

COMPOSITIO MATHEMATICA

STEFAN BERGMANN

Über meromorphe Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 305-335

http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__305_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Über meromorphe Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen

von

Stefan Bergmann

§ 1. *Einleitung.*

In der Theorie der meromorphen F. v. 2 k. V. (Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen) liegt es nahe, zwei Fragen zu untersuchen:

1. die Beziehungen, die zwischen den Wachstumsverhältnissen einer meromorphen F. v. 2 k. V. f einerseits und den Eigenschaften des Durchschnittes der Fläche $f = a$ mit vorgegebenen Mannigfaltigkeiten andererseits, bestehen,

2. die Beziehungen zwischen den Wachstumsverhältnissen von f in verschiedenen Mannigfaltigkeiten.

Zu den einfachsten Aufgaben des unter 1 angegebenen Problemkreises gelangen wir, wenn wir denjenigen Fall betrachten, in dem die erwähnten Mannigfaltigkeiten analytische Flächen sind, z.B. Flächen $z_2 = \text{const}$, $\frac{z_1}{z_2} = \text{const}$ usw. In diesen Fällen handelt

es sich eigentlich um Untersuchungen von meromorphen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die von einem Parameter abhängen.

Will man analoge Fragen im Falle von nichtanalytischen Flächen betrachten, so wird man zwar zu einer sehr wichtigen Aufgabe der Theorie geführt ¹⁾, doch sind mir keine Methoden zur Untersuchung dieser Probleme bekannt.

Demgegenüber stellt sich heraus, daß im Falle von dreidimensionalen nichtanalytischen Mannigfaltigkeiten spezieller Art die Theorie der ausgezeichneten Randflächen gewisse Sätze aufzustellen erlaubt, die zu dem unter 1 angegebenen Problemkreis gehören.

¹⁾ Es sei besonders der Fall erwähnt, wo die angegebene Mannigfaltigkeit die reelle Ebene darstellt.

Den Ausgangspunkt dieser Untersuchungen bilden die folgenden Betrachtungen:

Wie in einigen in den letzten Jahren ²⁾ erschienenen Arbeiten gezeigt wurde, lassen sich die Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas auf den Fall F. 2. k. V. dann verallgemeinern, wenn man gewisse spezielle Bereiche betrachtet, nämlich Bereiche mit einer ausgezeichneten Randfläche. Diese (*zweidimensionale*) Fläche, die auf dem (*dreidimensionalen*) Rande des Bereiches liegt, spielt in funktionentheoretischer Hinsicht eine analoge Rolle wie die Randkurve im Falle 1 k. V. Betrachtet man insbesondere an Stelle der biharmonischen Funktionen (d.h. der Real- und Imaginärteile der F. v. 2 k. V.) eine geeignet gebildete erweiterte Funktionenklasse, so hat das verallgemeinerte Dirichletsche Problem stets eine Lösung: es existiert nämlich zu jeder auf der ausgezeichneten Randfläche gegebenen stetigen Funktion eine im Bereiche reguläre Funktion der erweiterten Klasse, die auf der ausgezeichneten Randfläche die vorgegebenen Randwerte annimmt. Man kann ferner eine der Jensen-Nevanlinnaschen analoge Formel aufstellen und ausgehend hiervon Sätze über die Werteverteilung der meromorphen F. v. 2 k. V. erhalten, die zu dem unter 1 angegebenen Problemkreis gehören.

Es gestalten sich dabei die Verhältnisse in zweierlei Hinsicht anders als im Falle der F. 1 k. V.

I. Während die Gesamtheit $\bigcup_{r=0}^{\infty} c^1(r)$ der Randkurven $c^1(r)$ der Kreise $|\zeta| < r$ die volle Ebene überdeckt, ist die Vereinigungsmenge einer einparametrischen Schar von ausgezeichneten

²⁾ Vgl. dazu „Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas über die Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen [Math. Ann. 102 (1934), 324—348] und „Zur Theorie der meromorphen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen“ [Compositio math. 3 (1936), 136—173 und Recueil Mathématique 2 (44) (1937), 599—616].

Ein Versehen aus der letzten Arbeit möge hier berichtigt werden: Auf Seite 140, Zeile 15 von unten, muß unter $\mathfrak{L}(r; g^{-1}(z, \varrho))$ nicht $\sum_{k(\varrho)}^{k(\varrho)} \log |a_s(\varrho)|$ sondern $\sum_{s=1}^{k(\varrho)} \log |a_s(\varrho)| - \sum_{r^{(s)}(\varrho) \leq r} \delta_s(\varrho) \log r^{(s)}(\varrho)$ verstanden werden. Dabei bedeutet $r^{(s)}(\varrho)$ diejenigen Werte von r , wo die Anzahl der Nullstellen $\nu(r, g^{-1}(z, \varrho))$ von $g(z, \varrho) = 0$ einen Sprung erleidet, $\delta_s(\varrho)$ die Größe dieses Sprunges mit dem entsprechenden Vorzeichen. Dementsprechend muß auf S. 163 in Z. 22 und Z. 23, auf S. 164 in Z. 24 und auf S. 602 in Z. 14 von oben und in Z. 2 von unten mehrfach $\sum_r \log |a_k(z_2)|$ durch $[\sum_r \log |a_k(z_2)| - \sum_{r^{(s)}(\varrho_2) \leq r} \delta_s(\varrho_2) \log r^{(s)}(\varrho_2)]$ ersetzt werden.

Die übrigen Betrachtungen werden dadurch nicht beeinflusst.

Randflächen eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit (im folgenden mit \mathfrak{R}^3 bezeichnet). Dementsprechend stellt es sich heraus, daß während man im Falle 1 k. V. das Wachstum der Funktion in der gesamten Ebene betrachten muß (die Ordnung λ des Wachstums einer meromorphen F. 1 k. V. wird durch $\overline{\lim} \frac{\log T(r)}{\log r}$ definiert), man im Falle der F. v. 2 k. V. nur die Wachstumsverhältnisse von f auf \mathfrak{R}^3 zu betrachten braucht.

II. $f(z)$ nimmt einen konstanten Wert (etwa a) im Kreise $|z| \leq r$ in einer diskreten Punktmenge n_a^0 an, die aus $n[r, (f-a)^{-1}]$ Punkten $\{z^{(v)}(a)\}$, $v = 1, 2, \dots, n[r, (f-a)^{-1}]$ besteht, und es liegt nahe, der Punktmenge n_a^0 die Summen

$$D_\lambda[r, (f-a)^{-1}] = \sum_{v=1}^{n[r, (f-a)^{-1}]} |z^{(v)}(a)|^{-\lambda}$$

zuzuordnen. Die Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemma liefern gewisse Aussagen über die Zusammenhänge zwischen dem Wachstum der Funktion f und dem Verhalten der angegebenen Größe.

Im Falle der F. v. 2 k. V. nimmt $f(z_1, z_2)$ einen konstanten Wert auf einer zweidimensionalen Fläche \mathfrak{N}_a^2 an; der Schnitt von \mathfrak{N}_a^2 und \mathfrak{R}^3 ist im allgemeinen eine eindimensionale Menge $\mathfrak{L}_a^1 = E[z_1 = z_1(\psi), z_2 = z_2(\psi)]$, und es liegt nahe [nachdem auf \mathfrak{L}_a^1 ein Umlaufssinn definiert ist], dem Teil \mathfrak{L}_a^{*1} von \mathfrak{L}_a^1 , für dessen z_1 -Koordinaten $|z_1(\psi)| \leq r$ gilt, die Größen ³⁾

$$\int_{\mathfrak{L}_a^{*1}} |z_k(\psi)|^{-\lambda} d\psi, \quad k = 1, 2, \quad (1.1)$$

zuzuordnen und den Zusammenhang zwischen dem Wachstum dieser Größen (als Funktionen von r betrachtet) und dem Wachstum der Funktion f andererseits zu untersuchen.

In einem speziellen Falle, nämlich wenn \mathfrak{R}^3 eine Vereinigungsmenge der ausgezeichneten Randflächen von *Bizylindern* ist, erlaubt die Anwendung der geschilderten Methode die erwähnten Beziehungen aufzustellen.

In der vorliegenden Arbeit wenden wir sie in einem allgemeineren Falle an. Wir nehmen an, daß \mathfrak{R}^3 eine Vereinigungsmenge der ausgezeichneten Randflächen von Bereichen viel allgemeineren Charakters ist. Es zeigt sich, daß auch in diesem Falle zwischen

³⁾ Diese Größen werden im weiteren in einer präzisen Art definiert. (Siehe § 9.) ψ hängt nur von der Hyperfläche \mathfrak{R}^3 ab. Über \mathfrak{L}_a^1 müssen dabei gewisse Voraussetzungen gemacht werden (vgl. § 4).

dem (geeignet definiertem) Wachstum einer Funktion auf \mathfrak{B}^3 einerseits und einer Art von Integralen der unter (1.1) angegebenen Gestalt Beziehungen bestehen.

Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen steht natürlich die unter 2 aufgeworfene Frage — die Zusammenhänge zwischen dem Wachstum einer F. v. k. V. auf verschiedenen Hyperflächen. Aus diesem Problemkreis wurde bis jetzt — wiederum ausgehend von der Betrachtung der Gebiete mit ausgezeichnete Randfläche — die folgende Frage untersucht.

Man betrachtet die Vereinigungsmenge $\bigcup_{r=r^0}^{\infty} \mathfrak{G}^2(r)$ wo $\mathfrak{G}^2(r)$ eine Fläche des Bereiches $\overline{\mathfrak{M}}(r)$ mit ausgezeichnete Randfläche $\mathfrak{F}^2(r)$ bedeutet; mit Hilfe der verallgemeinerten Jensenschen Formel kann man dann aus den Wachstumsverhältnissen auf $\bigcup_{r=r^0}^{\infty} \mathfrak{F}^2(r)$ auf die Wachstumsverhältnisse auf $\bigcup_{r=r^0}^{\infty} \mathfrak{G}^2(r)$ schließen.

Dabei kann man zeigen, daß den Flächen $\mathfrak{G}^2(r)$ einige (für diese Problemstellung) *charakteristische Größen* ⁴⁾ zugeordnet werden können, so daß man im Falle von *ganzen* Funktionen obere Schranken für das Wachstum der Funktion f erhält, welche nur von dem Wachstum der Funktion auf $\bigcup_{r=r^0}^{\infty} \mathfrak{F}^2(r)$ und den erwähnten für $\mathfrak{G}^2(r)$ charakteristischen Größen abhängt. ⁵⁾

Was die in der vorliegenden Arbeit benutzten Bezeichnungen anbetrifft, so werden wir mit gotischen Buchstaben die Mannigfaltigkeiten bezeichnen, dabei gibt für $0 < k < 4$ der obere Index k die Dimension der betreffenden Mannigfaltigkeit an. Der Rand der Mannigfaltigkeit wird im allgemeinen durch die gleichen Buchstaben bezeichnet, so z.B. ist \mathfrak{m}^3 der Rand von \mathfrak{M} usw. Es sei bemerkt, daß die Aussage „eine Funktion f sei in einem Bereiche \mathfrak{L}^n “, $n < 4$, „regulär“ stets so zu verstehen ist, daß ein \mathfrak{L}^n im Innern enthaltender vierdimensionaler Bereich existiert, in dem f regulär ist.

⁴⁾ Vgl. dazu außer der ersten die in der Fußnote ²⁾ zitierte Arbeit (Zusatz, S. 347), „Über eine Abschätzung von meromorphen F. v. 2 k. V.“ [Travaux de l'Institut mathématique de Tbilissi 1 (1937), 187—204], insbesondere S. 202, und P. LELONG, „Limitation d'une fonction analytique de deux variables complexes“ [Bulletin de sciences mathématiques 73 (1938), 199—204], wo die in den oben zitierten Arbeiten eingeführten „charakterischen Größen“ für einen bestimmten Fall berechnet wurden.

⁵⁾ Bezüglich des Problems 2 wollen wir uns mit diesem Hinweis in der vorliegenden Arbeit begnügen.

Die Zeichen \mathfrak{O} , $+$ (Vereinigungsmenge), \cdot (Durchschnitt), \times (topologisches Produkt von Bereichen), $-$ (Differenzmenge) sollen in üblicher Weise angewendet werden.⁶⁾ So soll die Vereinigungsmenge einer Schar von einem Parameter α abhängigen Mengen $\mathfrak{U}^n(\alpha)$, wenn α eine Menge \mathfrak{R}^m durchläuft, durch $\mathfrak{O}_{\alpha \in \mathfrak{R}^m} \mathfrak{U}^n(\alpha)$

bezeichnet werden. Mit $E[\dots]$ bezeichnen wir die Mengen von Punkten, deren Koordinaten den in der Klammer angegebenen Gleichungen oder Ungleichungen genügen.

Ich möchte noch die Gelegenheit benutzen, Herrn N. Aronszajn für mannigfache Ratschläge meinen besten Dank auszusprechen.

§ 2. Der Bereich \mathfrak{M} und seine Eigenschaften.

