

# COMPOSITIO MATHEMATICA

L. FEJES

## Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen

*Compositio Mathematica*, tome 6 (1939), p. 456-467

<[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1939\\_\\_6\\_\\_456\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__456_0)>

© Foundation Compositio Mathematica, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

# Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen

\* von

L. Fejes

Budapest

---

## *Einleitung.*

Die Approximation von Kurven durch Polygonfolgen spielt seit Archimedes eine wichtige Rolle in der Elementargeometrie und wurde auch in anderen Gebieten der Geometrie, ja auch in der Analysis mit Erfolg angewendet. Man nimmt dabei aber in den meisten Fällen nur auf die Möglichkeit der Approximation Rücksicht. Wir wollen uns dagegen hier folgender Frage zuwenden: mit welcher Genauigkeit lässt sich eine gegebene konvexe Kurve durch eine Folge ein-, bzw. umbeschriebener  $n$ -Ecke — bezüglich des Flächeninhaltes bzw. des Umfanges — approximieren?

Es seien hier einige Ergebnisse vorausgeschickt.

Die Approximation durch einbeschriebene und umbeschriebene  $n$ -Ecke werden wir zusammen behandeln. Wir schließen die gegebene Kurve in einen „ $n$ -Eckring“ ein und betrachten als Maß der Approximation den Flächeninhalt  $\tau_n = T_n - t_n$ , bzw. den „Umfang“  $\lambda_n = L_n - l_n$  des  $n$ -Eckringes, wobei  $T_n$ ,  $t_n$ ,  $L_n$ ,  $l_n$  den Flächeninhalt bzw. den Umfang des äußeren bzw. inneren  $n$ -Eckes bedeuten sollen. Wir untersuchen die beiden Fälle, in welchen der Umfang  $L$  bzw. das Inhaltsmaß  $T$  der zu approximierenden Kurve vorgegeben ist. Dementsprechend erhalten wir folgende Sätze.

*Es lässt sich zu jeder konvexen Kurve mit dem Flächeninhalt  $T$  ein  $n$ -Eckring angeben, dessen Flächeninhalt*

$$\tau_n < \frac{AT}{n^2}$$

*ausfällt, wobei  $A$  eine universelle Konstante bezeichnen soll.*

Als Korollarium erhalten wir wegen der isoperimetrischen Ungleichung:

*Es läßt sich zu jeder konvexen Kurve mit dem Umfang  $L$  ein  $n$ -Eckring angeben mit dem Flächeninhalt:*

$$\tau_n < \frac{AL^2}{4\pi n^2}.$$

Es gilt ferner der Satz:

*Jede konvexe Kurve mit dem Flächeninhalt  $T$  läßt sich in einen  $n$ -Eckring einschließen, dessen Umfang*

$$\lambda_n < \frac{BT^{\frac{1}{2}}}{n^2}$$

*ist, wobei  $B$  eine universelle Konstante bedeutet.*

Es ergibt sich daraus:

*Man kann zu jeder konvexen Kurve mit dem Umfang  $L$  einen  $n$ -Eckring konstruieren, dessen Umfang*

$$\lambda_n < \frac{BL}{\sqrt{4\pi n^2}}$$

*ausfällt.*

Diese Abschätzungen sind nicht die bestmöglichen, obwohl die Größenordnung  $\frac{1}{n^2}$  sich nicht verbessern läßt, was man z.B. für den Fall des Kreises leicht nachrechnet. Um in einigen Fällen genauere Abschätzungen zu gewinnen, führen wir die vier Größen

$$\frac{T_n - t_n}{T_n}, \quad \frac{T_n - t_n}{L_n^2}, \quad \frac{L_n - l_n}{L_n}, \quad \frac{L_n - l_n}{T_n^{\frac{1}{2}}}$$

ein und bezeichnen sie als *die relativen Größen des  $n$ -Eckringes*<sup>1)</sup>. Die obigen Ergebnisse können wir nun im folgenden Satz zusammenfassen:

*Es sei eine beliebige konvexe Kurve gegeben. Man konstruiere dazu die vier  $n$ -Eckringe, welche die kleinsten relativen Größen besitzen. Dann gilt für diese:*

