

COMPOSITIO MATHEMATICA

S. WARSCHAWSKI

Über die Winkelderivierten schlichter Funktionen

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 346-366

http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__346_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Über die Winkelderivierten schlichter Funktionen

von

S. Warschawski

Ithaca, N. Y.

Es sei $w = f(z)$ eine im Kreise $|z| < 1$ reguläre Funktion, die $|z| < 1$ auf ein schlichtes Gebiet G der w -Ebene konform abbildet. Ist $w = \omega$ ein erreichbarer Randpunkt von G , so ist bekanntlich für ein ζ auf $|z| = 1$ $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = \omega$, wenn $z \rightarrow \zeta$ in einem beliebigen von zwei von ζ ausgehenden Kreissehnen gebildeten Winkel strebt. Setzt man $f(\zeta) = \omega$, so ist also $f(z)$ stetig in ζ bei Annäherung „im Winkel“. Ist nun darüber hinaus $\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - \omega}{z - \zeta} = f'(\zeta)$ für $z \rightarrow \zeta$ im Winkel vorhanden und $\neq 0$, $\neq \infty$, so nennt man $f'(\zeta)$ die *Winkelderivierte* in $z = \zeta$. In den letzten Jahren ist eine Reihe von Kriterien für die Existenz der Winkelderivierten angegeben worden ¹⁾. Diese können im wesentlichen auf das folgende Prinzip zurückgeführt werden: Es wird ein G *enthaltendes* und ein *in G enthaltenes* Gebiet angegeben, die beide den Randpunkt $w = \omega$ gemeinsam haben, derart, daß die Abbildungsfunktionen von $|z| < 1$ auf diese Gebiete in dem ω „entsprechenden“ Peripheriepunkt eine von 0 und ∞ verschiedene Ableitung besitzen. Hieraus wird dann auf die Existenz der Winkelderivierten für $f(z)$ geschlossen.

Im ersten Teile dieser Note geben wir ein auf einem ähnlichen Gedanken beruhendes Kriterium für die Existenz der höheren Winkelderivierten. Für jedes ganze $n \geq 1$ wird unter der Annahme, daß der Rand von G in der Umgebung von ω „zwischen“ zwei geeigneten Kurven („Vergleichskurven“) bleibt, die einen

¹⁾ C. CARATHÉODORY [Sitzungsber. Akad. Berlin 1929, 39—54]; G. VALIRON [Bull. Sc. Math. (2) 53 (1929), 70 und 56 (1932), 208—211]; L. AHLFORS [Acta Soc. Sc. Fennicae (Nova Ser. A) 1 (1930), No. 9, 36]; J. WOLFF [C. R. 191 (1930), 921 und 200 (1935), 630—31]; C. VISSER [C. R. 193 (1931), 1388—1389]; J. G. VAN DER CORPUT [Proc. Acad. Amsterdam 33 (1932), 330—332]; S. WARSCHAWSKI [Math. Z. 35 (1932), 454—456].

analytischen Kurvenbogen in einem bestimmten, von n abhängigen Grade berühren, gezeigt: $f(z)$ hat in $z = \zeta$ die „Taylor“-Darstellung

$f(z) = \omega + c_1(z - \zeta) + c_2(z - \zeta)^2 + \dots + c_n(z - \zeta)^n + r_n(z) \cdot (z - \zeta)^n$ mit $\lim_{z \rightarrow \zeta} r_n(z) = 0$ im Winkel. Hieraus folgt unmittelbar, daß $f^v(z) \rightarrow c_v v!$ ($v = 1, 2, \dots, n$) für $z \rightarrow \zeta$ im Winkel strebt. Eine analoge Darstellung gilt auch für die zu $f(z)$ inverse Funktion (Satz II).

Im zweiten Teile zeigen wir, daß unter geeigneten Annahmen über die Vergleichskurven, die „Taylor“-Darstellung sogar für gewisse *tangentielle* Annäherungen gilt. (Satz III und Zusatz zum Satz II.)

Sind die Voraussetzungen des Satzes II oder III für jedes $n = 1, 2, \dots$ erfüllt, so erhält man eine *asymptotische Entwicklung* der Abbildungsfunktion in einem Randpunkt.

I. Taylordarstellung im Winkel und Winkelderivierten.

§ 1. HILFSSÄTZE.

HILFSSATZ 1. Es sei $g(t)$ in $\langle -\pi, \pi \rangle$ integrierbar und $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| \frac{dt}{|t|^{n+1}}$, $n \geq 1$, vorhanden. Setzt man für $|z| < 1$

$$(1) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt + ic,$$

so gibt es $n + 1$ Konstanten $a_0, a_1, \dots, a_n$, so daß

$$(2) \quad F(z) = a_0 + a_1(z-1) + \dots + a_n(z-1)^n + r_n(z)(z-1)^n$$

$$\text{mit } r_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{e^{it}}{(e^{it} - 1)^{n+1}} \frac{z-1}{e^{it} - z} dt$$

gilt, wobei $\lim_{z \rightarrow 1} r_n(z) = 0$ in jedem Winkel $W_\alpha: |\arg(1-z)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ gilt.

Beweis. (2) folgt, wenn man die für $0 < |t| \leq \pi$ gültige Relation

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} + 1 = \frac{2e^{it}}{(e^{it} - 1) \left(1 - \frac{z-1}{e^{it} - 1}\right)} =$$

$$= 2e^{it} \left[\frac{1}{e^{it} - 1} + \frac{z-1}{(e^{it} - 1)^2} + \dots + \frac{(z-1)^n}{(e^{it} - 1)^{n+1}} + \frac{(z-1)^{n+1}}{(e^{it} - 1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{e^{it} - z} \right]$$

mit $\frac{1}{2\pi} g(t)$ multipliziert und gliedweise über $-\pi \dots \pi$ integriert.

Um $\lim_{z \rightarrow 1} r_n(z) = 0$ in W_α einzusehen, schreibe man für ein δ mit $0 < \delta < \pi$:

$$\pi r_n(z) = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{+\delta} + \int_{\delta}^{\pi}.$$

Da in W_α : $\left| \frac{1-z}{e^{it}-z} \right| \leq \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \text{konst}$ gilt, ist in W_α :

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow 1} \left| \int_{-\delta}^{\delta} g(t) \frac{e^{it}}{(e^{it}-1)^{n+1}} \frac{z-1}{e^{it}-z} dt \right| \leq \text{konst} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|g(t)|}{|e^{it}-1|^{n+1}} dt,$$

ist also durch passende Wahl von δ beliebig klein zu machen.

Bei festem δ streben aber $\int_{-\pi}^{-\delta}$ und $\int_{\delta}^{\pi}$ gegen 0 mit $z \rightarrow 1$.