Sei $z_2 = h(z_1, t, \bar{t})$, $h(0, t, \bar{t}) = t$, $z_k = x_k + iy_k$, eine für $|z_1| \leq p(|t|)$ analytische und eindeutige Funktion der Veränderlichen z_1, t, \bar{t} . Dabei ist $p(\varrho)$ eine für $\varrho^0 \leq \varrho \leq \infty$ positive Funktion, welche genügend rasch mit ϱ ins Unendliche wächst, so daß für jedes t

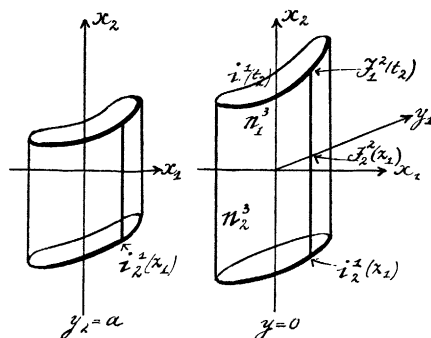


Fig. 1.7) Der Bereich \mathfrak{M} .

$h(z_1, t, \bar{t})$ regulär ist in einem Bereich der z_1 -Ebene, der so groß sei, wie es dies unsere weiteren Betrachtungen verlangen.

Für jedes feste $z_1 = z_1^{(0)}$ und jedes s möge die Menge

$$\mathfrak{J}_2^s(z_1^{(0)}) = E[z_2 = h(z_1^{(0)}, t, \bar{t}), |t| < s] \quad (2.1)$$

⁶⁾ Wegen der Regeln beim Operieren mit diesen Symbolen vgl. z.B. Hausdorff, Mengenlehre, 2. Aufl. [1928], § 1.

⁷⁾ Veranschaulichung der hier angegebenen vierdimensionalen Gebiete geschieht in der Weise, daß man die Koordinate $\text{Im}(z_2)$ als Zeit interpretiert. Die einzelnen Figuren sind Schnitte der betrachteten Gebiete mit dem Raum $\text{Im}(z_2) = \text{const.}$ ($\text{Im} = \text{Imaginärteil}$). Vgl. dazu „Über die Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche“ [Jber. deutsch. Math. Ver. 42 (1933), 238—252]. Aus Versehen wurden in den Zeichnungen an Stelle von gedruckten gotischen Buchstaben, die im Text auftreten, geschriebene gotische Buchstaben benutzt. Es wurde ferner in den Abb. 1 und 2 t_2 anstatt t geschrieben.

einen einfachzusammenhängenden Bereich der Ebene $z_1 = z_1^{(0)}$ bilden, der von der differenzierbaren (geschlossenen) doppelpunktlosen Kurve

$$i_2^1(z_1^{(0)}) = E[z_2 = h(z_1^0, s e^{i\psi}, s e^{-i\psi}), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi] \quad (2.2)$$

berandet ist. Sei

$$\mathfrak{M} = E[z_2 = h(z_1, t, \bar{t}), \quad |z_1| < r, \quad |t| < s] = \mathcal{O}_{|z_1| < r} \mathfrak{S}_2^2(z_1) = \mathcal{O}_{|t| < s} \mathfrak{S}_1^2(t), \quad (2.3)$$

wo

$$\mathfrak{S}_1^2(t) = E[z_2 = h(z_1, t, \bar{t}), \quad |z_1| < r] \quad (2.4)$$

bedeutet. Den Rand $E[z_2 = h(re^{i\varphi}, t, \bar{t}), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$ von $\mathfrak{S}_1^2(t)$ werden wir mit $i_1^1(t)$ bezeichnen.

Die Berandung von \mathfrak{M} besteht aus zwei analytischen Hyperflächen

$$\bar{e}_2^3 = \mathcal{O}_{|z_1|=r} \mathfrak{S}_2^2(z_1) \quad \text{und} \quad \bar{e}_1^3 = \mathcal{O}_{|t|=s} \mathfrak{S}_1^2(t). \quad (2.5)$$

Der Schnitt

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^2 &= \bar{e}_1^3 \cdot \bar{e}_2^3 = \mathcal{O}_{|t|=s} i_1^1(t) = \mathcal{O}_{|z_1|=r} i_2^1(z_1) = \\ &= E[z_2 = h(z_1, t, \bar{t}), \quad |z_1| = r, \quad |t| = s] \end{aligned} \quad (2.6)$$

bildet die ausgezeichnete Randfläche von \mathfrak{M} . Wir werden nämlich zeigen:

1. jede in $\overline{\mathfrak{M}}$ a. F. $g(z_1, z_2)$ v. 2. k. V. nimmt ihr Maximum bezüglich $\overline{\mathfrak{M}}$ auf \mathfrak{F}^2 an,

2. für eine in geeigneter Weise erweiterte Klasse von Funktionen (welche die in \mathfrak{M} biharmonischen Funktionen als eine Unterklasse enthält) existiert eine der Poissonschen analoge Integraldarstellung, wobei die Integration längs \mathfrak{F}^2 erstreckt ist.

BEWEIS von 1. Ist $g(z_1, z_2)$ in $\overline{\mathfrak{M}}$ regulär, so muß $|g|$ sein Maximum am Rande annehmen, also entweder in einer „Lamelle“ $\mathfrak{S}_1^2(t^{(0)})$, $|t^{(0)}| = s$, oder in einer Lamelle $\mathfrak{S}_2^2(z_1^{(0)})$, $|z_1^{(0)}| = r$. Im ersten Falle ist in $\mathfrak{S}_1^2(t^{(0)})$, $g(z_1, z_2) = g[z_1, h(z_1, t^{(0)}, \bar{t}^{(0)})] = g^*(z_1)$, $|z_1| \leq r$, eine analytische Funktion von z_1 und muß deshalb des Maximum bezüglich $\mathfrak{S}_1^2(t^{(0)})$ in einem Punkte der Randkurve $i_1^1(t^{(0)}) \subset \mathfrak{F}^2$ annehmen.

Im zweiten Falle ist $g(z_1^{(0)}, z_2)$ in $\mathfrak{S}_2^2(z_1^{(0)})$ eine analytische Funktion von z_2 , und $|g(z_1^{(0)}, z_2)|$ muß sein Maximum bezüglich $\mathfrak{S}_2^2(z_1^{(0)})$ in einem Punkte von $i_2^1(z_1^{(0)}) \subset \mathfrak{F}^2$ annehmen.

Die Konstruktion der Funktionen der erweiterten Klasse und die Aufstellung der in 2 angekündigten Integraldarstellung wird im § 6 erfolgen.

§ 3. Die Hyperfläche \mathfrak{H}^3 .

Im Weiteren werden wir eine Schar von Bereichen \mathfrak{M} betrachten, indem wir annehmen, daß r von r^0 bis ∞ variiert und $s = S(r)[= \mathcal{S}(z_1, \bar{z}_1)]$, $S(0) = 0$, ist. $S(r)$ ist eine für alle r positive wachsende, für $0 < r < r^{(0)}$ stetig differenzierbare, für $r^{(0)} \leq r < \infty$ analytische Funktion der reellen Veränderlichen r ⁸⁾.

Wir werden im folgenden anstatt \mathfrak{M} , \mathfrak{H}^2 , ... unter Umständen $\mathfrak{M}(r, s)$, $\mathfrak{H}^2(r, s)$, ... schreiben.

Die Vereinigungsmenge

$$\mathfrak{H}^3 = \bigcup_{r=r^{(0)}}^{\infty} \mathfrak{H}^2[r, S(r)] = E[z_2 = h(z_1, t, \bar{t}), |t| = S(|z_1|), r^0 \leq r < \infty] \quad (3.1)$$

bildet eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Gleichung in dem $z_1 t$ -Raume die Gestalt

$$|t| - S(|z_1|) = 0 \quad (3.2)$$

hat.

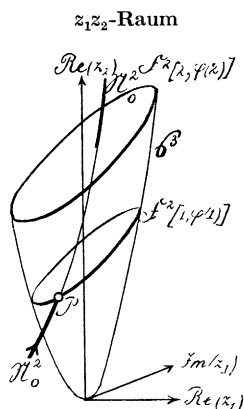


Fig. 2a. Der Schnitt von \mathfrak{H}^3 mit dem Raum $\varphi_2 = 0$.

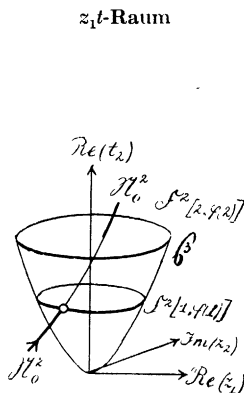


Fig. 2b. Der Schnitt von \mathfrak{H}^3 mit dem Raum $\varphi_2 = 0$.

Es liegt nahe, die Gleichung von \mathfrak{H}^3 auch in den Veränderlichen z_1, z_2 aufzustellen, was darauf hinauskommt, aus den Gleichungen (3.2) und $z_2 = h(z_1, t, \bar{t})$ die Veränderlichen t, \bar{t} zu eliminieren. Nach dem Satz über die impliziten Funktionen ist dies in der Umgebung jedes Punktes $Q_\nu \subset \mathfrak{H}^3$ möglich, wo die Funktionaldeterminante des Systems nicht verschwindet. Man erhält dann einen Ausdruck, der in genügend kleiner Umgebung des Punktes Q_ν gilt.

⁸⁾ Für $r^{(0)} \leq |z_1| < \infty$ ist somit $\mathcal{S}(z_1, \bar{z}_1)$ eine analytische Funktion von zwei komplexen Veränderlichen z_1, \bar{z}_1 .

Um eine Gleichung $H_\nu(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0$ von \mathfrak{B}^3 in der Umgebung eines Punktes Q_ν zu erhalten, kann man auf verschiedene Weise aus (3.2) und $z_1 = h(z_1, t, \bar{t})$ die Veränderlichen t, \bar{t} eliminieren. In jedem Falle erhalten wir eine Ungleichung, deren Bestehen in einem Punkte Q_ν eine hinreichende Bedingung darstellt für die Existenz der Darstellung $H_\nu(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0$ von \mathfrak{B}^3 in der Umgebung von Q_ν . Z.B.

$$\text{I.} \quad \nabla_1(h) \equiv \left| \frac{\partial h(z_1, t, \bar{t})}{\partial t} \right|^2 - \left| \frac{\partial h(z_1, t, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \right|^2 \neq 0. \quad (3.3)$$

Es ist nämlich $\frac{D(h, \bar{h})}{D(t, \bar{t})} = \nabla_1(h)$; nach dem Satz über implizite Funktionen erhalten wir

$$t = g_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2), \quad \bar{t} = g_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2), \quad (3.4)$$

woraus nach (3.2)

$$[\mathcal{O}(z_1, \bar{z}_1)]^2 = g_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) g_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) \quad (3.5)$$

folgt.

$$\text{II.} \quad t \frac{\partial h}{\partial t} - \bar{t} \frac{\partial h}{\partial \bar{t}} \neq 0. \quad (3.6)$$

Wir setzen in diesem Falle $\bar{t} = \frac{[\mathcal{O}(z_1, \bar{z}_1)]^2}{t}$. Es ist

$$\frac{dh[z_2, t, \mathcal{O}^2(z_1, \bar{z}_1)t^{-1}]}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\mathcal{O}^2(z_1, z_2)}{t^2} \frac{\partial h}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{t} \left[t \frac{\partial h}{\partial t} - \bar{t} \frac{\partial h}{\partial \bar{t}} \right] \neq 0,$$

wir können somit $t = g(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ und

$$\mathcal{O}(z_1, \bar{z}_1) = |g(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)| \quad (3.7)$$

schreiben.

Beispiel. Sei $\mathfrak{B}^3 = \mathbf{E}[|t| - |z_1|^2 = 0]$, $z_2 = h(z_1, t, \bar{t}) \equiv t + |t|^{\frac{1}{2}} z_1$.

Die zweite Methode ergibt $t = z_2 - |z_1| z_1$, woraus

$$(z_1 \bar{z}_1)^2 = (z_2 - |z_1| z_1)(\bar{z}_2 - |z_1| \bar{z}_1) \text{ d.h. } z_2 \bar{z}_2 - \sqrt{z_1 \bar{z}_1} (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 0$$

folgt.

§ 4. Die Nulllinie \mathfrak{l}_0^1 .

Sei uns eine ganze a. F. $f^{(1)}(z_1, z_2)$ v. 2 k. V. gegeben und setzen wir

$$F^{(1)}(z_1, t, \bar{t}) = f^{(1)}[z_1, h(z_1, t, \bar{t})], \quad \mathfrak{N}_0^2 = \mathbf{E}[F^{(1)}(z_1, t, \bar{t}) = 0]. \quad (4.1)$$

Den Schnitt von \mathfrak{B}^3 mit \mathfrak{N}_0^2 bezeichnen wir mit \mathfrak{l}_0^1 .

Nach (3.2) und (4.1) ist \mathfrak{f}_0^1 in Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\equiv F^{(1)}[re^{i\varphi}, S(r)e^{i\psi}, S(r)e^{-i\psi}] = 0, \\ \Phi_2 &\equiv \overline{F}^{(1)}[re^{-i\varphi}, S(r)e^{-i\psi}, S(r)e^{i\psi}] = 0\end{aligned}\quad (4.2)$$

gegeben.