<sup>1)</sup> Es gilt für jeden  $n$ -Eckring:

$$\frac{T_n - t_n}{L_n^2} \leq \frac{1}{4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \frac{T_n - t_n}{T_n}, \quad \frac{L_n - l_n}{L_n} \leq \sqrt{\frac{1}{4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}} \frac{L_n - l_n}{T_n^{\frac{1}{2}}}.$$

Diese Formeln folgen aus der Tatsache, daß der Quotient  $\frac{T_n}{L_n^{\frac{1}{2}}}$  sein Maximum für das reguläre  $n$ -Eck annimmt.

$$\frac{T_n - t_n}{T_n} < \frac{6\pi}{n^2}, \quad \frac{T_n - t_n}{L_n^2} \leq \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{8n} \quad (1)$$

$$\frac{L_n - l_n}{L_n} \leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{L_n - l_n}{T_n^{\frac{1}{2}}} < \frac{500}{n^2}. \quad (2)$$

Die zweite Abschätzung in (1) und die erste in (2) können dabei nicht verbessert werden <sup>2)</sup>.

Im folgenden behandeln wir die Approximation in bezug auf den Flächeninhalt und beweisen (1); danach besprechen wir die Ungleichungen (2), d.h. die Approximation bezüglich des Umfangs. Dabei werden wir noch weitere Verallgemeinerungen kennen lernen.

### *Approximation bezüglich des Flächeninhaltes.*

1. Die erste Ungleichung in (1) lässt sich auf die zweite zurückführen. Wir beginnen mithin mit der Ungleichung:

$\frac{T_n - t_n}{L_n^2} \leq \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{8n}$ . Diese ist aber eine unmittelbare Folgerung des folgenden Satzes:

*Schreibt man in ein konvexes  $n$ -Eck  $U_n$  mit dem Umfang  $L_n$  ein zweites  $n$ -Eck  $u_n$  derart ein, daß auf jeder Seite von  $U_n$  ein Scheitelpunkt von  $u_n$  liegt und dabei die  $n$  Dreiecke, welche von  $U_n$  durch die Seiten von  $u_n$  abgeschnitten werden, das gleiche Inhaltsmaß  $\frac{\tau_n}{n}$  besitzen, so ist die Summe des Flächeninhaltes sämtlicher abgeschnittenen Dreiecke:*

$$\tau_n \leq \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{8n} L_n^2.$$

Betrachten wir zum Beweis eines der von  $U_n$  abgeschnittenen Dreiecke, etwa das  $k$ -te (Fig. 1), und bezeichnen wir es mit  $\triangle ABC$  wobei  $B$  gleichfalls ein Scheitelpunkt von  $U_n$  sei. Setzen wir  $\omega_k = \pi - \alpha_{ABC}$  so gilt:

$$\frac{\tau_n}{n} = \frac{\sin \omega_k}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} \leq \frac{\sin \omega_k}{8} (\overline{AB} + \overline{BC})^2; \quad \overline{AB} + \overline{BC} \geq \sqrt{\frac{8\tau_n}{n \sin \omega_k}}.$$

<sup>2)</sup> Es sei schon hier bemerkt, daß die Konstante 500 in (2) sich leicht durch eine viel kleinere ersetzen lässt.

Bildet man die Summe dieser Ungleichungen, so erhält man auf der linken Seite den Umfang  $L_n$  von  $U_n$ , und es gilt mit Rücksicht auf den Jensenschen Satz<sup>3)</sup>:

$$L_n \geq \sqrt{\frac{8\tau_n}{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\sin \omega_k}} \geq \sqrt{\frac{8\tau_n}{n}} \sqrt{\frac{n}{\sin \frac{2\pi}{n}}}$$

w.z.b.w.

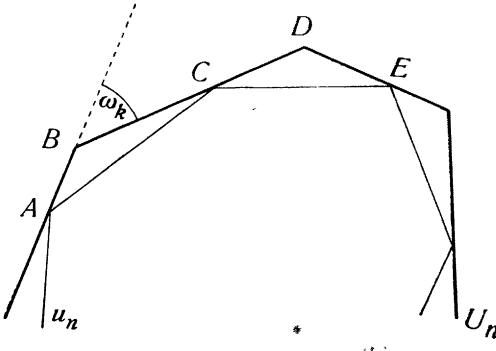


Fig. 1.