HILFSSATZ 2. *Es sei $u = g(v)$, $|v| \leq a$ ($g(0) = g'(0) = 0$) ein analytischer Jordanbogen γ . Es sei $d(v)$ für $|v| \leq a$ stetig und $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{d(v)}{v} = 0$. Ist $\omega = \Omega(w)$, $w = u + iv$, mit $\Omega(0) = 0$, $\Omega'(0) = 1$ regulär in einem γ enthaltenden Kreise um $w=0$ und bildet $\omega = \Omega(w)$ ($\omega = \sigma + i\tau$) γ auf ein Stück der τ -Achse ab, so geht der Bogen $u = g(v) + d(v)$, $|v| \leq a$, über in einen Bogen $\sigma = \sigma(v)$, $\tau = \tau(v)$, für den $\tau(v) \sim v$, $\sigma(v) \sim d(v)$ bei $v \rightarrow 0$ ist.*

Beweis. Wegen $\Omega'(0) = 1$ strebt für $u = g(v) + d(v)$ bei $v \rightarrow 0$ ($v \neq 0$):

$$\frac{\sigma(v) + i\tau(v)}{u + iv} = \frac{\frac{\sigma(v)}{v} + i \frac{\tau(v)}{v}}{\frac{u}{v} + i} \rightarrow 1, \text{ also } \frac{\tau(v)}{v} \rightarrow 1.$$

Weiter genügt es offenbar $|\sigma(v)| \sim |d(v)|$ bei $v \rightarrow 0$ nachzuweisen. Wir bezeichnen den Punkt $g(v) + d(v) + iv$ mit P , $g(v) + iv$ mit Q , ihre Bildpunkte in der ω -Ebene mit P_1 bzw. Q_1 . Der Punkt $i\tau(v)$ werde R_1 genannt, der ihm entsprechende Punkt auf $\gamma: R$. Dann ist $Q_1 P_1 \geq R_1 P_1 = |\sigma(v)|$. Wegen $\Omega'(0) = 1$ ist $Q_1 P_1 \leq (1+\varepsilon)QP = (1+\varepsilon)|d(v)|$, wo $\varepsilon \rightarrow 0$ mit $v \rightarrow 0$ geht. Also ist $|\sigma(v)| \leq (1+\varepsilon)|d(v)|$.

Um $|\sigma(v)|$ für $P \neq Q$ nach unten abzuschätzen, beachte man, daß der Winkel $Q_1 P_1 R_1 = \varepsilon_1 \rightarrow 0$ bei $v \rightarrow 0$ strebt; denn nach dem Rolleschen Satze gibt es eine zu der Strecke $P_1 Q_1$ parallele

Tangente des Bogens $\widehat{P_1Q_1}$, der das Bild der Strecke PQ vermittelt $\omega = \Omega(w)$ ist. Da aber PQ parallel der u -Achse läuft und $\lim_{w \rightarrow 0} \text{arc } \Omega'(w) = 0$ ist, so streben die Steigungen aller Tangenten von $\widehat{P_1Q_1}$ gleichmäßig nach 0 mit $v \rightarrow 0$. Daher ist $|\sigma(v)| = R_1 P_1 = Q_1 P_1 \cos \varepsilon_1 \geq (1 - \varepsilon_2) QP$, wo $\lim_{v \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ ist.

SATZ 1. *C sei eine geschlossene Jordankurve durch $w = 0$ ($w = u + iv$), G ihr Inneres. Für $|v| \leq a$, $a > 0$, möge $u = g(v)$ mit $g(0) = g'(0) = 0$ einen analytischen Jordanbogen darstellen. C sei in einer Umgebung von $w = 0$ durch $u = g_0(v)$, $|v| \leq a$, mit $g_0(0) = g'_0(0) = 0$ und beschränktem $|g''_0(v)|^2$ gegeben; ferner konvergiere*

$$\int_{-a}^a |g_0(v) - g(v)| \frac{dv}{|v|^{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Bildet $w = F(z)$ mit $F(1) = 0$ $|z| < 1$ auf G ab, so gilt

$$(3) \quad F(z) = A_0 + A_1(z-1) + \dots + A_n(z-1)^n + (z-1)^n R_n(z)$$

mit

$$\lim R_n(z) = 0 \text{ für } z \rightarrow 1 \text{ in jedem Winkel } |\text{arc}(1-z)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. 1. Es gibt eine in $|w| \leq \varrho$ bei passendem $\varrho > 0$ reguläre schlichte Funktion $\omega = \Omega(w)$, $\Omega(0) = 0$, $\Omega'(0) = 1$ ($\omega = \sigma + i\tau$) die einen in $|w| < \varrho$ gelegenen, $w = 0$ als inneren Punkt enthaltenden Teil γ des Bogens $u = g(v)$ auf ein Stück der τ -Achse der ω -Ebene abbildet. Man darf nun annehmen, daß C in $|w| < \varrho$ liegt. Sonst ergänzen wir einen Teilbogen $u = g_0(v)$, $|v| \leq b < a$, von C durch einen in G und $|w| < \varrho$ liegenden Jordanbogen zu einer geschlossenen Jordankurve C^* , deren Inneres G^* in G liegt. Man nehme nun an, der Satz sei für eine Funktion $F^*(z)$ mit $F^*(1) = 0$ bewiesen, die $|z| < 1$ auf G^*

²⁾ Die Annahme der Beschränktheit von $g_1''(v)$ und $g_1^{**}(v)$ soll folgendes sicherstellen: Ergänzt man die durch $u = g_1(v)$ und $u = g_1^*(v)$ gegebenen Bögen zu geschlossenen Jordankurven, und bildet man das Innere dieser Kurven auf $|z| < 1$ ab, so sollen die Abbildungsfunktionen eine stetige nichtverschwindende Ableitung in einer Umgebung von $w = 0$ besitzen. Hierfür genügt es, *weniger* anzunehmen:

für $g_1(v)$, daß $g_1'(v)$ stetig ist und $\int_0^b |g_1'(v \pm t) - g_1'(v)| \frac{dt}{t}$ gleichmäßig in v mit

$b \rightarrow 0$ gegen 0 strebt, und für $g_1^*(v)$ das gleiche. (Siehe ¹⁾, Math. Z. 35, 433, Satz 10.) Die obige Annahme ist mit Rücksicht auf die Einfachheit der Formulierung gemacht.

abbildet. Die Umkehrfunktion von $w = F(z)$ führt nun G^* in ein Teilgebiet E^* des Einheitskreises über, dessen Randkurve einen $z = 1$ als inneren Punkt enthaltenden Peripheriebogen von $|z| = 1$ als Teil hat. Bildet nun $z = z(\zeta)$ $|\zeta| < 1$ so auf E^* ab, daß $\zeta = 1$ $z = 1$ entspricht, so ist $z(\zeta)$ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip in einer Umgebung von $\zeta = 1$ noch regulär und $z'(1) \neq 0$. Daher gilt für ihre Umkehrfunktion $\zeta = \zeta(z)$ in einer Umgebung von $z = 1$:

$$(4) \quad \zeta = \zeta(z) = 1 + c_1(z-1) + c_2(z-1)^2 + \dots$$

Um nun (3) zu finden, hat man wegen $F^*(\zeta) = F(z(\zeta))$ in die als bereits bekannt angenommene Darstellung der Form (3) für $F^*(\zeta)$ in $\zeta - 1$ den durch (4) gegebenen Wert für $\zeta - 1$ einzusetzen.