In jedem Punkte $Q \in \mathfrak{f}_0^1$, wo keine der drei folgenden Relationen

$$F_{z_1}^{(1)} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(r, \varphi)} = -i\{2|F_{z_1}^{(1)}|^2 + 2S_r \operatorname{Re}[F_{z_1}^{(1)}(\overline{F_t^{(1)}}e^{i(\varphi-\psi)} + \overline{F_t^{(1)}}e^{i(\varphi+\psi)})]\} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{sr} \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(\psi, \varphi)} = 2S_r \operatorname{Im}\{\overline{F_{z_1}^{(1)}}[F_t^{(1)}e^{i(\psi-\varphi)} + F_t^{(1)}e^{-i(\psi+\varphi)}]\} = 0, \quad (4.5)$$

$$\operatorname{Re} = \text{Realteil}, \operatorname{Im} = \text{Imaginärteil}, F_{z_k}^{(1)} \equiv \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_k}, S_r \equiv \frac{dS}{dr}, F_t^{(1)} \equiv \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}, \overline{F_t^{(1)}} \equiv \frac{\partial \overline{F}^{(1)}}{\partial t},$$

besteht, gilt in einer genügend kleinen Umgebung \mathfrak{u}_ν bzw. \mathfrak{f}_ν^3 erstens für \mathfrak{N}_0^2 die Darstellung

$$z_1 = z_1^{(v)}(t, \bar{t}) \quad (4.6)$$

zweitens für \mathfrak{f}_0^1 die Darstellung

$$\begin{aligned}r &= r^{(v)}(\psi), \quad \varphi = \varphi^{(v)}(\psi), \\ z_2 &= h[r^{(v)}(\psi)e^{i\varphi^{(v)}(\psi)}, S(r^{(v)}(\psi))e^{i\psi}, S(r^{(v)}(\psi))e^{-i\psi}],\end{aligned}\quad (4.7)$$

wobei $r^{(v)}(\psi)$, $\varphi^{(v)}(\psi)$ reguläre Funktionen der reellen Veränderlichen ψ sind. $r^{(v)}(\psi)$ ist dabei eine umkehrbar eindeutige Funktion von ψ .

Diejenigen $r = |z_1|$, für welche Punkte $\{re^{i\varphi}, se^{i\psi}\}$ von \mathfrak{f}_0^1 auftreten, wo mindestens eine der drei Gleichungen (4.3), (4.4), (4.5) erfüllt ist, wollen wir kurz *Ausnahmekoordinaten* von \mathfrak{f}_0^1 nennen und stets mit R_k bezeichnen. (Es können natürlich zu einem R_k mehrere Punkte $\{R_k e^{i\varphi^{(p)}}, S(R_k) e^{i\psi^{(p)}}\}$, $p = 1, 2, \dots$, gehören, für welche eine der angegebenen drei Gleichungen erfüllt ist.)

Die Voraussetzung bezüglich \mathfrak{f}_0^1 , auf die wir bereits im § 1 hingewiesen haben, besteht nun darin, daß die Menge der Ausnahmekoordinaten höchstens aus abzählbar vielen R_k , $k = 1, 2, \dots$, $R_k < R_{k+1}$, besteht, die sich nirgends im Endlichen haufen. Wir werden in diesem Falle kurz über eine 0-Kurve der Klasse B sprechen.

Beispiel. Sei

$$\mathfrak{g}^3 = \mathbf{E}[s = r^2], \quad z_2 = t + |t|^{\frac{1}{2}} z_1, \quad f^{(1)}(z_1, z_2) = e^{2\pi i(z_1^2 + z_2)} - 1. \quad (4.8)$$

Es ist dann $F^{(1)}$

$$F^{(1)}(z_1, t, \bar{t}) = e^{2\pi i(z_1^2 + t + z_1 \sqrt{|t|})} - 1,$$

$$\mathfrak{N}_0^2 = \mathbf{E}[z_1^2 + t + z_1 \sqrt{|t|}] = \nu, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots]. \quad (4.9)$$

In jedem Punkte von \mathfrak{f}_0^1 existiert die Darstellung (4.6), denn aus (4.9) folgt

$$z_1 = -\frac{1}{2}[\sqrt{|t|} \pm \sqrt{|t| - 4t + 4\nu}] \quad (4.10)$$

Die Verzweigungsstellen (außer $t=0$) befinden sich außerhalb von $|t| = \nu^2$, denn der unter der Wurzel stehende Ausdruck verschwindet nur für $t = \frac{4}{3}\nu$, und dann haben wir $|t| = 4\nu^2$, d.h. diese Punkte befinden sich außerhalb \mathfrak{B}^3 .

Um zur Darstellung (4.7) zu gelangen, ersetzen wir in (4.9) z_1 durch $re^{i\varphi}$, t durch $r^2e^{i\psi}$. Trennt man dann den Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv \cos 2\varphi + \cos \varphi + \cos \psi = 0, \\ G_2 &= r^2(\sin 2\varphi + \sin \varphi + \sin \psi) - \nu = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

woraus

$$\varphi = i \ln \frac{4}{\left[-1 \pm \sqrt{9 - 8 \cos \psi} \pm \sqrt{-6 - 8 \cos \psi \pm 2\sqrt{9 - 8 \cos \psi}} \right]}, \quad (4.7a)$$

$$r = \sqrt{\frac{8\nu}{8 \sin \psi \pm \sqrt{6 + 8 \cos \psi \pm 2\sqrt{9 - 8 \cos \psi}} \left[-1 \pm \sqrt{9 - 8 \cos \psi} \right]}}$$

folgt.

Für $\cos \varphi = -1$, $\sin \psi = \pm 1$ verschwindet der Ausdruck $(6 + 8 \cos \psi - 2\sqrt{9 - 8 \cos \psi})$. Man erhält somit als Ausnahmekoordinaten

$$r = \sqrt{\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Für alle anderen Werte von ψ sind die Ausdrücke (4.7a) reguläre Funktionen von ψ , und wir müssen nun noch feststellen, für welche r der zweite in (4.7a) auftretende Ausdruck nicht umkehrbar eindeutig ist.

Zu diesem Zweck wollen wir feststellen, für welche Werte $\frac{D(G_1, G_2^*)}{D(\varphi, \psi)}$ verschwindet $\left(G_2^* = \frac{G_2}{r^2}\right)$.

Wir müssen somit Werte $\frac{\nu}{r^2}$ bestimmen, für die simultan die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv 2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi + \cos \psi - 1 = 0 \\ G_2^* &\equiv 2 \sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi + \sin \psi - \frac{\nu}{r^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$G_3 \equiv \frac{D(G_1, G_2^*)}{D(\varphi, \psi)} = \cos \psi (2 \cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi) - \sin \psi (2 \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi + \cos \varphi) = 0$$

bestehen. Aus $G_3 = 0$ erhalten wir

$$\cos \psi (2 \cos \varphi + 1) \sin \varphi = (4 \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 2) \sqrt{1 - \cos^2 \psi}.$$

Ersetzt man aus $G_1 = 0$ $\cos \psi$ durch $-(2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} [2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1]^2 [4 \cos \varphi + 1]^2 [1 - \cos^2 \varphi] = \\ [4 \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 2]^2 [1 - (2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1)^2]. \end{aligned}$$

Man erhält als Lösungen dieser Gleichung

$$\cos \varphi = -0,9; \quad = 0,26; \quad = 0,536.$$

Berechnet man nun aus $G_1 = 0$ die entsprechenden ψ , so erhält man aus $G_2^* = 0$ neben den in (4.10) angegebenen die folgenden Ausnahmekoordinaten R_k

$$\begin{aligned} \sqrt{1,930\nu}, \quad \sqrt{1,792\nu}, \quad \sqrt{1,299\nu}, \\ \sqrt{0,761\nu}, \quad \sqrt{0,4205\nu}, \quad \sqrt{0,369\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Betrachten wir ein Intervall $r^{(1)} \leq r \leq r^{(2)}$, das keine Ausnahmekoordinaten R_k enthält, und bezeichnen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{*3} &= \mathcal{S}_{r=r^{(1)}}^{r^{(2)}} \mathfrak{F}^2[r, S(r)] = \\ &= \mathbf{E}[z_2 = h(z_1, t, \bar{t}), \quad |t| = S(|z_1|), \quad r^{(1)} \leq |z_1| \leq r^{(2)}]! \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nach dem Heine-Borelschen Satz gibt es zu jedem Punkt $Q_\nu \{r^0 e^{i\varphi^0}, S(r^0) e^{i\psi^0}\}$ von $\mathfrak{F}_0^{*1} = \mathfrak{F}_0^1 \cdot \mathfrak{S}^{*3}$ eine Umgebung

$$\mathfrak{F}_\nu^3 = \mathbf{E}[|r - r^0| \leq \varrho, \quad |\varphi - \varphi^0| \leq \Phi, \quad |\psi - \psi^0| \leq \Psi, \quad (4.14)$$

so daß für \mathfrak{F}_0^1 [bzw. \mathfrak{N}_0^2] in \mathfrak{F}_ν^3 [bzw. in \mathfrak{U}_ν] die Darstellungen (4.7) [bzw. (4.6)] gelten und durch diese Darstellung alle Punkte, die in dieser Umgebung liegen, erschöpft werden. (Dabei sind ϱ , Φ und $\Psi > 0$ und *unabhängig von der Wahl des Punktes*.)

Insbesondere werden auch die Flächen $\mathbf{E}[r = r^{(1)} + p\varrho]$, $p = 0, 1, \dots, P-1$, $P\varrho = r^{(2)} - r^{(1)}$, $\mathbf{E}[\varphi = l\Phi]$, $l = 0, 1, \dots, L-1$, $L\Phi = 2\pi$, durch \mathfrak{F}_0^1 in einer endlichen Anzahl von Punkten geschnitten, deren Projektionen auf die ψ -Achse wir (der Größe

$$\mathfrak{w}_\alpha^3 = \mathcal{S}_{l=0}^{L-1} \mathcal{S}_{p=0}^{P-1} \mathfrak{f}_{l\alpha p}^3 = \mathbb{E}[r^{(1)} < r < r^{(2)}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \psi_\alpha < \psi < \psi_{\alpha+1}] \quad (4.17)$$

wird somit eine endliche Anzahl, etwa a_α , von Kurvenzügen $\mathfrak{p}_{\alpha\nu}^1$, $\nu = 1, 2, \dots, a_\alpha$, liegen, von denen jeder ein umkehrbar eindeutiges Bild des Intervalles $\mathfrak{t}_\alpha^1 = [\psi_\alpha, \psi_{\alpha+1}]$ ist. Es ist

$$\mathfrak{t}_0^{*1} = \mathcal{S}_{\alpha=1}^b \mathcal{S}_{\nu=1}^{a_\alpha} \mathfrak{p}_{\alpha\nu}^1 + \mathfrak{e}, \quad (4.18)$$

wo \mathfrak{e} die Menge von (endlich vielen) Punkten von \mathfrak{t}_0^{*1} bedeutet, deren ψ -Koordinaten die Werte ψ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, b$ haben.

§ 5. Einführung eines Umlaufssinnes auf \mathfrak{t}_0^1 .

Den Betrachtungen des § 4 gemäß [vgl. insbesondere (4.6)] können wir \mathfrak{N}_0^2 in der Umgebung \mathfrak{U}_ν^{11} (vgl. § 4, S. [12] 316 von \mathfrak{f}_ν^3 in der Form $z_1 = z_1^{(\nu)}(se^{i\psi}, se^{-i\psi})$ darstellen. Für $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{N}_0^2 \cdot (\psi = \psi^0)$ gilt dementsprechend die Darstellung $z_1 = z_1^{(\nu)}(se^{i\psi^0}, se^{-i\psi^0})$. Auf jedem $\mathfrak{n}_\nu^1 = \mathfrak{n}^1 \cdot \mathfrak{U}_\nu$ führen wir einen bestimmten Umlaufssinn ein, nämlich denjenigen, der den wachsenden s entspricht. Die so orientierte Kurve \mathfrak{n}_ν^1 werden wir mit $\bar{\mathfrak{n}}_\nu^1$ bezeichnen.

Sei $\psi \neq \psi_\alpha$. (ψ_α bedeuten die im § 4, S. [12], 316 eingeführten Endpunkte der Intervalle \mathfrak{t}_α^1 .)