Man schreibe nun um die Kurve ein  $n$ -Eck und verbinde die benachbarten Berührungs punkte. Es entsteht so ein aus  $n$  Dreiecken zusammengesetzter  $n$ -Eckring, welcher derart gewählt werden kann, daß sämtliche Dreiecke gleiches Inhaltmaß besitzen<sup>4)</sup>. Folglich ist die relative Größe dieses  $n$ -Eckringes

$$\frac{\tau_n}{L_n^2} \leq \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{8n}, \text{ womit unsere Behauptung bewiesen ist.}$$

<sup>3)</sup> Es gilt für eine jede Funktion, welche eine nicht negative zweite Ableitung  $f''(x) \geq 0$  besitzt:  $f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$  (JENSEN, Sur les fonction convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes [Acta Math. 30 (1906), 175–193]. Man wende dies auf  $f(x) = \sin^{-\frac{1}{2}} x$  an und beachte, daß für  $0 < x < \pi$   $(\sin^{-\frac{1}{2}} x)'' > 0$  und  $\sum_{k=1}^n \omega_k = 2\pi$  ausfällt.

<sup>4)</sup> Es sei  $p_1$  eine beliebige Stützgerade der Kurve, welche diese in  $P_1$  berühre, und man wähle eine zweite Stützgerade  $p_2$  mit dem Berührungs punkt  $P_2$  (bzw. einen Punkt  $P_2$  mit der Tangente  $p_2$ ) derart, daß das Inhaltsmaß  $t(p_1 p_2)$  des von  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $P_1 P_2$  begrenzten Dreieckes einen gegebenen Wert  $t(p_1 p_2) = t$  annehme. Wir fahren so fort, indem wir  $p_3, p_4, \dots, p_n$  derart bestimmen, daß  $t(p_2 p_3) = t(p_3 p_4) = \dots = t(p_{n-1} p_n) = t$  ausfällt. Es leuchtet nun ein, daß  $t$  so gewählt werden kann, daß ( $p_1$  und  $P_1$  immer festgehalten) auch  $t(p_n p_1) = t$  ausfällt.

2. Es werde jetzt gezeigt, daß die soeben gegebene Konstruktion auch der Ungleichung  $\frac{T_n - t_n}{T_n} < \frac{6\pi}{n^2}$  genüge leistet. Dies beruht auf der — von Herrn F. Behrend herrührenden — Tatsache<sup>5)</sup>, daß jede konvexe Kurve sich mit Hilfe einer passend gewählten affinen Transformation auf eine andere Kurve abbilden läßt, deren Umfang  $L$  und Flächeninhalt  $T$  der Ungleichung  $L^2 \leq 12\sqrt{3}T$  genügen. Dabei läßt sich die Zahl  $12\sqrt{3}$  durch keine kleinere ersetzen.

Man wende nun diesen Satz auf das äußere  $n$ -Eck des in 1 konstruierten Polygonringes an und bedenke, daß die Größe  $\frac{T_n - t_n}{T_n}$  gegenüber affinen Transformationen invariant bleibt; man erhält:

$$\frac{T_n - t_n}{T_n} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2n} \sin \frac{2\pi}{n} < \frac{3\sqrt{3}\pi}{n^2}.$$

3. Es wird nicht ohne Interesse sein, zu bemerken, daß sich aus unserer Konstruktion (d.h. eines  $n$ -Eckringes, welcher aus  $n$  — bezüglich des Inhaltsmaßes — gleichen Dreiecken besteht) für  $n \leq 6$  die genaue Schranke

$$\frac{T_n - t_n}{T_n} \leq \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