2. Wir nehmen nun an, C liege in $|w| < \varrho$; $\omega = \Omega(w)$ bildet nun G auf ein Jordansches Gebiet Γ ab, dessen Randkurve durch $\omega = 0$ hindurchgeht, und es genügt, den Satz für die Funktion $\omega = \Phi(z) = \Omega(F(z))$ zu beweisen, die $|z| < 1$ so auf Γ abbildet, daß $z = 1$ $\omega = 0$ entspricht.

3. In einer Umgebung von $\omega = 0$ hat man für die Randkurve von Γ die Darstellung $\omega = \Omega(g_0(v) + iv)$, $|v| \leq a_1 \leq a$ für passendes $a_1 > 0$. Wegen Hilfssatz 2 ist $|\sigma(v)| = |\Re \Omega(g_0(v) + iv)| \leq \text{konst} \cdot |g_0(v) - g(v)|$. Daher konvergiert

$$(5) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|\sigma(v)|}{|v|^{n+1}} dv.$$

Nun beachte man, daß wegen der Annahmen über $g_0(v)$, $w = F(z) = u(z) + iv(z)$ in einer Umgebung von $z = 1$ eine stetige, nichtverschwindende erste Ableitung hat. Weil C in $w = 0$ die v -Achse zur Tangente hat, besitzt daher auch $v(e^{i\vartheta})$ in einer Umgebung von $\vartheta = 0$ eine stetige, nichtverschwindende Ableitung. Setzt man daher $v = v(e^{i\vartheta})$ in $\sigma(v)$ ein, so folgt wegen $\Re \Phi(e^{i\vartheta}) = \sigma(v(e^{i\vartheta}))$ und wegen der Konvergenz von (5) die Konvergenz von

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{|\Re \Phi(e^{i\vartheta})|}{|\vartheta|^{n+1}} d\vartheta$$

bei passendem $\beta > 0$. Da nun $\Phi(z)$ offenbar in der Form (1) mit $g(t) \equiv \Re \Phi(e^{it})$ darstellbar ist, so folgt die Behauptung über $\Phi(z)$ aus Hilfssatz 1.

§ 2. HAUPTSATZ.

SATZ II. G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das $w = 0$ als einen längs der positiven reellen Achse erreichbaren Rand-

punkt hat ($w = u + iv$). Für $|v| \leq a$ stelle $u = g(v)$, $g(0) = g'(0) = 0$, einen analytischen Jordanbogen dar, und $g_1(v)$ und $g_1^*(v)$ seien stetige Funktionen mit den Eigenschaften:

a) $g_1'(v)$ und $g_1^{*'}(v)$ sind vorhanden und beschränkt²⁾; ferner ist $g_1(0) = g_1^*(0) = g_1'(0) = g_1^{*'}(0) = 0$;

b) es existieren die Integrale

$$\int_{-a}^a |g_1(v) - g(v)| \frac{dv}{|v|^{n+1}}, \quad \int_{-a}^{+a} |g_1^*(v) - g(v)| \frac{dv}{|v|^{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Ferner sei $g_1(v) \leq g_1^*(v)$, und in einer Umgebung von $w = 0$ sei der Rand von G in dem Bereiche $g_1(v) \leq u \leq g_1^*(v)$, $|v| \leq a$ gelegen.

Bildet dann $z = \varphi(w)$ G auf $|z| < 1$ ab, so gilt

$$(6) \quad \varphi(w) = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \dots + c_n w^n + w^n \varrho_n(w),$$

mit $c_1 \neq 0$ und $\lim_{w \rightarrow 0} \varrho_n(w) = 0$ in jedem Winkel $W_\alpha: |\arg w| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ferner ist in jedem W_α :

$$\lim_{w \rightarrow 0} \varphi^{(\nu)}(w) = c_\nu \nu! \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad 3)$$

VORBEMERKUNG: Aus (6) folgt, daß auch für die Umkehrfunktion $w = f(z)$ von $\varphi(w)$ in einem Punkte von $|z| = 1$, den man als $z = 1$ annehmen darf, gilt:

$$(7) \quad f(z) = a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + \dots + a_n(z-1)^n + r_n(z)(z-1)^n$$

mit $\lim_{z \rightarrow 1} r_n(z) = 0$ für $z \rightarrow 1$ im Winkel.

Denn zunächst ist, da $w = 0$ ein in $|\arg w| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ erreich-

²⁾ Dies ist eine einfache Folgerung aus (6). Ist nämlich $\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$, so liegt für w in W_α der Kreis K_w mit dem Radius $r = |w| \sin \psi$ in $W_{\alpha+\psi}$, also auch in G bei genügend kleinem $|w|$. Dann gilt z.B. für $\nu = n$:

$$\varphi^{(n)}(w) - c_n n! = \varphi^{(n)}(w) - \frac{d^n}{dw^n} \sum_{k=1}^n c_k w^k = \frac{n!}{2\pi i} \int_{(K_w)} \frac{\varphi(\omega) - \sum_{k=1}^n c_k \omega^k}{(\omega - w)^{n+1}} d\omega,$$

also wegen (4) und wegen

$$|\omega| \leq r + |w| \leq r \left(1 + \frac{1}{\sin \psi} \right)$$

$$|\varphi^{(n)}(w) - c_n n!| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{(K_w)} \frac{|\varrho_n(\omega)| |\omega|^n}{r^{n+1}} |d\omega| \leq n! \max_{\omega \in K_w} |\varrho_n(\omega)| \left(1 + \frac{1}{\sin \psi} \right)^n \rightarrow 0$$

bei $w \rightarrow 0$ in W_α . — Analoges gilt für $\nu < n$.

barer Randpunkt von G ist, bei geeigneter Normierung der Abbildungsfunktion, $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 0$ im Winkel. Wegen $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\varphi(w) - 1}{w} = \text{arc } c_1 = \Theta$ im Winkel folgt daher, daß auch $\lim_{z \rightarrow 1} \text{arc } \frac{f(z)}{z - 1} = -\Theta$ im Winkel gilt, d.h. die Abbildung $w = f(z)$ ist in $z = 1$ winkeltreu. Unter Benutzung dieser Tatsache beweist man (7) analog wie die Existenz der inversen Reihe einer konvergenten Potenzreihe.