Da $r^{(\nu)}(\psi)$ [s. (4.7)] eine umkehrbar eindeutige Funktion von ψ ist und $\mathfrak{f}_\nu^3 = \mathfrak{U}_\nu \cdot \mathfrak{g}^{*3}$ ist, liegt auf \mathfrak{n}_ν^1 nur ein Punkt \mathbf{P} von \mathfrak{t}_0^{*1} . \mathbf{P} zerlegt \mathfrak{n}_ν^1 in zwei Teile, von denen der eine in $|t| - S(|z_1|) > 0$, der andere in $|t| - S(|z_1|) < 0$ liegt¹²⁾. Denn im Punkte \mathbf{P} ist

$$s - S[|z_1^{(\nu)}(se^{i\psi}, se^{-i\psi})|] = 0 \quad (5.1)$$

und nach (4.4) ist

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \{s - S[|z_1^{(\nu)}(se^{i\psi}, se^{-i\psi})|]\} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} S_r \cdot \left[\frac{dz_1^{(\nu)}}{dt} e^{i(\psi-\varphi)} + \frac{dz_1^{(\nu)}}{dt} e^{-i(\varphi+\psi)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\bar{dz}_1^{(\nu)}}{dt} e^{-i(\psi-\varphi)} + \frac{\bar{dz}_1^{(\nu)}}{dt} e^{i(\varphi+\psi)} \right] = \quad (5.2) \\ &= \frac{2|F_{z_1}|^2 + 2S_r \cdot \operatorname{Re}[F_{z_1}(\bar{F}_t e^{i(\varphi-\psi)} + \bar{F}_{\bar{t}} e^{i(\varphi+\psi)})]}{2|F_{z_1}|^2} \neq 0, \end{aligned}$$

¹¹⁾ Wir benutzen in diesem Paragraphen der Kürze halber an Stelle des Doppelindex ($\alpha\nu$) bzw. anstatt ($l\alpha p$) den Index (ν).

¹²⁾ Vgl. Abb. 2a oder 2b, in der allerdings bei \mathfrak{n}^1 die Bezeichnung \mathfrak{N}_0^2 steht, eine Bezeichnung, die sich auf die Vereinigungsmenge aller \mathfrak{n}^1 bezieht, die auftreten, wenn ψ im Intervall $[0, 2\pi]$ variiert.

da nach (4.1) $\frac{dz_1^{(v)}}{dt} = -\frac{F_t}{F_{z_1}}, \frac{dz_1^{(v)}}{dt} = -\frac{F_t}{F_{z_1}}$ u.s.w. ist. Je nachdem in einem Punkte $P \in \mathfrak{f}_0^{*1}$ (5.2) positiv oder negativ ist, definieren wir in dem entsprechenden Punkte P auf \mathfrak{f}_0^{*1} denjenigen Umlaufssinn, der den wachsenden bzw. abnehmenden ψ , entspricht. [Vgl. die Darstellung (4.16) von \mathfrak{p}_ν^1 , ($\mathfrak{f}_0^{*1} = \mathcal{O} \mathfrak{p}_\nu^1 + e$).]

[Im ersten Fall befindet sich derjenige Teil von \mathfrak{p}_ν^1 , der den kleineren Werten von $s = |t|$ entspricht, in $s - S(|z_1|) > 0$, der andere Teil in $s - S(|z_1|) < 0$, d.h. die Kurve \mathfrak{p}_ν^1 führt aus $s - S(|z_1|) > 0$ heraus, im zweiten Falle ist es umgekehrt, d.h. die Kurve \mathfrak{p}_ν^1 führt in $s - S(|z_1|) > 0$ hinein.]

Die so orientierte Kurve \mathfrak{f}_0^{*1} werden wir mit $\widehat{\mathfrak{f}}_0^{*1}$ bezeichnen, die einzelnen Kurvenstücke, aus denen $\widehat{\mathfrak{f}}_0^{*1}$ besteht, entsprechend mit $\widehat{\mathfrak{p}}_\nu^1$ [vgl. (4.16)]. Wir ordnen schließlich $\widehat{\mathfrak{f}}_0^{*1}$ die Funktion $\mu(P)$ zu, wobei $\mu(P) = +1$, wenn in P der Ausdruck (5.2) positiv, $\mu(P) = -1$, wenn in P (5.2) negativ ist.

Nach den Ausführungen im § 4 (s. S. [9] 313) entspricht jedem $r = \varrho$ ein einziger Punkt $\{z_1 = \varrho e^{i\varphi(\psi^0)}, t = S(\varrho)e^{i\psi^0}\}$ von \mathfrak{p}_ν^1 . Auf der Kurve

$$\mathfrak{v}^1(\varrho, \psi^0) = \{z_1 = \varrho e^{i\varphi}, t = S(\varrho)e^{i\psi^0}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad (5.3)$$

können deshalb höchstens $q = bPL$ Punkte $P_k(\varrho, \psi^0)$, $k = 1, 2, \dots, p$, $p \leq q$, von \mathfrak{f}_0^{*1} liegen. (Im allgemeinen werden sich auf $\mathfrak{v}^1(\varrho, \psi^0)$ überhaupt keine Punkte von \mathfrak{f}_0^{*1} befinden.)

Wir setzen

$$\delta(\varrho, \psi^0) = \sum_{k=1}^{p(\varrho, \psi^0)} \mu[P_k(\varrho, \psi^0)]. \quad (5.4)$$

Bezeichnet man mit $\delta_1(\varrho, \psi^0)$ [bzw. $\delta_2(\varrho, \psi^0)$] die Anzahl der Punkte von $\widehat{\mathfrak{f}}_0^1$, die auf $\mathfrak{v}^1(\varrho, \psi^0)$ liegen, und in welchen $\widehat{\mathfrak{f}}_0^1$ dem wachsenden [bzw. abnehmenden] ψ entsprechenden Umlaufssinn hat, so ist

$$\delta(\varrho, \psi^0) = \delta_1(\varrho, \psi^0) - \delta_2(\varrho, \psi^0).$$

Unseren Ausführungen gemäß treten in Punkten $P_k, P_k \in \mathfrak{v}^1(\varrho, \psi^0)$, $\delta_1(\varrho, \psi^0)$ Zweige \mathfrak{p}_ν^1 in $|t| - S(|z_1|) > 0$ ein und $\delta_2(\varrho, \psi^0)$ Zweige \mathfrak{p}_ν^1 aus $|t| - S(|z_1|) > 0$ aus. Andererseits ist der Unterschied der Anzahl der Nullstellen von $F_k[z, S(r)e^{i\psi}]$ im Kreise $|z| \leq r$ für $r = \varrho + \varepsilon$ und $r = \varrho - \varepsilon$ bei genügend kleinem ε , gleich dem Unterschied, der die Fläche $\mathfrak{g}^3 \cdot (\psi = \psi^0)$ in Punkten $P_k, P_k \in \mathfrak{v}^1(\varrho, \psi^0)$, durchstoßenden, in $|t| - S(|z_1|) > 0$ eintretenden und aus $|t| - S(|z_1|) > 0$ austretenden Zweige \mathfrak{p}_ν^1 (s. Abb. 2b), so daß

man die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p(\varrho, \psi^0)} \mu[P_k(\varrho, \psi^0)] &= \delta(\varrho, \psi^0) = \delta_1(\varrho, \psi^0) - \delta_2(\varrho, \psi^0) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{n[\varrho + \varepsilon, F_k^{-1}(z, S(\varrho + \varepsilon)e^{i\psi^0})] - \\ &\quad - n[\varrho - \varepsilon, F_k^{-1}(z, S(\varrho - \varepsilon)e^{i\psi^0})]\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

erhält.

§ 6. Erweiterte Funktionenklasse. Die Integraldarstellung.

Die Funktionen $H(z_1, z_2)$ der erweiterten Klasse mögen dadurch definiert werden, daß

1. $H(z_1, z_2)$ in jedem analytischen Flächenstück $\mathfrak{S}_2^2(z_1)$, $|z_1| \leq r$ eine harmonische Funktion der Veränderlichen x_2, y_2 bildet;
2. $H(z_1, z_2)$ in jeder Lamelle $\mathfrak{S}_1^2(t)$, $|t| = s$ [vgl. (2.4)] eine harmonische Funktion der Veränderlichen z_1 bildet, m.a.W. $H[z_1, h(z_1, t)]$ für jedes feste t , $|t| = s$, und $|z_1| < r$ eine harmonische Funktion der Veränderlichen x_1, y_1 bildet.

Wir gehen zur Aufstellung der Integralformel über und wollen zunächst einige Abkürzungen einführen.

Sei $w(z_2, z_1)$, $w(0, z_1) = 0$, $w'(0, z_1) > 0$ diejenige Funktion,

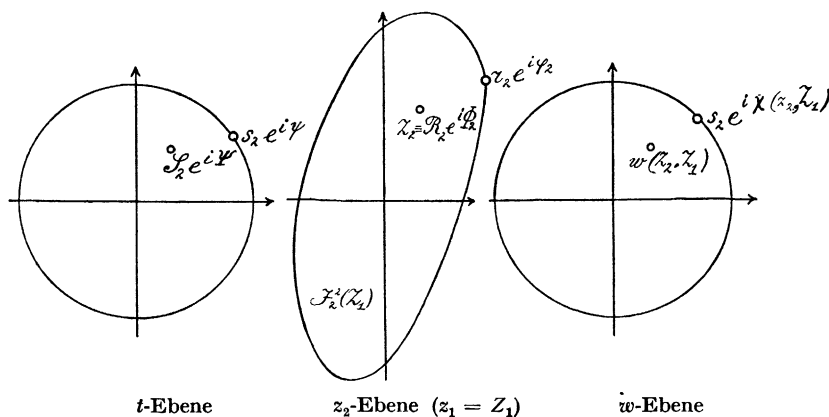


Fig. 4.

welche das Gebiet $\mathfrak{S}_2^2(z_1)$ auf den Kreis vom Radius s abbildet und $\chi(z_2, z_1) = \arg w(z_2, z_1)$. [$\arg w = \text{Argument von } w$.]

Wir setzen

$$P_1[r e^{i\varphi}, R_1 e^{i\Phi_1}] = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - R_1^2}{r^2 + R_1^2 - 2r R_1 \cos(\Phi_1 - \varphi)}, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} &P_2[w(r_2 e^{i\varphi_2}, Z_1), w(R_2 e^{i\Phi_2}, Z_1)] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{s^2 - |w(R_2 e^{i\Phi_2}, Z_1)|^2}{s^2 + |w(R_2 e^{i\Phi_2}, Z_1)|^2 - 2s |w(R_2 e^{i\Phi_2}, Z_1)| \cos[\chi(r_2 e^{i\varphi_2}, Z_1) - \chi(R_2 e^{i\Phi_2}, Z_1)]}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\Psi_1(r, R_1 e^{i\Phi_1}, a) = \log \left| \frac{r^2 - \bar{a} R_1 e^{i\Phi_1}}{r(a - R_1 e^{i\Phi_1})} \right|, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2[s, w(R_2 e^{i\Phi_2}, Z_1), w(A_{kv}(Z_1), Z_1)] = \\ = \log \left| \frac{s^2 - w(A_{kv}(Z_1), Z_1) w(R_2 e^{i\Phi_2}, Z_1)}{s[w(A_{kv}(Z_1), Z_1) - w(R_2 e^{i\Phi_2}, Z_1)]} \right|. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dabei ist $r_2 e^{i\varphi_2} = h[Z_1, s e^{i\psi}, s e^{-i\psi}]$, $R_2 e^{i\Phi_2} = h[Z_1, S e^{i\psi}, S e^{-i\psi}]$. $A_{kv}(Z_1)$, $k = 1, 2$, sind die Null- bzw. Polstellen von $f[Z_1, z]$, $Z_1 = \text{const.}$

Nach der Jensenschen Formel ist ¹³⁾

$$\begin{aligned} \log |f(Z_1, Z_2)| = \\ = \int_0^{2\pi} \log |f(Z_1, z_2)| P_2[w(z_2, Z_1), w(Z_2, Z_1)] d\chi(z_2, Z_1) + \\ + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \sum_{\nu} \Psi_2[s, w(Z_2, Z_1), w(A_{kv}(Z_1), Z_1)], \quad Z_2 = R_2 e^{i\Phi_2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

In jedem $\mathfrak{S}_1^2(t)$ ist wieder nach der Jensenschen Formel (der Annahme 2 gemäß)

$$\begin{aligned} \log |f(Z_1, z_2)| = \log |f[Z_1, h(Z_1, t, \bar{t})]| = \\ = \int_0^{2\pi} \log |f[z_1, h(z_1, t, \bar{t})]| P_1[z_1, Z_1] d\varphi + \\ + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \sum_{\nu} \Psi_1[r, Z_1, a_{kv}(t)], \end{aligned} \quad (6.6)$$

wo $a_{kv}(t)$, $k = 1, 2$, die Null- bzw. Polstellen von $f[z, h(z, t, \bar{t})]$, t const., bedeuten, die $\leq r$ ausfallen. Aus (6.5) folgt:

$$\begin{aligned} \log |f(Z_1, Z_2)| = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f[z_1, h(z_1, t, \bar{t})]| \cdot \\ P_1[z_1, Z_1] \cdot P_2[w(z_2, Z_1), w(Z_2, Z_1)] d\varphi d\chi(z_2, Z_1) + \\ + \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \sum_{\nu} \Psi_1[r, Z_1, a_{kv}(t)] \cdot \\ P_2[w(z_2, Z_1), w(Z_2, Z_1)] d\chi(z_2, Z_1) + \\ + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \sum_{\nu} \Psi_2[s, w(Z_2, Z_1), w(A_{kv}(Z_1), Z_1)] \end{aligned} \quad (6.7)$$

§ 7. Die verallgemeinerte Jensen-Nevanlinnasche Formel.