ergibt<sup>6)</sup>. Wir haben nur zu zeigen, daß die Flächenhalte  $T_n$  und  $t_n$  der in 1 konstruierten  $n$ -Ecke  $U_n$  bzw.  $u_n$  der (für  $n = 3$  trivialen) Ungleichung  $t_n \geq T_n \cos^2 \frac{\pi}{n}$  genügen. Wir stellen uns daher folgende Aufgabe: unter allen konvexen  $n$ -Ecken gleichen Inhaltsmaßes dasjenige  $n$ -Eck  $\bar{U}_n$  zu bestimmen, für welches das nach der in 1 bestimmten Vorschrift einbeschriebene  $n$ -Eck (s. Fig. 1) mit dem kleinsten Inhaltsmaß  $\bar{u}_n$  den kleinstmöglichen Flächeninhalt besitzt. Dieses  $n$ -Eck ist — wie leicht einzusehen ist — dadurch ausgezeichnet, daß die Eckpunkte von  $\bar{u}_n$  mit den

<sup>5)</sup> F. BEHREND, Über einige Affininvarianten konvexer Bereiche [Math. Ann. 113 (1937), 718—747].

<sup>6)</sup> Es ist dabei zu erwarten, daß dies auch für ein jedes  $n$  gilt. Der Beweis läßt sich nämlich nur wegen der Verwickeltheit der Rechnung nicht im allgemeinen leicht durchführen.

Mittelpunkten der Seiten von  $\overline{U}_n$  zusammenfallen<sup>7)</sup>. Daraus folgt ferner, daß

$$Q_1Q_2 \parallel Q_nQ_3, Q_2Q_3 \parallel Q_1Q_4, \dots, Q_nQ_1 \parallel Q_{n-1}Q_2,$$

wobei  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  die nacheinander folgenden Ecken von  $\overline{U}_n$  bezeichnen. Für  $n = 4$  und  $n = 5$  wird aber das  $n$ -Eck durch diese Bedingung — abgesehen von einer affinen Transformation — völlig bestimmt: es ist das reguläre  $n$ -Eck. Für  $n = 6$  läßt sich das obige Problem als eine Minimumsaufgabe mit einem Veränderlichen behandeln, und man erhält als Lösung wiederum das reguläre Sechseck<sup>8)</sup>. Es gilt aber für das reguläre  $n$ -Eck  $t_n = T_n \cos^2 \frac{\pi}{n}$ , womit unsere Behauptung dargetan ist.

Es sei hier noch bemerkt, daß die soeben bewiesene Tatsache ein wenig allgemeiner formuliert werden kann: *Schreibt man in eine konvexe Kurve mit dem Flächeninhalt  $T$  ein  $n$ -Eck mit  $n \leq 6$  derart ein, daß die abgeschnittenen Teile gleiches Inhaltsmaß besitzen, so ist der Flächeninhalt dieses  $n$ -Eckes:  $t_n \geqq T \cos^2 \frac{\pi}{n}$ .*

Um dies einzusehen, betrachten wir eine konvexe Kurve  $U$  mit dem Flächeninhalt  $T$  und fassen das — nach unserer Vorschrift einbeschriebene —  $n$ -Eck  $u_n$  ins Auge. Wäre nun  $U$  selber kein  $n$ -Eck, so könnte  $U$  leicht — ohne die Abänderung von  $u_n$  — durch ein  $n$ -Eck mit einem Flächeninhalt  $T_n > T$  ersetzt werden.

**4.** Die obigen Ergebnisse beruhen auf keiner einfachen Konstruktion: sie sind vielmehr reine Existenzbeweise. Diesen Mangel versuchen wir im Folgenden — wenigstens teilweise abzuhelfen,

<sup>7)</sup> Setzen wir voraus, daß z.B. in Fig. 1  $\overline{BC} > \overline{CD}$  ist und ersetzen  $C$  durch einen zwischen  $B$  und  $C$  liegenden Punkt  $C'$ . Dadurch wird  $u_n$  verkleinert, da die von  $C'$  gefällte Höhe des Dreieckes  $\triangle AC'E$  kleiner als die entsprechende Höhe von  $\triangle ACE$  ist. Man drehe ferner  $BD$  um  $C'$ , bis  $\triangle AB'C'$  und  $\triangle C'D'E$  wieder das gleiche Inhaltsmaß besitzen, wobei  $B'$  und  $D'$  die neuen Eckpunkte von  $u_n$  auf  $AB$  bzw.  $DE$  bezeichnen. Ist  $\overline{CC'} > \overline{CD}$  und  $\overline{B'C'} > \overline{C'D'}$ . Daraus folgt, daß  $U_n$  durch diese Verdrehung in ein größeres  $n$ -Eck  $U'_n$  übergeht und man sieht leicht ein, daß  $U'_n$  besser ist als  $U_n$ .