BEWEIS. 1. Für $|v| \leq b$, bei passendem $b > 0$, liegt $u = g_1(v)$ außerhalb, $u = g_1^*(v)$ innerhalb G . Wir ergänzen die hierdurch gegebenen Bögen zu geschlossenen Jordankurven C_1 resp. C_1^* derart, daß das Innere G_1 von C_1 G enthält, das G_1^* von C_1^* in G enthalten ist, und daß ferner der Punkt w_0 , den $z = \varphi(w)$ in 0 überführt, nicht in $G_1^* + C_1^*$ liegt. $z = \varphi_1(w)$ möge G_1 so auf $|z| < 1$ abbilden, daß $\varphi_1(w_0) = 0$, $\varphi_1(0) = 1$ ist. Dann gilt nach dem Lindelöfschen Prinzip

$$(8) \quad |\varphi_1(w)| \leq |\varphi(w)| \quad \text{in } G.$$

2. Da G_1^* w_0 nicht enthält, ist jeder Zweig von $\log \varphi(w)$ und $\log \varphi_1(w)$ in G_1^* eindeutig und regulär, und es gilt wegen (8)

$$(9) \quad -\log |\varphi_1(w)| \geq -\log |\varphi(w)|.$$

Ist nun $w_1^* = g_1^*(v) + iv$ auf C_1^* genügend nahe bei $w = 0$, so liegt die Strecke s , die w_1^* mit $w_1 = g_1(v) + iv$ auf C_1 verbindet, bis auf w_1 in G_1 . Wegen der Annahme (a) über $g_1(v)$ ist $\varphi_1'(w)$ in einer Umgebung von $w = 0$ in $G_1 + C_1$ stetig²⁾, und da $\lim_{w \rightarrow 0} \varphi_1(w) = 1$ gilt, so ist in einer solchen Umgebung von $w = 0$

$$\left| \frac{d \log \varphi_1(w)}{dw} \right| = \left| \frac{\varphi_1'(w)}{\varphi_1(w)} \right| \leq M \quad (M \text{ Konstante}).$$

Daher ist für w_1^* auf C_1^* , in einer Umgebung von $w = 0$, bei Integration längs s :

$$\begin{aligned} (10) \quad 0 &\leq -\log |\varphi_1(w_1^*)| = -(\log |\varphi_1(w_1^*)| - \log |\varphi_1(w_1)|) \leq \\ &\leq |\log \varphi_1(w_1^*) - \log \varphi_1(w_1)| \leq \int_{w_1}^{w_1^*} \left| \frac{\varphi_1'(w)}{\varphi(w)} \right| |dw| \leq \\ &\leq M |w_1^* - w_1| \leq M \{|g_1^*(v) - g(v)| + |g_1(v) - g(v)|\}. \end{aligned}$$

3. Es möge nun $w = f_1^*(z)$ $|z| < 1$ so auf G_1^* abbilden, daß

$f_1^*(1) = 0$ ist. Wegen der Annahme (a) über $g_1^*(v)$ hat $v = \Im f_1^*(e^{i\vartheta})$ in einer Umgebung von $\vartheta = 0$ nichtverschwindende stetige Ableitung²⁾. Daher konvergiert für ein $\beta > 0$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \{ |g_1^*(v) - g(v)| + |g_1(v) - g(v)| \} \frac{d\vartheta}{|\vartheta|^{n+1}}, v = \Im f_1^*(e^{i\vartheta}).$$

Wegen (10) konvergiert somit auch

$$(11) \quad \int_{-\beta}^{\beta} -\log |\varphi_1(f_1^*(e^{i\vartheta}))| \frac{d\vartheta}{|\vartheta|^{n+1}}.$$

Da offenbar für eine feste Bestimmung von $\log \varphi(f_1^*(z))$ in $|z| < 1$

$$-\log \varphi(f_1^*(z)) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\varphi(f_1^*(e^{i\vartheta}))| \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\vartheta + \mu$$

(μ Konstante) gilt, und da ferner wegen (9) und (11)

$$\int_{-\beta}^{\beta} -\log |\varphi(f_1^*(e^{i\vartheta}))| \frac{d\vartheta}{|\vartheta|^{n+1}}$$

existiert, so hat $\log \varphi(f_1^*(z))$ und daher auch $\varphi(f_1^*(z)) = e^{\log \varphi(f_1^*(z))}$ eine „Taylor-Darstellung“ der Form (2) in $z = 1$.

Um nun hieraus (6) zu gewinnen, beachte man, daß nach Satz I $w = f_1^*(z)$ bereits eine Darstellung der Form (3) hat, und daß wegen der Winkeltreue der Abbildung $w = f_1^*(z)$ in $z = 1$ auch die inverse Funktion $z = \varphi_1^*(w)$ die Darstellung

$$z = \varphi_1^*(w) = 1 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots + b_n w^n + P_n(w) w^n \text{ mit } \lim_{w \rightarrow 0} P_n(w) = 0$$

im Winkel besitzt. Man hat nunmehr nur den hierdurch gegebenen Wert von $(z-1)$ in die Darstellung von $\varphi(f_1^*(z))$ einzusetzen, um (6) zu erhalten.

Daß c_1 in (6) nicht 0 ist, folgt aus der Tatsache, daß die Abbildungsfunktionen von G_1 und G_1^* auf $|z| < 1$ in $w = 0$ von 0 verschiedene Ableitungen besitzen⁴⁾.

II. Verallgemeinerung für tangentielle Annäherung.

Setzt man im Satz II $g(v) - g_1(v)$ und $g_1^*(v) - g(v)$ als monoton wachsend mit $|v|$ voraus, so kann gezeigt werden, daß

⁴⁾ S. l.c. ¹⁾ Math. Z. 35, 454. Vgl. auch B. GROOTENBOER [Bull. S. M. F. 61 (1933), 130] und Over het gedrag van een conforme afbeelding bij een randpunt [Diss. Utrecht, 1932], 24.

dessen Behauptung sogar noch richtig bleibt, wenn die Differenzierbarkeitsannahmen in (a) fortgelassen werden ⁵⁾. Nimmt man jedoch noch im Falle $n > 2$ eine weitere einfache Bedingung hinzu, so gilt die Darstellung (6) noch bei gewissen *tangentiellen* Annäherungen. Dies soll im folgenden ausgeführt werden. Die dafür nötigen Überlegungen scheinen sich etwas übersichtlicher zu gestalten, wenn der betrachtete Randpunkt des Gebietes G als $w = \infty$ angenommen wird und G auf die Halbebene $\Re z > 0$ (anstelle des Einheitskreises) so abgebildet wird, daß $w = \infty$ $z = \infty$ „entspricht“.