Setzt man in (6.7) $Z_1 = Z_2 = 0$, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß $h(0, t, \bar{t}) = t$ und $\chi(z_2, 0) = \psi$ ist,

¹³⁾ Falls das Gegenteil nicht hervorgehoben wird, sind die Integrale im Lebesgueschen Sinne zu verstehen.

$$\begin{aligned} \log |f(0, 0)| &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f[re^{i\varphi}, h(re^{i\varphi}, se^{i\psi}, se^{-i\psi})]| d\varphi d\psi + \\ &+ \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu} \log \frac{r}{|a_{k\nu}(se^{i\psi})|} \right] d\psi + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \sum_{\nu} \log \frac{r_2}{|A_{k\nu}(0)|}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Wir setzen nun $f = \frac{f_1}{f_2}$, wo f_1 und f_2 zwei ganze teilerfremde Funktionen sind, und führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$F(z_1, t) = f[z_1, h(z_1, t, \bar{t})], \quad F_k(z_1, t) = f_k[z_1, h(z_1, t, \bar{t})], \quad k = 1, 2, \quad (7.2)$$

$$\mathbf{m}(r, s, f)^{14)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{i\varphi}, se^{i\psi})| d\varphi d\psi, \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(r, s, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu} \log \frac{r}{|a_{2\nu}(se^{i\psi})|} \right] d\psi + \sum_{\nu} \log \frac{s}{|A_{2\nu}(0)|} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \log |F_2(re^{i\varphi}, se^{i\psi})| d\varphi - \log |F_2(0, se^{i\psi})| \right] d\psi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_2(0, se^{i\psi})| d\psi - \log |f_2(0, 0)| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N[r, F_2^{-1}(z, se^{i\psi})] d\psi + N[s, f_2^{-1}(0, z)]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Unter Benutzung dieser Bezeichnungen schreibt man (7.1)

$$\log |f(0, 0)| + \mathbf{m}(r, s, f^{-1}) + \mathbf{N}(r, s, f^{-1}) = \mathbf{T}(r, s, f), \quad (7.6)$$

$$\mathbf{T}(r, s, f) = \mathbf{m}(r, s, f) + \mathbf{N}(r, s, f). \quad (7.7)$$

Indem man in üblicher Weise vorgeht, gelangt man zu dem

Satz: Sei $f(z_1, z_2)$, $f(0, 0) \neq a$, eine in $|z_k| < \infty$, $k = 1, 2$, meromorphe Funktion, die im Anfang regulär ist. Dann ist

$$\mathbf{m}[r, s, (f-a)^{-1}] + \mathbf{N}[r, s, (f-a)^{-1}] = \mathbf{T}(r, s, f) + h(r, s), \quad (7.8)$$

wo

$$|h(r, s)| \leq |\log |f(0, 0) - a|| + \log^+ |a| + \log 2 \quad (7.9)$$

ist.

¹⁴⁾ Diese und andere Größen, sofern sie sich auf den Fall der F. v. 2 k. V. beziehen, bezeichnen wir mit fetten Buchstaben im Gegensatz zu der Bezeichnung mit gewöhnlichen Buchstaben der entsprechenden Größen im Falle der F. 1 k. V. Wird der Operator N , n , m bzw. T bei einer F. v. 2 k. V. gebildet, wobei eine der Veränderlichen als ein fester Parameter auftritt, so wird diejenige Veränderliche, auf welche sich der angegebene Operator bezieht, stets mit z bezeichnet.

§ 8. *Blätteranzahl einer Fläche in einem analytischen Hyperflächenstück.*

Sei $f_k(z_1, z_2)$ eine ganze a. F. v. 2 k. V. z_1, z_2 und

$$n[r_1, F_k^{-1}(z_1, t)], \quad F_k(z_1, t) \equiv f_k[z_1, h(z_1, t, \bar{t})], \quad (8.1)$$

die Anzahl der Schnitte der Fläche $\mathfrak{R}_0^2 = E[f_k(z_1, z_2) = 0]$ mit der Lamelle $\mathfrak{S}_1^2(t)$ [vgl. (2.4)], d.h. die Anzahl der Nullstellen $a_{kv}(t)$ von $f_k[z_1, h(z_1, t, \bar{t})]$, t const., $|a_{kv}(t)| \leq r$. (Man kann natürlich (8.1) als die Anzahl der Schnitte von $F_k(z, t)$ mit $t = \text{const}$, $|z| \leq r$ definieren.)

Als die *Blätterzahl* von \mathfrak{R}_0^2 in dem analytischen Hyperflächenstück $\mathfrak{e}_1^3 = \mathcal{S} \int_{\psi=0}^{2\pi} \mathfrak{S}_1^2(s e^{i\psi})$ [mit der Mantelfläche $\mathfrak{S}^2(r, s) = \mathcal{S} \int_{\psi=0}^{2\pi} i_1^1(se^{i\psi})$ (vgl. (2.5))] bezeichnen wir den Mittelwert

$$A[r, s, f_k^{-1}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n[r, F_k^{-1}(z, se^{i\psi})] d\psi. \quad (8.2)$$

Einige Eigenschaften von $n[r, F_k^{-1}(z, S(r)e^{i\psi})]$ und von $A[r, S(r), f_k^{-1}]$ ¹⁵⁾.

1. Für jedes $r_1 < \infty$, $s_1 < \infty$ gibt es ein C , so daß $A(r, s, f_k^{-1}) \leq C + |\log |f_k(0, 0)||$ ausfällt, wenn $r \leq r_1$, $s \leq s_1$ ist. Denn, wie wir nachträglich zeigen werden (s. IIa, S. [26] 330), ist $A(r, s, f_k^{-1}) \leq (\log k^0)^{-1} N(k^0 r, s, f_k^{-1})$, $k^0 > 1$. Außerdem ist nach (7.5)

$$N(k^0 r, s, f_k^{-1}) = \frac{1}{4} \pi^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F_k(k^0 r e^{i\varphi}, s e^{i\psi})| d\varphi d\psi - \log |f_k(0, 0)|,$$

da nach (8.1) und § 2 $F_k(0, se^{i\psi}) \equiv f_k(0, se^{i\psi})$ ist. Da $f_k(z_1, z_2)$ eine ganze Funktion ist, existiert ein C , so daß $|F_k(k^0 r e^{i\varphi}, s e^{i\psi})| \leq e^C$, für $r < r_1$, $s < s_1$, ausfällt.

2. Sei $I^1 = E[r^{(1)} \leq r \leq r^{(2)}]$ ein Intervall, das keine Ausnahmekoordinaten R_k enthält. (Wegen Ausnahmekoordinaten vgl. § 4.) Sei ferner \mathfrak{Q}^2 das Rechteck $r^{(1)} \leq r \leq r^{(2)}$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ der $r\psi$ -Ebene.

$n[r, F_k^{-1}(z, S(r)e^{i\psi})]$ ist eine in \mathfrak{Q}^2 beschränkte Funktion. Da

$$n[r, F_k^{-1}(z, S(r)e^{i\psi})] \leq n[r^{(2)}, F_k^{-1}(z, S(r)e^{i\psi})] \quad (8.3)$$

ist, genügt es, unsere Behauptung für die rechtsstehende Größe zu beweisen. Für jeden festen Wert $S(r)e^{i\psi}$ ist dieser Ausdruck

¹⁵⁾ Wegen $S(r)$ vgl. § 3.

als Anzahl der Nullstellen einer in $|z| \leq r^{(2)}$ regulären Funktion $F_k(z, S(r)e^{i\psi})$ beschränkt. Da $S(r)$ eine monoton wachsende und stetige Funktion von r ist, nimmt $S(r)$ für $r^{(1)} \leq r \leq r^{(2)}$ alle Werte eines Intervalles, etwa des Intervalles $[S^{(1)}, S^{(2)}]$, an. Wäre nun $n[r^{(2)}, F_k^{-1}(z, S e^{i\psi})]$ in dem Rechteck $S^{(1)} \leq S \leq S^{(2)}$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, nicht beschränkt, so müßte eine Folge $\{S^{(m)}, \psi^{(m)}\}$, $m = 3, 4, \dots$, existieren, so daß $\lim_{m \rightarrow \infty} n[r^{(2)}, F_k^{-1}(z, S^{(m)} e^{i\psi^{(m)}})] = \infty$ wird; diese Folge müßte einen Häufungspunkt, etwa $\{S^{(0)}, \psi^{(0)}\}$, haben. Es müßte deswegen ein Punkt $z_1 = z_1^0$ und eine Funktionenfolge $F_k[z_1, S^{(m_p)} e^{i\psi^{(m_p)}}]$, $p = 1, 2, \dots$, existieren, so daß $F_k[z_1, S^{(m_p)} e^{i\psi^{(m_p)}}]$ für genügend große p in $\mathfrak{B}_1^2 = \mathbb{E}[|z_1 - z_1^0| \leq \varrho_1]$ (ϱ_1 hinreichend klein) beliebig viele Nullstellen besitzt. Andererseits kann $F_k[z_1, S^{(0)} e^{i\psi^{(0)}}]$ nicht identisch verschwinden, da sonst $F_k[z_1, S^{(0)} e^{i\psi^{(0)}}] \equiv 0$ wäre. Der Schnitt $\mathfrak{B}^{*3} \cdot \mathbb{E}[F_k(z_1, S^{(0)} e^{i\psi^{(0)}}) = 0]$ würde eine Kurve bilden, so daß $\mathfrak{f}_0^{*1} \cdot (\psi = \psi^{(0)})$ eine ganze Kurve enthalten hätte, was aber unmöglich ist, da ja nach den Ausführungen im § 4 (vgl. S. [12] 316) $\mathfrak{f}_0^{*1} \cdot (\psi = \psi^{(0)})$ aus endlich vielen isolierten Punkten besteht. Da nun $F_k[z_1, S^{(0)} e^{i\psi^{(0)}}]$ nur endlich viele Nullstellen hat, ist es möglich, eine geschlossene, \mathfrak{B}_1^2 enthaltende Kurve \mathfrak{g}^1 zu ziehen, auf der $|F_k(z_1, S^{(0)} e^{i\psi^{(0)}})| \geq a > 0$ ist (a hinreichend klein). Infolge der gleichmäßigen Stetigkeit von $F_k(z_1, t)$ existiert eine Umgebung $\mathfrak{B}_2^2 = \mathbb{E}[|t - S^{(0)} e^{i\psi^{(0)}}| \leq \varrho_2]$ ($\varrho_2 > 0$, hinreichend klein), so daß für $z_1 \in \mathfrak{g}^1$, $t \in \mathfrak{B}_2^2$, $|F_k(z_1, t)| \geq \frac{a}{2}$ ist. Da $F_{z_1}(z_1, t)$, $F_{z_1} \equiv \frac{\partial F_k}{\partial z_1}$, in $\mathfrak{g}^1 \times \mathfrak{B}_2^2$ beschränkt und die Anzahl $\nu(t)$ der Nullstellen von $F_k(z_1, t)$, t const, innerhalb von \mathfrak{g}^1 durch $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{g}^2} \frac{F_{z_1}(z_1, t) dz_1}{F_k(z_1, t)}$ gegeben ist, ist $\nu(t)$ für $t \in \mathfrak{B}_2^2$ kleiner als eine feste Konstante, was im Widerspruch damit steht, daß $\lim_{p \rightarrow \infty} \nu[S^{(m_p)} e^{i\psi^{(m_p)}}] = \infty$ ist. $n[r, F_k(z, S(r)e^{i\psi})]$ muß nun somit in \mathfrak{Q}^2 beschränkt sein, w.z.b.w.

3. In jedem Intervall $\mathfrak{I}^1 = \mathbb{E}[r^{(1)} \leq r \leq r^{(2)}]$ das keine Ausnahmekoordinaten enthält, ist $\mathbf{A}[r, S(r), f^{-1}]$ eine Funktion von beschränkter Schwankung. Um dies zu beweisen, wollen wir für die Schwankung von $n[r, F_k^{-1}(z, S(r)e^{i\psi})]$ eine von ψ unabhängige obere Schranke angeben.

$$n[r, F_k^{-1}(z, S(r)e^{i\psi^0})], \quad \psi^0 \text{ const}, \quad (8.4)$$

ist eine in \mathbb{I}^1 abteilungsweise stetige Funktion. Sie erleidet nur für diejenigen Werte von r einen Sprung, für welche $\mathfrak{n}_0^1 = \mathfrak{N}_0^2 \cdot (\psi_2 = \psi_2^0)$ die Fläche $\mathfrak{B}^{*3} \cdot (\psi = \psi^0)$ durchsetzt, d.h. wenn für das betreffende ψ^0 und r sich auf

$$v^1(r, \psi^0) = E[z_1 = re^{i\varphi}, t = S(r)e^{i\psi^0}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

ein Punkt von \mathfrak{f}^{*1} befindet. Nach den Ausführungen des § 4 ist $\mathfrak{f}_0^{*1} = \bigcup_{v=1}^l \mathfrak{p}_v^1 + e$, wobei \mathfrak{p}_v^1 durch (4.7) gegeben ist. Dabei ist $r^{(v)}(\psi^0)$ eine umkehrbar eindeutige Funktion von ψ , so daß in der Umgebung \mathfrak{f}_v^3 , wo diese Darstellung gilt, jedem gegebenen r nur ein Punkt von \mathfrak{f}_0^{*1} entspricht. Andererseits ist die Anzahl der Umgebungen \mathfrak{f}_v^3 endlich, etwa q , so daß auf der Kurve $v^1(r, \psi)$ höchstens q Punkte von \mathfrak{f}_0^{*1} liegen. In jedem Punkte von \mathfrak{f}_0^{*1} erleidet (8.4) einen Sprung, der gleich $+1$ oder -1 ist, so daß die Gesamtschwankung von (8.4) in \mathbb{I}^1 höchstens gleich q ist. Nach (8.2) folgt, daß auch die Gesamtschwankung von $A[r, S(r), f^{-1}]$ beschränkt ist, w.z.b.w.