<sup>8)</sup> Wir können uns auf Sechsecke  $ABCDEF$  mit  $\not\propto ABC = \not\propto BCD$  beschränken, da jedes Sechseck durch eine affine Transformation in ein solches überführt werden kann. Man rechnet leicht nach, daß für diese Sechsecke, welche außerdem noch den Bedingungen  $AB \parallel CF \parallel DE$ ,  $BC \parallel AD \parallel EF$ ,  $AF \parallel BE \parallel CD$  genügen, der Quotient „Inhaltsmaß von  $ABC$ /Inhaltsmaß von  $ABCDEF$ “ sein Maximum für das reguläre Sechseck annimmt.

wobei wir zugleich auch eine Verallgemeinerung für Kurvenbögen erhalten werden. Wir beweisen den Satz:

*Es lässt sich zu jedem konvexen Kurvenbogen mit der Bogenlänge  $L$  und mit der totalen Biegung  $\omega$ <sup>9)</sup> eine Folge von „Polygonbändern“ konstruieren, deren Flächeninhalt*

$$\tau_n < (1 + \varepsilon_n) \frac{\omega L^2}{8n^2} \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0) \quad (1a)$$

*ausfällt.*

Was ist hier unter einem Polygonband zu verstehen? Wir zeichnen einen aus  $n$  Strecken bestehenden gebrochenen Linienzug, dessen Endpunkte  $A, B$  mit den Endpunkten des Kurvenbogens zusammenfallen und dessen sämtliche Eckpunkte auf dem

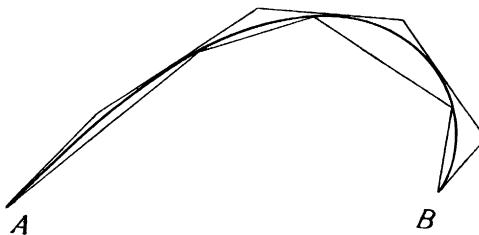


Fig. 2.

Bogen liegen (Fig. 2). Wir zeichnen weiter einen zweiten Linienzug mit  $n + 1$  Strecken, dessen Endpunkte ebenfalls mit  $A$  und  $B$  übereinstimmen, und dessen sämtliche Strecken den Bogen berühren. Wir erhalten so endlich ein den Bogen umschließendes  $(2n + 1)$ -Eck, das wir als ein zu dem Kurvenbogen gehörendes Polygonband vom Index  $n$ , oder kurz als ein  $n$ -Eckband bezeichnen wollen.

Wir zeichnen nun zu dem Bogen ein  $n$ -Eckband, wobei der

<sup>9)</sup> Besitzt der Kurvenbogen  $K$  mit den Endpunkten  $A, B$  in jedem Punkt  $P$  mit  $\widehat{AP} = l$  eine Krümmung  $\varrho(l)$ , so lässt sich die totale Biegung von  $K$  durch das Integral

$$\omega = \int_0^L \varrho(l) dl$$

definieren. Im Falle eines beliebigen konvexen Kurvenbogens  $K$  betrachte man nun eine Folge von gegen  $K$  konvergierenden konvexen Kurvenbögen  $K_1, K_2, \dots$  mit den Endpunkten  $A, B$ , welche im von  $K$  und  $\overline{AB}$  begrenzten Gebiet liegen und in jedem Punkt eine Krümmung besitzen. Man sieht unmittelbar ein, daß die totalen Biegungen  $\omega_1, \omega_2, \dots$  von  $K_1, K_2, \dots$  stets gegen einen nur von  $K$  abhängigen Grenzwert streben, welchen wir als die totale Biegung bezeichnen wollen.