§ 3. HILFSSATZ.

HILFSSATZ 3. $f(t)$ sei in $-\infty < t < \infty$ summierbar. Für ein $\mu \geq 0$ und ein $c > 0$ sei $|f(t)| \leq c \cdot |t|^\mu \psi(t)$, wobei $\psi(t) \geq 0$ für $t > 0$, stetig und abnehmend (wachsend) ist. Für $t < 0$ sei $\psi(t) = \psi(-t)$, und $|t|^\mu \psi(t)$ sei auch in $t = 0$ definiert und stetig. Ferner sei für ein ganzes $m \geq -1$:

$$\int_1^\infty \psi(t) t^{\mu+m-1} dt < \infty \text{ und, falls } m > -1 \text{ ist, sei } \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu+m} \psi(t) \log t = 0.$$

Setzt man dann

$$(12) \quad F(z) = F(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \frac{1}{z-it} + \frac{1}{1+it} \right\} dt, \quad x > 0,$$

so gilt:

$$F(z) = z R_{-1}(z) \text{ für } m = -1,$$

$$(13) \quad F(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_m}{z^m} + \frac{R_m(z)}{z^m} \text{ für } m > -1$$

mit

$$R_{-1}(z) = \frac{z+1}{z} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(z-it)(1+it)}, \quad R_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(it)^m dt}{z-it},$$

wobei $\lim_{z \rightarrow \infty} R_m(z) = 0$ in jedem Bereich $\Delta_\varepsilon: x \geq \varepsilon |y|^\mu \psi((1-\varepsilon)y)$ (bzw. $x \geq \varepsilon |y|^\mu \psi((1+\varepsilon)y)$) bei beliebigem festen ε mit $0 < \varepsilon < 1$ gilt,

⁵⁾ Unter dieser Annahme läßt sich nämlich eine Funktion $\delta(v)$ ($\delta(0) = \delta'(0) = 0$) mit beschränkter zweiter Ableitung konstruieren, so daß $|g_1(v) - g(v)| \leq \delta(v)$, $|g_1^*(v) - g(v)| \leq \delta(v)$ ist und $\int_{-a}^a \delta(v) \frac{dv}{|v|^{n+1}} < \infty$ ist. Dann kann man Satz II mit $g(v) - \delta(cv)$ und $g(v) + \delta(v)$ anstelle von $g_1(v)$ und $g_1^*(v)$ anwenden.

Wir führen den *Beweis* nur für den Fall abnehmender $\psi(t)$ aus, da der andere analog ist. — (13) ist für $m < 1$ mit (12) identisch, für $m \geq 1$ folgt (13) aus

$$\frac{1}{z - it} = \frac{1}{z} + \frac{it}{z^2} + \frac{(it)^2}{z^3} + \dots + \frac{(it)^{m-1}}{z^m} + \frac{(it)^m}{(z - it)z^m}.$$

Beim Nachweis $\lim_{z \rightarrow \infty} R_m(z) = 0$ darf man o.B.d.A. $y \geq 0$ annehmen. Sei für das im Satze genannte ε mit $0 < \varepsilon < 1$:

$$\pi R_m(z) = \int_{|t-y| > y\varepsilon} + \int_{|t-y| \leq y\varepsilon} = J_m^{(1)} + J_m^{(2)}.$$

Für $|t - y| > y \cdot \varepsilon$ ist $|t - y| > \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} |t|$, also ist auch

$|z - it| > \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} |t|$; daher ist für $A > 0$

$$|J_m^{(1)}| \leq 2c \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int_A^\infty \psi(t) t^{\mu+m-1} dt + c \int_{-A}^A \frac{\psi(t) |t|^\mu}{|z - it|} \cdot \begin{cases} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} & \text{falls } m = -1 \\ |t|^m dt & \text{falls } m > -1 \end{cases} \quad \text{ist.}$$

Da $J_m^{(2)} = 0$ für $y = 0$ ist, sei $y > 0$ angenommen. Dann ist

$$\begin{aligned} |J_m^{(2)}| &\leq c \int_{y(1-\varepsilon)}^{y(1+\varepsilon)} \frac{\psi(t) t^{\mu+m}}{|z - it|} dt \\ &\leq c \psi((1-\varepsilon)y) y^{\mu+m} (1+\varepsilon)^\mu (1 \pm \varepsilon)^m \int_{y(1-\varepsilon)}^{y(1+\varepsilon)} \frac{dt}{\sqrt{x^2 + (y-t)^2}}, \end{aligned}$$

wobei nur im Falle $m = -1$ $(1-\varepsilon)^m$, sonst aber $(1+\varepsilon)^m$ steht. Also ist

$$\begin{aligned} (14) \quad |J_m^{(2)}| &\leq \text{konst} \cdot y^{\mu+m} \psi((1-\varepsilon)y) \log \frac{y\varepsilon + \sqrt{x^2 + (\varepsilon y)^2}}{x} \\ &\leq \text{konst} \cdot y^{\mu+m} \psi((1-\varepsilon)y) \log \left(1 + \frac{\varepsilon y}{x} \right). \end{aligned}$$

Für $m = -1$ ist nun wegen $\int_1^\infty t^\mu \psi(t) \frac{dt}{t^2} < \infty$ $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu-1} \psi(t) = 0$;

für $m > -1$ ist $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu+m} \psi(t) \log t = 0$.

Daher folgt aus (14) für $x \geq \varepsilon y^\mu \psi((1-\varepsilon)y)$, $y^{\mu+m} \psi((1-\varepsilon)y) = \mathcal{O}_m(y)$ gesetzt, bei genügend großem y :

$$(15) \quad |J_m^{(2)}| \leq \text{konst.} \begin{cases} |\Theta_{-1}(y)| \log |\Theta_{-1}(y)|, & \text{falls } m = -1 \\ [|\Theta_m(y)| \log |\Theta_m(y)| + \Theta_m(y) \log y^{m+1}], & \text{falls } m > -1 \end{cases}$$

ist. Aus (14) und (15) folgt leicht $\lim_{z \rightarrow \infty} J_m^{(2)} = 0$ in Δ_ε .

$$\text{Somit hat man in } \Delta_\varepsilon: \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |R_m(z)| \leq 2c \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int_A^\infty \varphi(t) t^{\mu+m-1} dt,$$

woraus wegen der Willkür von A die Behauptung folgt.