Mittlerer logarithmischer Abstand $L[r, s, f^{-1}]$ zwischen $z_1 = 0$ und dem Durchschnitt $\mathfrak{N}_0^2 \cdot \mathfrak{C}_1^3(r, s)$. (Wegen \mathfrak{C}_1^3 vgl. (2.5).) So bezeichnen wir den Ausdruck

$$L[r, s, f^{-1}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{|a_\nu(se^{i\psi})| \leq r} \log |a_\nu(se^{i\psi})| \right\} d\psi, \quad (8.5)$$

wo $a_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \dots$, die Nullstellen von $f[z_1, h(z_1, t, \bar{t})]$, t const., die $\leq r$ sind, bedeuten.

§ 9. Das λ -te Moment $D_\lambda[r, S(r), f^{-1}]$ der Kurve \mathfrak{f}_0^1 .

Betrachten wir ein Intervall $\{r^0, r\}$ in dem etwa k Ausnahmekoordinaten R_κ , $\kappa = 1, 2, \dots, k$, liegen. Wir verstehen unter dem λ -ten Moment $D_\lambda[r, S(r), f^{-1}]$ desjenigen Teiles von \mathfrak{f}_0^1 , für dessen z_1 -Koordinaten $r^0 \leq |z^1| \leq r$ gilt:

$$D_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r^0}^r = \lim_{\varepsilon_\kappa \rightarrow 0} \left\{ \left[\int_{r^0}^s \frac{dA}{\varrho^\lambda} + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \int_{R_\kappa + \varepsilon_\kappa}^{R_{\kappa+1} + \varepsilon_{\kappa+1}} \frac{dA}{\varrho^\lambda} + \int_{R_k + \varepsilon_k}^r \frac{dA}{\varrho^\lambda} \right] + \left[\sum_{\kappa=1}^k \left[\frac{A(R_\kappa + \varepsilon_\kappa, S(R_\kappa + \varepsilon_\kappa), f^{-1})}{(R_\kappa + \varepsilon_\kappa)^\lambda} - \frac{A(R_\kappa - \varepsilon_\kappa, S(R_\kappa - \varepsilon_\kappa), f^{-1})}{(R_\kappa - \varepsilon_\kappa)^\lambda} \right] \right] \right\}, \quad (9.1)$$

$$r \neq R_\kappa, \quad A \equiv A[\varrho, S(\varrho), f^{-1}],$$

wo \int das Stieltjessche Integral bedeutet.

Wir wollen zeigen, daß der Ausdruck (9.1) von der Art des

Grenzüberganges (d.h. von der Art, wie die ε_k gegen 0 konvergieren) unabhängig ist. Durch partielle Integration erhält man nämlich

$$\begin{aligned} \int_{R_\kappa + \varepsilon_\kappa}^{R_{\kappa+1} - \varepsilon_{\kappa+1}} \frac{dA[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]}{\varrho^\lambda} &= \frac{A[R_{\kappa+1} - \varepsilon_{\kappa+1}, S(R_{\kappa+1} - \varepsilon_{\kappa+1}), f^{-1}]}{(R_{\kappa+1} - \varepsilon_{\kappa+1})^\lambda} - \\ &- \frac{A[R_\kappa + \varepsilon_\kappa, S(R_\kappa + \varepsilon_\kappa), f^{-1}]}{(R_\kappa + \varepsilon_\kappa)^\lambda} + \lambda \int_{R_\kappa + \varepsilon_\kappa}^{R_{\kappa+1} - \varepsilon_{\kappa+1}} \frac{A[\varrho, S(\varrho), f^{-1}] dt}{\varrho^{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} D_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r^{(0)}}^r &= \lambda \lim_{\varepsilon_\kappa \rightarrow 0} \left\{ \int_{r^{(0)}}^{R_1 - \varepsilon_1} \frac{A[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]}{\varrho^{\lambda+1}} dt + \right. \\ &+ \sum_{\kappa} \int_{R_\kappa + \varepsilon_\kappa}^{R_{\kappa+1} - \varepsilon_{\kappa+1}} \frac{A[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]}{\varrho^{\lambda+1}} dt + \left. \int_{R_k + \varepsilon_k}^r \frac{A[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]}{\varrho^{\lambda+1}} dt \right\} \quad (9.2) \end{aligned}$$

ist. Da nach § 8, 1 (vgl. S. [18] 322) A gleichmäßig beschränkt ist, existiert für (9.2) der Limeswert unabhängig von dem Grenzübergang der $\varepsilon_\kappa \rightarrow 0$.

Bemerkung. $A[r, S(r), f^{-1}]$ braucht offenbar nicht für jeden Ausnahmewert R_κ unstetig zu sein. Dementsprechend werden wir R_κ als *Ausnahmekoordinaten erster Art* bezeichnen, wenn $A[r, S(r), f^{-1}]$ in R_κ einen Sprung erleidet, als *zweiter Art*, wenn $A[r, S(r), f^{-1}]$ in dem betreffenden Punkte R_κ stetig bleibt. Es genügt offenbar in dem zweiten in (9.1) auftretenden Ausdruck die Summation über die Ausnahmekoordinaten erster Art zu erstrecken.

§ 10. Interpretation von $D_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r^{(0)}}^r$.

(9.1) stellt eine Summe von zwei Ausdrücken dar. Wir wollen in diesem Paragraph eine Interpretation für den ersten dieser Ausdrücke geben. Er besteht (für jedes feste r) aus einer endlichen Anzahl von Integralen, wobei die Integration längs Intervall $[R_\kappa + \varepsilon_\kappa, R_{\kappa+1} - \varepsilon_{\kappa+1}]$ erstreckt ist, die keine Ausnahmekoordinaten R_κ enthalten. Wir werden zeigen, daß *diese Integrale gewissen Kurvenintegralen gleich sind, welche längs desjenigen Teiles von $\tilde{\Gamma}_0^1$ erstreckt sind, für dessen z_1 -Koordinaten $r^{(0)} \leq |z_1| \leq r$, $|z_1| \notin [R_\kappa - \varepsilon_\kappa, R_\kappa + \varepsilon_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, \dots, k$ gilt.*

Wir beginnen damit, daß wir zeigen, daß *man in dem zweifachen Integral*

$$\mathbf{D}_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r^{(1)}}^{r^{(2)}} = \frac{1}{2\pi} \int_{r^{(1)}}^s \frac{1}{\varrho^\lambda} d \left\{ \int_0^{2\pi} n[\varrho, F^{-1}(z, S(\varrho) e^{i\psi})] d\psi \right\}, \quad (10.1)$$

falls $[r^{(1)}, r^{(2)}]$ *keine Ausnahmekoordinaten enthält, die Integrationsreihenfolge vertauschen darf.*

Im § 8, 2, S. [18] 322, haben wir gezeigt, daß $n[r, F^{-1}(z, S(r)e^{i\psi})]$ — das wir in die sem Paragraphen zur Abkürzung mit $n(r)$ bezeichnen werden — in $\mathfrak{L}^2 = \mathbf{E}[r^{(1)} \leq r \leq r^{(2)}, 0 \leq \psi \leq 2\pi]$ beschränkt ist, etwa kleiner als μ . Sei nun $r^{(1)} = r_1, r_2, \dots, r_m = r^{(2)}$ irgend eine Unterteilung des Intervalles $[r^{(1)}, r^{(2)}]$. Es ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{n(r_{\nu+1}) - n(r_\nu)}{r_\nu^\lambda} \right| &= \\ &= \left| \sum_{\nu=1}^{m-1} \left[\frac{n(r_{\nu+1})}{r_{\nu+1}^\lambda} - \frac{n(r_\nu)}{r_\nu^\lambda} \right] + \sum_{\nu=1}^{m-1} \left[\frac{n(r_{\nu+1})}{r_\nu^\lambda} - \frac{n(r_{\nu+1})}{r_{\nu+1}^\lambda} \right] \right| \leq \\ &\leq \left| -\frac{n(r_1)}{r_1^\lambda} + \frac{n(r_m)}{r_m^\lambda} \right| + \mu \left| \frac{1}{r_1^\lambda} - \frac{1}{r_m^\lambda} \right| \leq 2\mu \left| \frac{1}{r_1^\lambda} + \frac{1}{r_m^\lambda} \right|, \end{aligned} \quad (10.2)$$

d.h., es existiert für die betrachteten Summen eine obere von ψ und m unabhängige Schranke. Nach einem bekannten Satz von Lebesgue ist

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{m-1} \int_0^{2\pi} \left[\frac{n(r_{\nu+1}) - n(r_\nu)}{r_\nu^\lambda} \right] d\psi &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{n(r_{\nu+1}) - n(r_\nu)}{r_\nu^\lambda} \right] d\psi, \end{aligned} \quad (10.3)$$

d.h. in dem zweifachen Integral (10.1) darf die Integrationsreihenfolge vertauscht werden. Es ist also

$$\mathbf{D}_\lambda[r, S(r), f^{-1}]_{r^{(1)}}^{r^{(2)}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{r^{(1)}}^s \frac{dn[r, F^{-1}(z, S(r)e^{i\psi})]}{r^\lambda} \right\} d\psi. \quad (10.4)$$

Für jedes feste $\psi = \psi^0$ ist $n[r, F^{-1}(z, S(r)e^{i\psi^0})]$ eine ableitungsweise stetige Funktion. Sie erleidet für diejenigen Werte von r einen Sprung, für welche auf

$$\mathfrak{v}^1(r, \psi^0) = \mathbf{E}[z_1 = r e^{i\varphi}, t = S(r) e^{i\psi^0}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \text{ const}]^* \quad (5.3)$$

$\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{N}_0^1 \cdot (\psi = \psi^0)$ die Fläche $\mathfrak{S}_{\psi^0}^{*2} = \mathfrak{S}^{*3} \cdot (\psi = \psi^0)$ durchstößt, d.h. wenn auf $\mathfrak{v}^1(r, \psi^0)$ Punkte von \mathfrak{F}_0^1 liegen. Die Größe des Sprunges (mit entsprechenden Vorzeichen) wird nach (5.5) gleich $\delta(r, \psi^0)$. Die Anzahl dieser Sprungstellen ist beschränkt

(und zwar gleichmäßig in ψ), denn nach § 4 kann es für ein festes $\psi = \psi^0$ höchstens bLP Punkte (z_1, t) von \mathfrak{t}_0^{*1} geben, für die $\text{arc } t = \psi^0$ ist. Bezeichnen wir diese Sprungstellen mit $r^{(\beta)}(\psi^0)$, $\beta = 1, 2, \dots, \gamma(\psi^0)$, so ist somit ¹⁶⁾

$$D_\lambda[r, S(r), f^{-1}]_{r^{(1)}}^{r^{(2)}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\gamma(\psi)} \frac{\delta[r^{(\beta)}(\psi), \psi]}{[r^{(\beta)}(\psi)]^\lambda} \right\} d\psi. \quad (10.5)$$

Nach (5.4) ist es weiter

$$D_\lambda[r, S(r), f^{-1}]_{r^{(1)}}^{r^{(2)}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\gamma(\psi)} \sum_{k=1}^{p[r^{(\beta)}(\psi), \psi]} \mu \left[\frac{P_k(r^{(\beta)}(\psi), \psi)}{[r^{(\beta)}(\psi)]^\lambda} \right] \right\} d\psi, \quad (10.6)$$

wo

$$P_k[r^{(\beta)}(\psi), \psi], \quad k = 1, 2, \dots, \quad p[r^{(\beta)}(\psi), \psi]$$

die auf $v^1[r^{(\beta)}(\psi), \psi]$ liegenden Punkte von \mathfrak{t}_0^{*1} bedeuten.