innere Linienzug aus  $n$  Strecken gleicher Länge  $d_n$  bestehe; die Strecken des äußeren Linienzuges sollen dabei den Bogen in den Eckpunkten des inneren Streckenzuges berühren. Wir erhalten dadurch ein Polygonband vom Index  $n$ , welches aus  $n$  Dreiecken zusammengesetzt ist. Der Flächeninhalt des  $k$ -ten Dreieckes kann nicht die Größe  $\frac{d_n^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\omega_k}{2}$  überschreiten, wobei  $\omega_k$  die totale Biegung des entsprechenden Teilbogens bedeute. (Es wird hierbei vorausgesetzt, daß kein  $\omega_k \geq \pi$  ausfällt.) Es gilt mithin:

$$\tau_n \leq \frac{d_n^2}{4} \sum_{k=1}^n \operatorname{tg} \frac{\omega_k}{2}, \text{ und setzt man } \bar{\omega}_n = \max \omega_k, \text{ so gilt wegen}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_k}{2} \leq \frac{\omega_k^2}{2 \bar{\omega}_n} \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}_n}{2}, \sum_{k=1}^n \omega_k = \omega \text{ und } n d_n \leq L \text{ die Ungleichung:}$$

$$\tau_n \leq \frac{\omega L^2}{8n^2 \bar{\omega}_n} \frac{2}{\bar{\omega}_n} \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}_n}{2}.$$

Daraus kann man noch nicht auf (1a) schließen, weil ja  $\bar{\omega}_n$  nicht im allgemeinen gegen Null strebt. Wir verfahren daher weiter wie folgt. Wir zerlegen den Bogen in  $m$  Teilbögen  $K_1, K_2, \dots, K_m$ , welche dieselbe totale Biegung  $\frac{\omega}{m}$  besitzen sollen, und wenden die soeben erhaltene Ungleichung auf jedes  $K_i$  an<sup>10)</sup>. Dabei bedeute  $m$  eine noch nicht weiter festgelegte Zahl. Der Index  $n_i$  des zu  $K_i$  zu konstruierenden Polygonbandes genüge der Bedingung

$$(n-m) \frac{L_i}{L} \leq n_i < (n-m) \frac{L_i}{L} + 1,$$

wobei  $L_i$  die Bogenlänge von  $K_i$  bezeichne. Wir erhalten schließlich ein Polygonband vom Index höchstens  $n$  mit dem Flächeninhalt  $\tau_n = \sum_{i=1}^m \tau_{n_i}$ . Es gilt aber, wie wir gesehen haben

$$\tau_{n_i} < \frac{\omega}{m} \frac{L_i^2}{8n_i^2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2m}}{\frac{\omega}{2m}} \leq \frac{\omega}{m} \frac{L^2}{8(n-m)^2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2m}}{\frac{\omega}{2m}}$$

und demnach

$$\tau_n < \frac{\omega L^2}{8n^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2m}}{\frac{\omega}{2m}}.$$

---

<sup>10)</sup> Es sei bemerkt, daß — falls die Kurve Ecken hat — einige der Bögen  $K_1, K_2, \dots$  aus einzelnen Punkten bestehen können.

Durch passende Wahl von  $m$  und  $n$  kann erreicht werden, daß

der Faktor  $\frac{1}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2m}}{\frac{\omega}{2m}}$  der Zahl 1 beliebig nahekommt, womit  
(1a) bewiesen ist.

### *Approximation in bezug auf die Bogenlänge.*

1. Wir beginnen mit der Ungleichung:  $\frac{L_n - l_n}{L_n} \leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}$ . Diese kann ähnlich wie früher auf den folgenden Satz zurückgeführt werden:

*Schreibt man in eine konvexe Kurve mit dem Umfang  $L$  ein  $n$ -Eck mit den Eckpunkten  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ein, so daß*