§ 4. DIE TAYLORDARSTELLUNG BEI TANGENTIELLEN ANNÄHERUNGEN.

SATZ III. Für ein $\mu \geq 0$ und für $0 \leq t < \infty$ sei $\varphi(t)$ stetig und von der Form $\varphi(t) = t^\mu \psi(t)$, wobei $\psi(t) \geq 0$ und abnehmend (resp. wachsend) für $t > 0$ sei. Für $t \leq 0$ sei $\varphi(t) = \varphi(-t)^{5a}$. Ferner sei $\int_1^\infty \varphi(t) t^{m-1} dt < \infty$, $m \geq -1$, ganz, und falls $m > -1$ ist, sei $\lim_{t \rightarrow \infty} t^m \varphi(t) \log t = 0$.

D sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der w -Ebene, $w = u + iv$. Der Bereich D_1 : $u \geq -\varphi(v)$, $-\infty < v < \infty$, möge D enthalten, der Bereich D_1^* : $u \geq \varphi(v)$, $-\infty < v < \infty$, in D enthalten sein. $z = z(w)$ bilde D auf die Halbebene $\Re z > 0$ so ab, daß $\lim_{w \uparrow \infty} z(w) = \infty$ ist. Dann gilt

$$(16) \quad z(w) = c + \lambda w + \frac{c_1}{w} + \dots + \frac{c_m}{w^m} + \frac{\varrho_m(w)}{w^m} \text{ mit } \lim_{w \rightarrow \infty} \varrho_m(w) = 0$$

in jedem Bereich $D_{1+\varepsilon}$: $u \geq (1+\varepsilon) |v|^\mu \psi((1-\varepsilon)v)$, $-\infty < v < \infty$, (bzw. $u \geq (1+\varepsilon) |v|^\mu \psi((1+\varepsilon)v)$), für beliebiges festes ε mit $0 < \varepsilon < 1$. Dabei ist $0 < \lambda < \infty$.

ZUSATZ. Für die zu $z(w)$ inverse Funktion $w = w(z) = w(z+iy)$ gilt

$$w(z) = a + \frac{1}{\lambda} z + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_m}{z^m} + \frac{r_m(z)}{z^m} \text{ mit } \lim_{z \rightarrow 0} r_m(z) = 0$$

in jedem Bereich $\Delta_{\varepsilon, \lambda}$: $x \geq (2+\varepsilon) \lambda^{1-\mu} |y|^\mu \psi((1-\varepsilon) \frac{y}{\lambda})$, $-\infty < y < \infty$ (bzw. $x \geq (2+\varepsilon) \lambda^{1-\mu} |y|^\mu \psi((1+\varepsilon) \frac{y}{\lambda})$) für beliebiges festes ε mit $0 < \varepsilon < 1$.

^{5a)} Es darf $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = +\infty$ sein; $\varphi(t) = |t|^\mu \psi(t)$ ist aber in $t = 0$ definiert und stetig, und $\varphi(0) \geq 0$.

BEWEIS. 1. Wir führen den Beweis wieder nur für den Fall abnehmender $\psi(t)$ aus, da der andere analog ist. — $W(z) = U(z) + iV(z)$ und $W^*(z) = U^*(z) + iV^*(z)$ mögen $\Re z > 0$ so auf D_1 bzw. D_1^* abbilden, daß $W(z)$ und $W^*(z)$ reell für reelle z sind und $z = \infty \Leftrightarrow w = \infty$ entspricht. Da die Randkurven von D_1 resp. D_1^* in der Form $u = f(v)$ mit stetigem $f(v)$ und $\lim_{v \rightarrow \pm \infty} \frac{f(v)}{v} = 0$ gegeben sind, und da ferner $\int_1^\infty \text{Max}_{|v| \geq t} \left(\frac{\varphi(v)}{v^2} \right) dt$ konvergiert⁶⁾, so haben $W(z)$ und $W^*(z)$ in $z = \infty$ eine positive allseitige Ableitung⁷⁾, die beide Male gleich 1 angenommen werden darf. Hieraus folgt insbesondere: Entsprechen $w = u + iv$ und $z = x + iy$ einander vermittle $w = W(z)$ oder $w = W^*(z)$, und liegt w oder z in seinem Definitionsbereich auf einer in ∞ mündenden Jor-

⁶⁾ Ist $\psi(t)$ abnehmend, so ist zunächst, $n \geq 1$, ganz:

$$(*) \quad \text{Max}_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{\varphi(t)}{t^2} \leq \frac{4^\mu}{2^{n-1}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

Nun ist für $2^k \leq \tau \leq 2^{k+1}$, $k \geq 1$, ganz:

$$\mu(\tau) \equiv \text{Max}_{t \geq \tau} \frac{\varphi(t)}{t^2} \leq \text{Max}_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{\varphi(t)}{t^2} + \text{Max}_{2^{k+1} \leq t \leq 2^{k+2}} \frac{\varphi(t)}{t^2} + \dots,$$

wobei die Reihe rechts wegen $(*)$ und $\int_1^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t^2} < \infty$ konvergiert. Daher folgt nach $(*)$ zunächst rein formal,

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \mu(\tau) d\tau &= \sum_{k=1}^\infty \int_{2^k}^{2^{k+1}} \mu(\tau) d\tau \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{2^k}^{2^{k+1}} d\tau \sum_{n=k}^\infty \text{Max}_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{\varphi(t)}{t^2} \\ &\leq 4^\mu \sum_{k=1}^\infty \int_{2^k}^{2^{k+1}} d\tau \sum_{n=k}^\infty \frac{1}{2^{n-1}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \\ &= 4^\mu \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{n-1}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \int_2^{2^{n+1}} d\tau \leq 4^{\mu+1} \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt, \end{aligned}$$

und da es sich durchweg um Reihen mit positiven Gliedern handelt und

$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt < \infty$ ist, so sind die Umformungen gerechtfertigt. Ist $\psi(t)$ wachsend,

so ist alles analog. Man vgl. hierfür die Arbeit von GROOTENBOER, l.c. ⁴⁾, 137—138 bzw. Diss., 45.