In § 4 haben wir $[0, 2\pi]$ in b Teilintervalle $t_\alpha^1 = [\psi_\alpha, \psi_{\alpha+1}]$, $\alpha = 1, 2, \dots, b$, zerlegt, so daß auf jedem Hyperflächenstück \mathfrak{w}_α^3 [vgl. (4.17)] der darauf liegende Teil von \mathfrak{t}_0^{*1} aus a_α Kurvenstücken $p_{\alpha\nu}^1$, $\nu = 1, 2, \dots, a_\alpha$, ¹⁷⁾ besteht. Dabei wird durch die Zuordnung $\psi \rightarrow P\{z_1^{(\alpha\nu)}(\psi), S(|z_1^{(\alpha\nu)}(\psi)|) e^{i\psi}\}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von t_α^1 auf $p_{\alpha\nu}^1$ geleistet. Die Punkte

$$P_k[r^{(\beta)}(\psi^0), \psi^0], \quad k = 1, 2, \dots, \quad p[r^{(\beta)}(\psi^0), \psi^0], \quad \beta = 1, 2, \dots, \gamma(\psi^0),$$

sind somit mit

$$P\{z_1^{(\alpha\nu)}(\psi^0), S(|z_1^{(\alpha\nu)}(\psi^0)|) e^{i\psi^0}\}, \quad \nu = 1, 2, \dots, a_\alpha, \quad \psi^0 \in t_\alpha^1,$$

(abgesehen von der Reihenfolge) identisch, und da definitionsgemäß (vgl. S. [12] 316) $|z_1^{(\alpha\nu)}(\psi^0)|$ dem entsprechenden $r^{(\beta)}(\psi^0)$ gleich ist, können wir

$$\sum_{\beta=1}^{\gamma(\psi)} \sum_{k=1}^{p[r^{(\beta)}(\psi), \psi]} \frac{\mu[P_k(r^{(\beta)}(\psi), \psi)]}{[r^{(\beta)}(\psi)]^\lambda} \text{ durch } \sum_{\nu=1}^{a_\alpha} \frac{\mu[P(z_1^{(\alpha\nu)}(\psi), \psi)]}{[|z_1^{(\alpha\nu)}(\psi)|]^\lambda}$$

ersetzen. Da die Anzahl der Punkte ψ_α endlich ist, so daß man bei der Integration diese ψ -Werte vernachlässigen kann, ist

$$D_\lambda[r, S(r), f^{-1}]_{r^{(1)}}^{r^{(2)}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=0}^b \int_{\psi_\alpha}^{\psi_{\alpha+1}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{a_\alpha} \frac{\mu[P(z_1^{(\alpha\nu)}(\psi), \psi)]}{|z_1^{(\alpha\nu)}(\psi)|^\lambda} \right\} d\psi \quad (10.7)$$

¹⁶⁾ Für jeden von $r^{(\beta)}(\psi^0)$ verschiedenen Wert von r ist $\delta[r, \psi^0] = 0$.

¹⁷⁾ Wir schreiben weiter der Kürze halber $P(z_1^{(\alpha\nu)}(\psi), \psi)$ anstatt

$$P[z_1^{(\alpha\nu)}(\psi), S(|z_1^{(\alpha\nu)}(\psi)|) e^{i\psi}].$$

Berücksichtigen wir, daß $\{z^{(\alpha\nu)}(\psi), S(|z_1^{(\alpha\nu)}(\psi)|)e^{i\psi}\}$ das Kurvenstück $\mathfrak{p}_{\alpha\nu}^1$ durchläuft, wenn ψ das Intervall $[\psi_\alpha, \psi_{\alpha+1}]$ durchläuft, wobei $\mu[P(z^{(\alpha\nu)}(\psi), \psi)]$ gleich $+1$ bzw. -1 ist, je nachdem die Bewegung im Sinne der wachsenden bzw. abnehmenden ψ geschieht, und daß die Kurve $\widehat{\mathfrak{p}}_{\alpha\nu}^1$ dementsprechend orientiert wurde, so erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\lambda[r, S(r), f^{-1}]_{r(1)}^{r(2)} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^b \sum_{\nu=1}^{a_\alpha} \int_{\psi_\alpha}^{\psi_{\alpha+1}} \frac{\mu[P(z_1^{(\alpha\nu)}(\psi), \psi)]}{|z_1^{(\alpha\nu)}(\psi)|^\lambda} d\psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^b \sum_{\nu=1}^{a_\alpha} \int_{\widehat{\mathfrak{p}}_{\alpha\nu}^1} \frac{d\psi}{|z_1^{(\alpha\nu)}(\psi)|^\lambda}. \quad (10.8) \end{aligned}$$

Da (abgesehen von der Menge der Punkte von \mathfrak{t}_0^{*1} , deren ψ -Koordinaten die Werte ψ_α , $\alpha = 1, \dots, b$, haben) $\widehat{\mathfrak{t}}_0^{*1} = \mathcal{S}_{\alpha=1}^b \mathcal{S}_{\nu=1}^{a_\alpha} \widehat{\mathfrak{p}}_{\alpha\nu}^1$ ist, erhalten wir aus (10.8) schließlich

$$\mathbf{D}_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r(1)}^{r(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathfrak{t}}_0^{*1}} \frac{d\psi}{|z_1(\psi)|^\lambda}. \quad (10.9)$$

Der erste auf der rechten Seite von (9.1) auftretende Ausdruck setzt sich aus endlich vielen Integralen $\mathbf{D}_\lambda[r, S(r), f^{-1}]$ zusammen, wobei in jedem die Integration längs eines Intervalles erstreckt ist, das keine Ausnahmekoordinaten R_κ enthält. Nach dem in (10.9) erhaltenen Ergebnis ist $\mathbf{D}^\lambda[r, S(r), f^{-1}]$ in diesem Falle ein Linienintegral längs desjenigen Teiles von $\widehat{\mathfrak{t}}_0^1$, für dessen z_1 -Koordinaten

$$r^{(0)} \leq |z_1| \leq r, \quad |z_1| \notin [R_\kappa - \varepsilon_\kappa, R_\kappa + \varepsilon_\kappa], \quad \kappa = 1, 2, \dots, k, \quad (10.10)$$

gilt.

Wir haben bis jetzt stets im $z_1 t$ -Raume operiert. Man kann natürlich die Integration an Stelle längs der Kurve $\widehat{\mathfrak{t}}_0^1$ des $z_1 t$ -Raumes, längs ihres Bildes $\widehat{\mathfrak{b}}_0^1$ des $z_1 z_2$ -Raumes erstrecken, da die z_1 -Koordinaten in den entsprechenden Punkten $\{z_1, t\}$ von $\widehat{\mathfrak{t}}_0^1$ und $\{z_1, z_2 = h(z_1, t, \bar{t})\}$ von $\widehat{\mathfrak{b}}_0^1$ die gleichen sind. Da $h(z_1, t, \bar{t})$ eine eindeutige Funktion ist, können wir auf $\widehat{\mathfrak{b}}_0^1$ den Umlaufssinn festsetzen, der dem im § 8 angegebenen Umlaufssinn von $\widehat{\mathfrak{t}}_0^1$ entspricht. Wir müssen nur noch eventuell berücksichtigen, daß $h(z_1, t, \bar{t})$ nicht überall umkehrbar eindeutig ist. (Vgl. die Ausführungen auf S. [8] 312). Unter Umständen müssen wir deshalb einzelne Punkte von $\widehat{\mathfrak{b}}_0^1$ als mehrfach überdeckte Punkte betrachten.

Bemerken wir schließlich, daß durch eine geeignete Festsetzung der Art, wie die ε_κ gegen 0 konvergieren sollen, man erreichen kann, daß $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{D}_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r(0)}^r$ durch $\mathbf{D}_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r(0)}^\infty$ ersetzt werden darf.

Eine Interpretation des zweiten auf der rechten Seite von (9.1) auftretenden Ausdruckes, der mit dem Verhalten von \mathfrak{F}_0^1 der Umgebung der Punkte mit $|z_1| = R_\kappa$ verbunden ist, ist bis jetzt nicht gelungen.

§ 11. Beziehungen zwischen \mathbf{N} , \mathbf{A} und \mathbf{D}_λ .

Ia. Ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{A}[r, S(r), f^{-1}] \leq C(\varepsilon)r^{\mu+\varepsilon}, \quad C(\varepsilon) < \infty, \quad (11.1)$$

so existiert für jedes $\lambda > \mu$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{D}_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r(0)}^r. \quad (11.2)$$

Zu jedem $\lambda > \mu$ können wir ein ε so finden, daß $\lambda > \mu + \varepsilon$ ist. Nach (9.2) ist somit

$$\mathbf{D}_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r(0)}^r \leq \lambda C \int_{r(0)}^r \frac{dr}{r^{\lambda-\mu-\varepsilon+1}} = \frac{\lambda C}{\lambda - \mu - \varepsilon} \left[\frac{1}{(r(0))^{\lambda-\mu-\varepsilon}} - \frac{1}{r^{\lambda-\mu-\varepsilon}} \right] \quad (11.3)$$

woraus folgt, daß $\mathbf{D}_\lambda[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r(0)}^r$ (gleichmäßig in r) beschränkt ist. Wählt man $r(0)$ genügend groß, so wird der in (11.3) rechts stehende Ausdruck beliebig klein, woraus die Existenz von (11.2) folgt.

Ib. Existiert (11.2), so ist

$$\mathbf{A}[r, S(r), f^{-1}] < Cr^\lambda, \quad C < \infty, \quad r > r(0), \quad (11.4)$$

außer höchstens in einzelnen Punkten und in Intervallen, deren logarithmisches Maß¹⁸⁾ endlich ist.

Um Ib. zu beweisen, nehmen wir an, daß $\mathbf{A}[r, S(r), f^{-1}] \geq Cr^\lambda$ in Intervallen gilt, deren logarithmisches Maß unendlich ist. Man kann dann eine Folge von Intervallen $[r_1, r_2], [r_3, r_4], \dots, [r_{2n-1}, r_{2n}], \dots, r_n < r_{n+1}$, mit unendlichem logarithmischem

¹⁸⁾ Unter logarithmischem Maß der Folge von Intervallen $[r_1, r_2], [r_3, r_4], \dots, [r_{2N-1}, r_{2N}]$ versteht man bekanntlich $\sum_{k=1}^N [\log r_{2k} - \log r_{2k-1}]$.

Maß finden, in denen die angegebene Ungleichung gilt, wobei die $[r_{2n-1}, r_{2n}]$ und die $[R_{\mathcal{K}} - \varepsilon_{\mathcal{K}}, R_{\mathcal{K}} + \varepsilon_{\mathcal{K}}]$, für genügend kleine $\varepsilon_{\mathcal{K}}$, keine gemeinsamen Punkte haben. Da $A[r, S(r), f^{-1}] \geq 0$ ist, würde dann nach (9.2)

$$\begin{aligned} D_{\lambda}[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r^{(0)}}^r &\geq \\ &\geq \lambda \sum_{k=1}^N \int_{r_{2k-1}}^{r_{2k}} C \frac{dr}{r} = \lambda C [\log r_{2N} - \log r_{2N-1} + \log r_{2N-2} - \dots - \log r_1], \end{aligned}$$

und es ist somit $\lim_{r \rightarrow \infty} D_{\lambda}[\varrho, S(\varrho), f^{-1}]_{r^{(0)}}^r = \infty$ im Gegensatz zu der gemachten Voraussetzung.

IIa. Sei $k(r) \geq k^0 > 1$. Es ist dann

$$A[r, s, f^{-1}] \leq \frac{N[rk(r), s, f^{-1}]}{\log k^0}. \quad (11.5)$$

Da $n[\varrho, F^{-1}(z, t)], F(z_1, t) \equiv f[z_1, h(z_1, t, \bar{t})]$ eine nichtabnehmende Funktion von ϱ ist, folgt aus

$$\int_r^{rk(r)} \frac{n[\varrho, F^{-1}(z, t)] d\varrho}{\varrho} = N[rk(r), F^{-1}(z, t)] - N[r, F^{-1}(z, t)] \quad (11.6)$$

die Ungleichung

$$n[r, F^{-1}(z, t)] \leq \frac{N[rk(r), F^{-1}(z, t)] - N[r, F^{-1}(z, t)]}{\log k(r)}. \quad (11.7)$$

Indem man $t = se^{i\psi}$ setzt und auf (11.7) die Operation $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\psi$ anwendet, erhält man nach (8.2) und (7.5) die Ungleichung

$$A[r, s, f^{-1}] \leq \frac{N[rk(r), s, f^{-1}] - N[r, s, f^{-1}]}{\log k(r)}, \quad (11.8)$$

woraus (11.5) folgt, da nach (7.4) $N[r, s, f^{-1}] \geq 0$ ist.

IIb. Wie aus (7.4), (8.2) und (8.5) folgt, ist

$$N[r, s, f^{-1}] = \log r \cdot A[r, s, f^{-1}] - L[r, s, f^{-1}] + N[r, F^{-1}(0, z)]. \quad (11.9)$$

§ 12. Beziehungen zwischen dem Wachstum von T und D_{λ} .

I. Sei $k(r) \geq k^0 > 1$, und $f(z_1, z_2), f(0, 0) \neq a$, eine in $|z_k| < \infty, k = 1, 2$, meromorphe Funktion d. k. V. z_1, z_2 , die im Koordinatenanfang regulär ist. Existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C \equiv C(\varepsilon)$, so daß

$$T[rk(r), S(r), f] \leq Cr^{\mu+\varepsilon}, \mu > 0, \quad (12.1)$$

ausfällt, so existiert für jede a -Kurve $\mathfrak{F}_a^1 = \mathbf{E}[f(z_1, z_2) = a]$ der Klasse B (vgl. § 4, S. [9] 313), die auf $|t| = S(r)$ liegt, das λ^{te} Moment

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{D}_\lambda[\varrho, S(\varrho), (f-a)^{-1}]_{r^{(0)}}^r, \quad (12.2)$$

falls $\lambda > \mu$ ist.