*$\widehat{P_1P_2} - \overline{P_1P_2} = \widehat{P_2P_3} - \overline{P_2P_3} = \dots = \widehat{P_nP_1} - \overline{P_nP_1}$  ausfällt, so gilt für den Umfang dieses  $n$ -Eckes:*

$$l_n \geq L \cos \frac{\pi}{n}.$$

Zum Beweis beachte man die Ungleichung:  $\widehat{P_iP_{i+1}} \leq \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\cos \frac{\omega_i}{2}}$ ,

wobei  $\omega_i$  die totale Biegung des Bogens  $\widehat{P_iP_{i+1}}$  bezeichne. Es ergibt sich daraus:

$$\overline{P_iP_{i+1}} \geq \frac{\cos \frac{\omega_i}{2}}{2 \sin^2 \frac{\omega_i}{4}} (\widehat{P_iP_{i+1}} - \overline{P_iP_{i+1}})$$

und demnach, gemäß der Jensenschen Ungleichung<sup>3</sup>):

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^n \overline{P_iP_{i+1}} \geq \frac{1}{2} (\widehat{P_iP_{i+1}} - \overline{P_iP_{i+1}}) \sum_{i=1}^n \frac{\cos \frac{\omega_i}{2}}{\sin^2 \frac{\omega_i}{4}} \geq \\ &\geq (L - l_n) \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}, \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Seien nun  $P_1, P_2, \dots, P_n$  beliebige  $n$  Punkte einer konvexen Kurve. Man zeichne in  $P_1, P_2, \dots, P_n$  die Tangenten bzw. beliebige Stützgeraden  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und bezeichne den Schnittpunkt von  $a_i$  und  $a_{i+1}$  mit  $Q_i$ . Wählt man die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  derart, daß

$$\overline{P_1Q_1} + \overline{Q_1P_2} - \overline{P_1P_2} = \overline{P_2Q_2} + \overline{Q_2P_3} - \overline{P_2P_3} = \dots = \\ = \overline{P_nQ_n} + \overline{Q_nP_1} - \overline{P_nP_1}$$

sei, so bilden die zwei  $n$ -Ecke  $P_1, P_2, \dots, P_n$  und  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  einen die Kurve einschließenden  $n$ -Eckring, dessen relative Größe  $\frac{L_n - l_n}{L_n} \leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}$  ist.

Wir schlagen nun zur gleichen Abschätzung von  $\frac{L_n - l_n}{L_n}$  einen zweiten Weg ein, welcher auf einer überaus einfachen Konstruktion beruht. Wir zeichnen ein die Kurve umgebendes, im übrigen aber beliebiges reguläres  $n$ -Eck und verschieben alle Seiten mit sich selber parallel, bis sie die Kurve berühren. Verbinden wir die nebeneinander liegenden Berührungs punkte, so entsteht ein aus  $n$  Dreiecken zusammengesetzter  $n$ -Eckring. Fassen wir ein Dreieck  $\triangle ABC$ , etwa das  $k$ -te, ins Auge. Die innerhalb liegende Seite sei  $AB$ ; wir setzen  $\overline{AB} = d_k, \overline{AC} + \overline{CB} = D_k$ . Es gilt  $d_k \geq D_k \cos \frac{\pi}{n}$  und es ergibt sich hiernach

$$\sum_{k=1}^n d_k \geq \cos \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n D_k, \text{ d.h. } l_n \geq L_n \cos \frac{\pi}{n}, \text{ oder } \frac{L_n - l_n}{L_n} \leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n},$$

w.z.b.w.

**2.** Durch eine einfache Modifikation<sup>11)</sup> erhalten wir den Satz:

*Es lässt sich zu jedem konvexen Kurvenbogen mit der Bogenlänge  $L$  und der totalen Biegung  $\omega$  eine Folge von Polygonbändern angeben, deren „Umfang“*

$$\lambda_n < (1 + \varepsilon_n) \frac{\omega^2 L}{8n^2} \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0) \quad (2a)$$

ist.

Dabei bedeutet  $\lambda_n$  die Differenz zwischen dem äußeren und dem inneren Streckenzug in dem  $n$ -Eckband.

<sup>11)</sup> Man betrachte dasjenige  $n$ -Eckband, bei welchem die Eckpunkte des inneren Streckenzuges  $A, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, B$  den Bogen in  $n$  Teilbogen mit derselben Biegung  $\frac{\omega}{n}$  zerlegen und die Strecken des äußeren Linienzuges den Bogen in  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  berühren.