⁷⁾ S. l.c. ¹⁾ Math. Z. 35, 387, Satz 7.

dankurve L , längs deren $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{u}{v} = 0$ resp. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{x}{y} = 0$ gilt, so ist

$$(17) \quad \lim_{y} \frac{v}{y} = 1 \text{ für } w \rightarrow \infty \text{ bzw. } z \rightarrow \infty \text{ längs } L.$$

2. Wegen $U^*(z) > 0$ in $x > 0$ und der Stetigkeit der Randwerte $U^*(iy)$ von $U^*(z)$ auf $x = 0$ gilt in $x > 0$ ⁸⁾

$$(18) \quad W^*(z) = z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(z) \left\{ \frac{1}{z - it} + \frac{1}{1 + it} \right\} dt + \text{konst.}$$

und

$$(19) \quad U^*(z) = x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(it) \frac{x dt}{x^2 + (y - t)^2}, \quad x > 0.$$

Eine analoge Darstellung gilt auch für $U(z)$. Zunächst ist nämlich $F(z) = e^{W(z)-z}$ in $x > 0$ regulär und hat auf $x = 0$ ($z \neq \infty$) stetige Randwerte $F(iy)$ mit $|F(iy)| = e^{U(iy)-x} \leq 1$. Ferner ist wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{W(z)}{z} = 1$: $W(z) - z = o(|z|)$ bei $z \rightarrow \infty$ in $x > 0$, also für jedes $\varepsilon > 0$ $|F(z)| \leq e^{\varepsilon|z|}$ in $x > 0$ bei genügend großem $|z|$. Daher ist nach Phragmén-Lindelöf⁹⁾ $|F(z)| \leq 1$ in $x > 0$, also $e^{U(z)-x} \leq 1$, $x - U(z) \geq 0$ in $x > 0$. Wegen der Stetigkeit von $U(iy)$ und wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{W(z)}{z} = 1$ gilt daher in der Tat

$$(20) \quad U(z) - x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(it) \frac{x dt}{x^2 + (y - t)^2} \text{ für } x > 0.$$

3. Es sei $z = Z(w) = X(w) + iY(w)$ die zu $W(z)$ inverse Funktion. Da $D \setminus D_1^*$ enthält und in D_1 enthalten ist, hat die zu $z = z(w)$ inverse Funktion $w = w(z)$ in $z = \infty$ eine positive endliche Winkelderivierte $\frac{1}{\lambda}$ ⁴⁾. Somit hat auch $Z(w(z))$ in $z = \infty$ die Winkelderivierte $\frac{1}{\lambda}$. Wegen $X(w(z)) \geq 0$ ist daher auch⁸⁾ $X(w(z)) - \lambda^{-1}x \geq 0$ in $x > 0$, also ist

$$(21) \quad \Re z(w) = x(w) \leq \lambda X(w) \quad \text{für } w \text{ in } D.$$

Ferner merken wir noch an, daß $z(W^*(\zeta))$, $\zeta = \xi + i\eta$, in $\xi > 0$ nichtnegativen Realteil $x(W^*(\zeta))$ mit stetigen Randwerten auf $\xi = 0$ hat, und daß daher in $\xi > 0$ gilt:

⁸⁾ S. J. WOLFF et F. DE KOK [Bull. S. M. F. 60 (1932), 225—226].

⁹⁾ S. z.B. L. BIEBERBACH, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 133.

$$(22) \quad z(W^*(\zeta)) = \lambda \zeta + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(W^*(i\tau)) \left\{ \frac{1}{\zeta - i\tau} + \frac{1}{1 + i\tau} \right\} d\tau + \text{konst.}$$

4. Wir leiten nun aus (20) eine Ungleichung her. Sei $0 < \vartheta < 1$. Wegen $U(it) < 0$ ist nach (20) für $x > 0$ und $y > 0$

$$x - U(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|U(it)| x dt}{x^2 + (y-t)^2} = \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 + \int_0^{y(1-\vartheta)} + \int_{y(1-\vartheta)}^{y(1+\vartheta)} + \int_{y(1+\vartheta)}^{\infty} \right\} \\ = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Für $0 < A < (1-\vartheta)y$, $y > 0$, gilt

$$J_2 \leq \frac{x}{\pi} \frac{1}{\vartheta^2 y^2} \int_0^A |U(it)| dt + \frac{x}{\pi} \int_A^{y(1-\vartheta)} \frac{|U(it)|}{\vartheta^2 t^2} dt = x o(1)$$

bei $y \rightarrow \infty$ und festem ϑ .

Ferner gilt

$$J_4 \leq \frac{4x}{\pi} \int_{y(1+\vartheta)}^{\infty} \frac{|U(it)|}{\vartheta^2 t^2} dt = x o(1)$$

für $y \rightarrow \infty$ und festes ϑ .

Da für $t > 0$ $V(it)$ wächst und $\frac{|U(it)|}{V(it)^\mu} = \psi(V(it))$ fällt, folgt

$$J_3 \leq \frac{U(iy(1-\vartheta))}{V(iy(1-\vartheta))^\mu} V(iy(1+\vartheta))^\mu \frac{1}{\pi} \int_{y(1-\vartheta)}^{y(1+\vartheta)} \frac{x dt}{x^2 + (y-t)^2} \\ \leq |U(iy(1-\vartheta))| \left[\frac{V(iy(1+\vartheta))}{V(iy(1-\vartheta))} \right]^\mu \leq |U(iy(1-\vartheta))| \left[\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \right]^{2\mu}$$

bei genügend großem y , da wegen (17)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{V(iy(1+\vartheta))}{V(iy(1-\vartheta))} = \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} < \left(\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \right)^2$$

ist.

Schließlich ist noch wegen $U(-it) = U(it)$ für $A > 0$

$$J_1 = \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|U(it)| dt}{x^2 + (y+t)^2} \leq \frac{x}{\pi} \int_0^A \frac{|U(it)| dt}{x^2 + (y+t)^2} + \frac{x}{\pi} \int_A^{\infty} \frac{|U(it)|}{t^2} dt = \\ = x \cdot o(1) \quad \text{bei } y \rightarrow \infty.$$

Somit erhalten wir für festes ϑ und $y > y_0 = y_0(\vartheta)$, $z = x + iy$,

$$(23) \quad x - U(z) \leq \left(\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \right)^{2\mu} |U(iy(1-\vartheta))| + x \cdot o(1) \text{ bei } y \rightarrow \infty,$$

und wegen $U(x+iy) = U(x-iy)$ gilt das gleiche auch für $y < -y_0$, $y \rightarrow -\infty$.

5. Wir wenden nun (23) auf einen speziellen Fall an und führen dabei w mittels $z = Z(w)$ als neue Variable ein. Es sei $w = u + iv$ ein fester Punkt auf einer in $w = \infty$ mündenden Jordankurve L in D_1 , längs deren $\lim v = \infty$ bei Durchlaufung von L in der einen, $\lim v = -\infty$ bei Durchlaufung in der entgegengesetzten Richtung ist und $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{u}{v} = 0$ gilt. Dann ist $x = X(w)$, $U(z) = u$, $y = Y(w)$; setzt man für den Augenblick $(1-\vartheta)y = \eta$, so ist $|U(iy(1-\vartheta))| = |V(i\eta)|^\mu \psi(V(i\eta))$.

