

COMPOSITIO MATHEMATICA

S. SIDON

Über Fourier-Reihen mit Lücken

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 78-81

http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__78_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Über Fourier-Reihen mit Lücken

von

S. Sidon

Budapest

Hat die Folge positiver ganzer Zahlen $n_1 < n_2 \dots < n_i \dots$ die Eigenschaft, daß die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe $\left[\sum_{i=1}^{\infty} z^{n_i} \right]^l$, wo $l \geq 2$ eine ganze Zahl bedeutet, beschränkt ist, so gilt, wenn $P_k(z)$ ein beliebiges Polynom von der Form $\sum_{i=1}^k a_i z^{n_i}$ bedeutet, die Ungleichung ¹⁾

$$\int_0^{2\pi} |\{P_k(e^{i\varphi})\}^{2l}| d\varphi < C \left[\int_0^{2\pi} |P_k(e^{i\varphi})| d\varphi \right]^{2l}, \quad (1)$$

wo C eine von $P_k(z)$ unabhängige, positive Konstante bedeutet ²⁾.

Ist l gerade, so besteht also für jedes Polynom

$$P_{kk}(z) = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} z^{n_i+n_j}$$

die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} |[P_{kk}(e^{i\varphi})]^l| d\varphi < C \left[\int_0^{2\pi} |P_{kk}(e^{i\varphi})| d\varphi \right]^l. \quad (2)$$

Läßt sich (2) nicht auf ungerade $l > 2$ ³⁾ ausdehnen? Zur Zeit kann ich für diesen Fall nur zeigen

$$\int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^l| d\varphi < Ck^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{2\pi} |P_{kk}(e^{i\varphi})| d\varphi \right]^l. \quad (2^*)$$

¹⁾ Siehe meine Noten: I. Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen [Journal f. r. u. angew. Math. **163** (1930), 251—252]. II. Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse L_p für $p > 1$ [Acta Szeged **7** (1935), 175—176].

²⁾ C wird hier auch weiter diese Bedeutung haben.

³⁾ Von nun an bezeichnet in dieser Note, wenn das Entgegengesetzte nicht ausdrücklich gesagt wird, l immer eine solche Zahl.

Beweis: Es ist

$$\int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^l| d\varphi < \left[\int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^{l-1}| d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^{l+1}| d\varphi \right]^{\frac{1}{2}} \\ < C k^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^2| d\varphi \right]^{\frac{l}{2}}$$

woraus die Behauptung folgt.

Korollare von (2*) sind:

A. Für die Fourier-Koeffizienten einer Funktion der Klasse

$$L_{\frac{l}{l-1}}, f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ gilt}$$

$$\sum_{i,j=1}^k (|a_{n_i+n_j} \alpha_{ij}| + |b_{n_i+n_j} \beta_{ij}|) = O\left(k^{\frac{1}{2l}} \left[\sum_{i,j=1}^k (\alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2) \right]^{\frac{1}{2}}\right)$$

wo die α, β beliebige Konstanten bedeuten, also

$$\sum_{i,j=1}^k \{|a_{ij}| + |b_{ij}|\} = O(k^{1+\frac{1}{2l}}) \text{ 4).}$$

B. Ist noch die Zusatzbedingung $(\gamma) \frac{n_{2i}}{n_i} > \xi > 1$ wo ξ von i unabhängig ist, für jedes i erfüllt, und bezeichnen $N_1, N_2, \dots, N_h, \dots$ die nach der Größe geordneten Glieder der Folge $n_i + n_j$, so muß, wenn $\sum_{h=1}^{\infty} (a_{N_h} \cos N_h x + b_{N_h} \sin N_h x)$ die Fourier-Reihe einer im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion ist, $\sum_{h=1}^k (a_h^2 + b_h^2) = O(k^{\frac{1}{2}})$ sein.

Im speziellen Falle $P_{kk}(z) = \sum_{i,j=1}^k z^{n_i+n_j}$ ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit von (2). Daraus folgt dann dieselbe, wenn die Zusatzbedingung γ erfüllt ist und N_1, \dots, N_h, \dots dieselbe Bedeutung haben wie in B, auch für jedes $\sum_{h=1}^k z^{N_h}$ 5), es gelten also dann die Sätze

4) Der Young-Hausdorffsche Satz ergibt nur $\sum_{i,j=1}^k (|a_{ij}| + |b_{ij}|) = O\left[k^{\frac{2}{2-l}}\right]$.

5) Hierbei kommt noch der Satz zur Anwendung:

Gehört $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ zur Klasse $L_p, p > 1$, so gilt für jedes n

$$\int_0^{2\pi} |s_n(x)|^p dx < \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx, \text{ wo } s_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

C. $f(x) \sim \sum_{h=1}^{\infty} (a_h \cos N_h x + b_h \sin N_h x)$ gehört, wenn für jedes h $a_h \geq a_{h+1}$, $b_h \geq b_{h+1}$ und a_h und $b_h = O\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$, zur Klasse L_l .

D. Ist $\sum_{h=1}^{\infty} (a_h \cos N_h x + b_h \sin N_h x)$ mit $a_h > a_{h+1}$, $b_h > b_{h+1}$ für jedes h die Fourier-Reihe einer im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion, so muß a_h und $b_h = O(h^{-\frac{1}{2}} \log N_h)$ sein ⁶⁾.

Auch für den einen wesentlichen Teil des allgemeinen Falles enthaltenden Spezialfall sämtliche $|a_{ij}| = 1$ folgt also die Gültigkeit von (2), wenn der für gerade $l \geq 2$ triviale Satz

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n a_k e^{ik\varphi} \right|^l d\varphi < C(l) \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n |a_k| e^{ik\varphi} \right|^l d\varphi$$

auch für ungerade l richtig ist.

Zum Schluß stehe hier noch ein Lückensatz, in welchem die Exponenten nur einer quantitativen Bedingung unterworfen sind:

Ist l ganz und > 2 und gilt für die Indexfolge n_1, \dots, n_k, \dots $\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{-\frac{2}{l}} < \infty$, so gehört jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(\varphi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{in_k \varphi}$, für welche $\arg f(\varphi)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung von φ ist, zur Klasse L_l .

Dieser Satz ist eine Folge der Beschränktheit der unendlichen

$$\text{Form } \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_l=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^l x_{k_j}}{\sum_{j=1}^l n_{k_j}} \text{ für } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 1.$$

Nachtrag.

In derselben Richtung, wie der letzte Satz der obigen Note, liegt auch der folgende:

Gilt für die Folge positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ $n_k > k^{1+\varepsilon}$, wenn $k > K$, wo $\varepsilon > 0$, so muß, wenn $f(\varphi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{in_k \varphi}$ eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion und $\arg f(\varphi)$

⁶⁾ Satz B und D sagen nur im Falle $l = 3$ etwas Neues aus, für $l > 3$ gilt ein die beiden enthaltenden viel schärferer Satz: loc. cit. ¹⁾, I, und Math. Zeitschr. 34 (1932), 480—484.

eine Funktion von beschränkter Schwankung von φ ist, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ konvergieren.

Der Beweis stützt sich auf die Tatsache, daß die quadratische Form $\sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \frac{x_{k_1} x_{k_2}}{n_{k_1} + n_{k_2}}$ im Gebiete $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{2+\eta} = 1$, wo $\eta > \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$, beschränkt ist.

(Bemerkung während der Korrektur. In den zwei letzten Sätzen dieser Note genügt es, statt der Integrierbarkeit von $f(\varphi)$ $a_k = O(1)$ voranzusetzen.)

(Eingegangen den 7. Dezember 1935.)