Denn nach (11.5), (7.8) und (7.9) ist

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[r, S(r), (f-a)^{-1}] &\leq \\ &\leq \frac{\mathbf{N}[rk(r), S(r), (f-a)^{-1}]}{\log k^0} \leq \frac{\mathbf{T}[rk(r), S(r), f] + C_1}{\log k^0} \leq C_2 r^{\mu+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (12.3)$$

woraus nach (11. Ia) die Existenz von (12.2) folgt.

II. Es mögen über $k(r)$ und f außer den in I angegebenen die folgenden Voraussetzungen gelten:

1. $k(r)$ ist so gewählt, daß die Hyperfläche $|t| = S\left(\frac{r}{k(r)}\right)$ allen in § 3 angegebenen Voraussetzungen genügt.

2. Für f gilt

$$f(0, z_2) = d = \text{const}, \quad \left[\frac{df(z_1, z_2)}{dz_1} \right]_{z_1=0} = b_1 = \text{const} \neq 0. \quad (12.4)$$

Existieren für drei a_m -Kurven $\mathfrak{F}_{a_m}^1 = \mathbf{E}[f(z_1, z_2) = a_m]$ der Klasse B , $m = 1, 2, 3$, $a_m \neq d$, die auf $|t| = S\left(\frac{r}{k(r)}\right)$ liegen, die λ^{ten} Momente

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{D}_\lambda[\varrho k(\varrho), S(\varrho), (f-a_m)^{-1}]_{r^{(0)}}^r, \quad m = 1, 2, 3, \quad (12.5)$$

und ist

$$\mathbf{L}[r, S(r), (f-a_m)^{-1}] \geq -C_3 r^\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \quad (12.6)$$

so ist

$$\mathbf{T}[r, S(r), f] < Cr^\lambda \log r \quad (12.7)$$

höchstens mit Ausnahme einzelner Punkte und Intervalle, deren logarithmisches Maß endlich ist.

Aus (12.5) und (11. Ib) folgt, daß

$$\mathbf{A}[rk(r), S(r), (f-a_m)^{-1}] < Cr^\lambda \quad (12.8)$$

gilt außer in den erwähnten Mengen.

Da nach (12.4) $F(0_1, z_2) = f[0, h(0, t, \bar{t})] = f(0, t) = \text{const}$ ist, erhalten wir aus (11.9) und (12.6) somit, daß außer in der erwähnten Menge

$$\mathbf{N}[rk(r), S(r), (f-a_m)^{-1}] < Cr^\lambda \log r \quad (12.9)$$

gilt. Nehmen wir zunächst an, daß die erwähnten Werte $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ sind. Nach der Formel von Valiron-Milloux

gibt es dann zu jedem $k^0 > 1$ die Konstanten c und c_1 , so daß

$$T[r, F(z, se^{i\psi})] \leq c\{N[rk(r), F^{-1}(z, se^{i\psi})] + N[rk(r), (F(z, se^{i\psi}) - 1)^{-1}] + N[rk(r), F(z, se^{i\psi})] + C_1(r, s, \psi), \quad (12.10)$$

$$C_1(r, s, \psi) = 4 \log^+ |F(0, se^{i\psi})| + 2 \log^+ \frac{1}{|z_1 F_{z_1}(0, se^{i\psi})|} + c_1 \quad (12.11)$$

ist. Nun ist

$$F(0, se^{i\psi}) = f(0, se^{i\psi}) = \text{const} \neq 0 \quad (12.12)$$

$$\begin{aligned} F_{z_1}[0, se^{i\psi}] &= \left[\frac{df[z_1, h(z_1, se^{i\psi}, se^{-i\psi})]}{dz_1} \right]_{z_1=0} = \\ &= \left[\frac{df}{dz_1} + \frac{df}{dz_2} \frac{dh(z_1, se^{i\psi}, se^{-i\psi})}{dz_1} \right]_{z_1=0} = b_1 = \text{const} \neq 0,^{19)} \end{aligned} \quad (12.13)$$

so daß man für $r > r^{(0)}$ $C_1(r, s, \psi)$ durch eine geeignete Konstante C ersetzen kann. Die Anwendung der Operation $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\psi$ auf (12.10) ergibt nach (7.3) und (7.5)

$$\begin{aligned} T[r, S(r), f] &\leq c\{N[rk(r), S(r), f^{-1}] + N[rk(r), S(r), (f - 1)^{-1}] + \\ &+ N[rk(r), S(r), f]\} + C, \end{aligned} \quad (12.14)$$

da $f(0, z) = \text{const}$ und $N[s, f^{-1}(0, z)] = N[s, (f(0, z) - 1)^{-1}] = N[s, f(0, z)] = 0$ ist.

Sind uns drei von 0, 1, ∞ verschiedene Werte a_m , $m = 1, 2, 3$, gegeben, so betrachten wir die Funktion $g = \alpha + \frac{\beta}{f - a_2}$, $\alpha = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}$, $\beta = \frac{(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)}{(a_3 - a_1)}$, welche die Werte 0, 1, ∞ ausläßt. Für g sind die Bedingungen (12.4) erfüllt, und, da $b_1 \neq 0$ ist, ist $g_{z_1}[0, h(0, t, \bar{t})] = \text{const} \neq 0$.

Nach (12.7) ist somit

$$T\left[r, S(r), \alpha + \frac{\beta}{f - a_2}\right] < Cr^\lambda \log r. \quad (12.15)$$

Andererseits sind definitionsgemäß die Wachstumsordnungen von $T\left[r, S(r), \alpha + \frac{\beta}{f - a_2}\right]$ und von $T\left[r, S(r), \frac{\beta}{f - a_2}\right]$ gleich; dem Satz aus § 7 entsprechend gilt das gleiche für $T\left[r, S(r), \frac{\beta}{f - a_2}\right]$ und $T\left[r, S(r), \frac{f - a_2}{\beta}\right]$, so daß aus (12.15) die Ungleichung (12.7) folgt w.z.b.w.

¹⁹⁾ Aus (12.4) folgt, daß $f(z_1, z_2) = d + z_1 \varphi(z_1, z_2)$ ist, deshalb ist $\left(\frac{df}{dz_2}\right)_{z_1=0} = 0$.

§ 13. Eine Interpretation für $T[r, S(r), f]$ im Falle ganzer Funktionen f .

Im Falle einer komplexen Veränderlichen und ganzer Funktionen f sind das Wachstum von $T[r, f]$ und dasjenige von $\max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} [f(re^{i\varphi})]$ gleich. Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen gilt etwas Analoges in dem von uns betrachteten Falle.

Wir setzen

$$M[r, s, f] = \max_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \psi \leq 2\pi}} |f[re^{i\varphi}, h(re^{i\varphi}, se^{i\psi}, se^{-i\psi})]|. \quad (13.1)$$

Ist f eine ganze Funktion, so ist

$$T[r, s, f] = m[r, s, f] \leq \log^+ M[r, s, f]. \quad (13.2)$$

Eine obere Schranke für $M[r, s, f]$ erhalten wir unter folgender Annahme:

Die im § 1 eingeführte Funktion $h(z_1, t, \bar{t})$ soll, neben der früher angegebenen, die Eigenschaft haben, daß

$$d \{ \arccos w[h(Z_1, S(r)e^{i\psi}, S(r)e^{-i\psi}), Z_1] \} \leq C_1 d\psi, \quad (13.3)$$

$$w \left[h \left(Z_1, S\left(\frac{r}{k}\right)e^{i\psi}, S\left(\frac{r}{k}\right)e^{-i\psi} \right), Z_1 \right] \leq C_2 \frac{s}{k^\beta} \quad (13.4)$$

ist. Dabei sind C_1, C_2, β absolute Konstanten und $w(z_2, Z_1)$ ($w(0, Z_1) = 0, w'(0, Z_1) > 0$) bedeutet die im § 6 eingeführte Funktion, die $\Im_2^2(Z_1)$ [s. (2.1)] auf den Kreis vom Radius $s = S(r)$ abbildet. Aus (13.4) folgt, daß [vgl. (6.2)]

$$P_2 \left[w(h(Z_1, S(r)e^{i\psi_1}, S(r)e^{-i\psi_1}), Z_1), w \left(h \left(Z_1, S\left(\frac{r}{k}\right)e^{i\psi_2}, S\left(\frac{r}{k}\right)e^{-i\psi_2} \right) \right) \right] \leq \frac{k^\beta + C_2}{k^\beta - C_2} \quad (13.5)$$

ist. Dabei wählen wir immer $k(>1)$ so groß, daß $k^\beta > C_2$ wird.

Es ist somit nach (6.7) und (13.3)

$$\log M \left[\frac{r}{k}, S\left(\frac{r}{k}\right), f \right] \leq C_1 \left(\frac{k+1}{k-1} \right) \left(\frac{k^\beta + C_2}{k^\beta - C_2} \right) T[r, S(r), f], \quad (13.6)$$

woraus in üblicher Weise

$$\varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ M[r, S(r), f]}{\log r} \leq \varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T[r, S(r), f]}{\log r} \quad (13.7)$$

folgt.

§ 14. *Schlußbemerkungen.*

1. Es drängt sich die Frage auf, was für Abschätzungen man an Stelle von (12.14) erhält, wenn man anstatt der Valiron-Milloux-

schen Formel die zweite Nevanlinnasche Ungleichung heranzieht ²⁰⁾. Wir wollen in diesem Paragraphen andeuten, wie man in diesem Falle vorgehen muß. Man geht von der Formel (N. 3) aus. (Vgl. B, S. 609, Zeile 11 von oben). Dabei muß man für $T[\varrho', F(z, se^{i\psi})]$, $F[z_1, t] \equiv f[z_1, h(z_1, t, \bar{t})]$, eine von ψ unabhängige obere Schranke bestimmen. Eine solche Abschätzung ist mir aber nur gelungen unter der in § 13 angegebenen Voraussetzung. Wiederholt man dann die auf S. 607 und 608 von B angegebenen Rechnungen, so erhält man eine obere Schranke für $T[R_1, F(z, se^{i\psi})]$ (vgl. [2.6]). Unter Verwendung dieses Ergebnisses erhält man durch die Anwendung der Operation $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\psi$ auf (N. 3) eine obere Schranke für $\mathbf{m}\left[r, s, \frac{F_{z_1}}{F}\right]$ (S. 609, [2.7]).

Durch analoge Betrachtungen wie im Falle 1 k. V. erhält man dann die Ungleichung [2.13] für den verallgemeinerten Fall, wobei für $\mathbf{S}(r, s)$ eine der [2.12] analoge Ungleichung gilt. Die obere Schranke hängt darin nur von $\log r$, $\log s$, $\log \mathbf{T}$ ab.

Aus dieser Ungleichung, die man an Stelle von (12.14) benutzen kann, erhält man, ähnlich, wie es im § 12 geschieht, aus der Existenz von $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{D}_\lambda[\varrho h(\varrho), S(\varrho), (f - a_m)^{-1}]_{r(\varrho)}^r$ für drei verschiedene Werte a_m , $m = 1, 2, 3$, eine obere Schranke für das Wachstum von $\mathbf{T}[r, S(r), f]$.

Aber, abgesehen davon, daß diese Betrachtungen zu außergewöhnlich umfangreichen Rechnungen führen, treten in diesem Falle an Stelle von (12.4) die viel komplizierteren Voraussetzungen des § 13.

2. Es bietet keine Schwierigkeiten, analoge Betrachtungen, wie in der vorliegenden Arbeit, für den Fall durchzuführen, daß an die Stelle des gesamten $z_1 z_2$ -Raumes ein Bereich \mathfrak{M} (vgl. § 2) tritt. Ein Bereich \mathfrak{M} ist aber die Regularitätshülle jedes Bereiches \mathfrak{G} , den man aus \mathfrak{M} dadurch erhält, daß man in geeigneter Weise Teile von \mathfrak{M} entfernt, ohne die ausgezeichnete Randfläche zu beschädigen.

²⁰⁾ Dieser Weg wurde in dem zweiten Teil der an der zweiten Stelle in ²⁾ S. [2] 306, zitierten Arbeit in dem Spezialfall $h(z_1, t, \bar{t}) \equiv t$ eingeschlagen. Wir werden diese Arbeit im folgenden als B zitieren, die Formeln aus B durch eckige Klammern kennzeichnen. Mit (N. 3) bezeichnen wir die Formel (3), S. 59, aus R. NEVANLINNA, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions meromorphes [Paris, 1929], Ch. IV.

Da wir auf Grund des Benehmens einer meromorphen Funktion f in einer Hyperfläche \mathfrak{H}^3 gewisse Aussagen über die Eigenschaften von f in \mathfrak{M} machen können, erlauben diese Betrachtungen (falls \mathfrak{H}^3 in \mathfrak{G} liegt) bestimmte Aussagen über die Fortsetzung der meromorphen Funktionen in Regularitätshüllen dieser Art zu machen.

(Eingegangen den 8. Juli 1938.)