Wir machen hier auf die Analogie zwischen (1a) und (2a) aufmerksam und bemerken zugleich, daß in beiden Fällen  $\{\varepsilon_n\}$  durch eine universelle Nullfolge ersetzt werden kann.

3. Jetzt ist nur noch der Beweis der Abschätzung  $\frac{L_n - l_n}{T_n^{\frac{1}{2}}} < \frac{500}{n^2}$  übrig.

Wir betrachten in der gegebenen Kurve die größte Sehne  $AC$  und ziehen die auf  $AC$  senkrechten und gleichfalls die mit  $AC$  parallelen Stützgeraden. Diese letzteren sollen die Kurve in

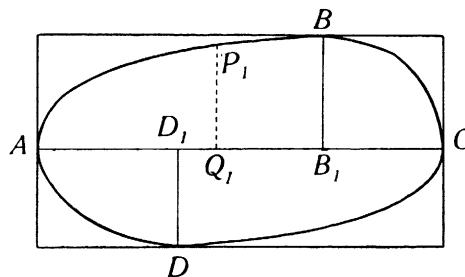


Fig. 3.

den Punkten  $B$  und  $D$  berühren (Fig. 3). Wir fällen von  $B$  und  $D$  Lote auf  $AC$ ; die Fußpunkte bezeichnen wir mit  $B_1$  und  $D_1$ . Die Kurve zerfällt dadurch in vier Teile. Wir betrachten einen dieser Teile, z.B. den von  $\widehat{AB}$ ,  $\overline{BB_1}$ ,  $\overline{B_1A}$  begrenzten, und nehmen an, daß z.B.  $\overline{AB_1} \geq \overline{B_1B}$  sei. Wir bestimmen ferner auf der Strecke  $AB_1$  den Punkt  $Q_1$  durch die Gleichung  $\overline{AQ_1}^2 = \overline{AB_1} \cdot \overline{B_1B}$  und errichten in  $Q_1$  das Lot auf  $AC$ . Dieses möge die Kurve im Punkt  $P_1$  schneiden. Es gelten nummehr die Ungleichungen

$$\omega_1 < \frac{\pi}{2}, \quad l_1 < \overline{AB_1} + \overline{B_1B},$$

$$\omega_2 < \operatorname{tg} \omega_2 \leqq \frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{AQ_1}} \leqq \frac{\overline{B_1B}}{\overline{AQ_1}}, \quad l_2 < \overline{AB_1} + \overline{B_1B},$$

wo wir mit  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  bzw. mit  $l_1$ ,  $l_2$  die totale Biegung bzw. die Bogenlänge von  $\widehat{AP_1}$  und  $\widehat{P_1B}$  bezeichnet haben. Daraus folgt die ganz grobe Abschätzung:

$$\omega_1^2 l_1 + \omega_2^2 l_2 < \pi^2 \sqrt{\overline{AB_1} \cdot \overline{B_1B}}.$$

Man bestimme nun in ähnlicher Weise die Punkte  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$

auf  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$  bzw.  $\widehat{DA}$ . So wird schließlich die Kurve in acht Teilbögen zerlegt und es gilt:

$$\sum_{i=1}^8 \omega_i^2 l_i < 6\pi^2 T^{\frac{1}{2}},$$

wobei  $T$  den Flächeninhalt der Kurve bedeutet.

Wenden wir nun (2a) auf jeden der acht Teilbögen an, so ist — wie eine einfache Rechnung zeigt — unsere Behauptung dargetan.

**4.** Es ist nach dem Vorigen zu erwarten, daß die erste Konstruktion in 1 die genaue Abschätzung

$$\frac{L_n - l_n}{T_n^{\frac{1}{2}}} \leq 4 \sqrt{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{2n}}$$

liefert.

Diese Ungleichung läßt sich übrigens — und dasselbe gilt für die Ungleichung  $\frac{T_n - t_n}{T_n} \leq \sin^2 \frac{\pi}{n}$  — für  $n = 3$  und  $n = 4$  auch direkt leicht beweisen.

(Eingegangen den 17. Juni 1938.

Abgeändert eingegangen den 23. November 1938.)