nur

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq m, \quad x \geq -m, \quad |y| \geq v''_m \text{ gilt.}$$

Nun sei

$$(7) \quad v_m = (-1)^m \text{ Maximum } (v'_m + |v_{m-1}|, v''_m, |v_{m-1}| + 1).$$

Wir behaupten, die so bestimmte Zahl  $v_m$  erfüllt die Ungleichungen (1) — (4).

<sup>4)</sup> Voraussetzung:  $f(t)$  in  $0 \leq a \leq t \leq b < \infty$  beschränkt und im Riemannschen (oder Lebesgueschen) Sinne integrierbar.

Behauptung: Zu jeder positiven Zahl  $M$  und jeder nicht negativen reellen Zahl  $m$  existiert eine positive Zahl  $v$  so, daß für  $a \leq a' \leq b' \leq b$

$$\left| \int_{a'}^{b'} f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt \right| < M,$$

wenn nur  $|y| \geq v, x \geq -m$  ist.

Beweis z.B. a.a.O. <sup>1)</sup>, S. 168 ff.

Daß die Ungleichungen (1) und (2) erfüllt sind, ist trivial.

Es bleibt zu zeigen, daß  $\nu_m$  auch die Ungleichungen (3) und (4) befriedigt.

Nach der Ungleichung (5) gilt

$$(8) \quad \left| \int_{T_1}^{T_2} e^{i^2} e^{i\nu_m t} e^{-xt} e^{-iyt} dt \right| < (1/2)^m,$$

wenn nur

$$m \leq T_1 \leq T_2 \leq m + 1, \quad x \geq -m, \quad |\nu_m - y| \geq \nu'_m.$$

Da  $\left| |\nu_m| - |y| \right| \leq |\nu_m - y|$ , gilt die Ungleichung (8) auch, wenn  $\left| |\nu_m| - |y| \right| \geq \nu'_m$  und da nach Gleichung (7)  $|\nu_m| \geq |\nu_{m-1}| + \nu'_m$ , ist die Ungleichung (8) sicher immer erfüllt, wenn  $|y| \leq |\nu_{m-1}|$  ist. Damit ist nachgewiesen, daß  $\nu_m$  die Ungleichung (3) erfüllt.

Auch die Ungleichung (4) ist erfüllt. Nach der Ungleichung (6) gilt nämlich

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} F(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt \right| < (1/2)^m,$$

wenn nur

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq m, \quad x \geq -m, \quad |y| \geq \nu''_m.$$

Diese Ungleichung gilt noch viel mehr, wenn  $|y| \geq |\nu_m|$  ist, da nach Gleichung (7)  $|\nu_m| \geq \nu''_m$  gilt.

Damit ist die Existenz der Zahlenfolge  $\nu_m$  bewiesen.

Aus der Ungleichung (3) folgt, daß die mit der Funktion  $F(t)$  gebildete Laplace-Transformierte  $f(s) = \int_0^\infty F(t) e^{-st} dt$  in der ganzen  $s$ -Ebene existiert.

Nun zeigen wir, daß die Funktion  $f(s)$  in keiner Halbebene beschränkt ist. Wir behaupten,  $|f(s)|$  geht für folgende vier Punktfolgen gegen Unendlich:

$$(9) \quad s_k = 2k + i \nu_{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(10) \quad s_k = 2k + 1 + i \nu_{2k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(11) \quad s_k = -2k + i \nu_{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(12) \quad s_k = -(2k + 1) + i \nu_{2k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Wir beweisen die Behauptung für die Punktfolge (9) und bemerken, daß der Beweis für die übrigen Punktfolgen gleich verläuft. Es ist

$$f(2k + i \nu_{2k}) = \int_0^{2k} + \int_{2k}^{2k+1} + \int_{2k+1}^\infty = I + II + III.$$

Das Glied  $II = \int_{2k}^{2k+1} e^{t^2} e^{-2kt} dt$  geht mit  $k$  gegen Unendlich.

Der Absolutwert des Gliedes  $I$  ist wegen der Ungleichung (4) kleiner als  $(\frac{1}{2})^{2k}$  und der Absolutwert des Gliedes  $III$  ist wegen der Ungleichung (3) kleiner als  $\sum_{r=2k+1}^{\infty} (\frac{1}{2})^r$ . Damit ist bewiesen, daß  $|f(2k + i\nu_{2k})|$  mit  $k$  gegen Unendlich geht.

Da nach den Ungleichungen (1) und (2) die Zahlen  $\nu_{2k}$  positiv und die Zahlen  $\nu_{2k+1}$  negativ sind und da weiter nach der Ungleichung (1) die  $|\nu_k|$  wachsen, ist offensichtlich, daß in jeder Halbebene mindestens eine der Punktfolgen (9) — (12) von einem gewissen  $k$  an vollständig enthalten ist und somit  $|f(s)|$  auf dieser Punktfolge gegen Unendlich geht.

(Oblatum 19-1-51).

---