Wendet man (17) für $z = i\eta$ und $w = W(i\eta)$ an, so ist bei genügend großem $|\eta|$ oder — was wegen $y = Y(w)$ dasselbe besagt — bei genügend großem $|w|$

$$y \geq (1-\vartheta^2)y \geq V(i\eta) \geq (1-\vartheta)^2y.$$

Ferner ist nach (17) für $w = u + iv$ auf L und $z = Z(w)$ ($y = Y(w)$)

$$(1+\vartheta)v \geq Y(w) \geq (1-\vartheta)v$$

bei genügend großem $|w|$. Somit gilt

$$(1+\vartheta)v \geq V(i\eta) \geq (1-\vartheta)^3v, \quad |U(i\eta)| \leq (1+\vartheta)^\mu |v|^\mu \psi((1-\vartheta)^3v).$$

Daher erhalten wir aus (23) das *Resultat*: Zu jedem Θ mit $0 < \Theta < 1$ gibt es ein $A = A(\Theta; L)$, so daß für w auf L mit $|w| \geq A$ gilt

$$(24) \quad X(w) \leq \{u + |v|^\mu \psi((1-\Theta)v)\} (1+\Theta).$$

6. Ähnlich folgt aus (19) und (17): Ist $0 < \Theta < 1$ und A eine Kurve in $x \geq 0$ von demselben Typus wie L , so ist für z auf A mit $|z| \geq B = B(\Theta; A)$

$$(25) \quad U^*(z) \leq \{x + |y|^\mu \psi((1-\Theta)y)\} (1+\Theta).$$

7. Es sei ε mit $0 < \varepsilon < 1$ vorgegeben. Ist $\Theta > 0$ so klein, daß

$$(26) \quad \frac{1-\Theta}{1+\Theta} > 1-\varepsilon \text{ und } (1+\Theta)^{2+\mu} < 1+\varepsilon$$

ist, so enthält das Bild des Bereiches Δ_Θ : $x \geq \Theta |y|^\mu \psi((1-\Theta)y)$, $-\infty < y < \infty$, mittels $w = W^*(z)$ in der w -Ebene den außerhalb eines gewissen Kreises um $w = 0$ gelegenen Teil des Bereiches $D_{1+\varepsilon}$: $u \geq (1+\varepsilon) |v|^\mu \psi((1-\varepsilon)v)$, $-\infty < v < \infty$.

Zum Beweise genügt es offenbar zu zeigen, daß das Bild der Kurve Λ_Θ : $x = \Theta |y|^\mu \psi((1-\Theta)y)$ mittels $W^*(z)$ für alle genügend großen $|y|$ links¹⁰⁾ von der Kurve $L_{1+\varepsilon}$: $u = (1+\varepsilon)|v|^\mu \psi((1-\varepsilon)v)$ liegt. Sei für $z = x + iy$ auf Λ_Θ , mit $|y| \geq B_1 = B_1(\Theta) \geq B(\Theta; \Lambda_\Theta)$ (B die Zahl aus (25)):

$$(27) \quad \frac{1}{1+\Theta} \leq \frac{V^*(z)}{y} \leq 1 + \Theta.$$

Ist $|v_0|$ genügend groß, so schneidet die Gerade $v = v_0$ das Bild von Λ_Θ nur noch in Punkten $w = U^*(z) + iV^*(z)$ mit $|y| \geq B_1$, möglicherweise aber in mehr als nur einem Punkte. Es sei $z_0 = x_0 + iy_0$, $|y_0| \geq B_1$, derjenige Punkt auf Λ_Θ , für den $V^*(z_0) = v_0$ und $u = U^*(z_0)$ am größten ist. Daher gilt wegen (27)

$$(28) \quad v_0 \frac{1}{1+\Theta} \leq y_0 \leq v_0(1+\Theta).$$

Da ferner wegen (25) $u = U^*(z_0) \leq |y_0|^\mu \psi((1-\Theta)y_0)(1+\Theta)^2$ ist, so folgt aus (28) und (26)

$$u = U^*(z_0) \leq |v_0|^\mu \psi\left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta}v_0\right)(1+\Theta)^{2+\mu} < |v_0|^\mu \psi((1-\varepsilon)v_0)(1+\varepsilon),$$

woraus die Behauptung folgt.

8. Jetzt ergibt sich leicht die Behauptung des Satzes. Zunächst folgt aus (18), daß für $w = W^*(\zeta) = W^*(\xi + i\eta)$ gilt

$$(29) \quad w = W^*(\zeta) = \beta + \zeta + \frac{\beta_1}{\zeta} + \dots + \frac{\beta_m}{\zeta^m} + \frac{B_m(\zeta)}{\zeta^m}$$

$$\text{mit } \lim_{\zeta \rightarrow \infty} B_m(\zeta) = 0$$

in Λ_ε : $\xi \geq \varepsilon |\eta|^\mu \psi((1-\varepsilon)\eta)$ bei beliebigem festem ε mit $0 < \varepsilon < 1$.

Sei nämlich $\Theta = 1 - \sqrt{1-\varepsilon}$, also $(1-\Theta)^2 = 1-\varepsilon$. Dann ist nach (25) bei genügend großem $|\eta|$:

$0 \leq U^*(i\eta) \leq 2 |\eta|^\mu \psi((1-\Theta)\eta)$. Daher folgt (29) aus Hilfssatz 3, wenn für das $\psi(t)$ und ε des Hilfssatzes $\psi((1-\Theta)t)$ bzw. Θ gewählt werden.

Weiter ergibt sich aus (22), daß für $z(W^*(\zeta))$ gilt

$$(30) \quad z(W^*(\zeta)) = \gamma + \lambda\zeta + \frac{\gamma_1}{\zeta} + \dots + \frac{\gamma_m}{\zeta^m} + \frac{\Gamma_m(\zeta)}{\zeta^m}$$

$$\text{mit } \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \Gamma_m(\zeta) = 0$$

¹⁰⁾ Wir sagen, die Kurve Λ liege links (bzw. rechts) von der Kurve $u = g(v)$, $|v| \geq A$, wenn für jedes v_0 , $|v_0| \geq A$, die Abscissen aller Schnittpunkte von $v = v_0$ mit $\Lambda \leq g(v_0)$ (resp. $\geq g(v_0)$) sind.

in Δ_ε . Denn setzen wir wieder $\Theta = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon}$ und wenden zunächst (24) mit $\frac{\Theta}{2}$ anstatt Θ an, so erhalten wir wegen (21) für w auf L^* : $u = |v|^\mu \psi(v)$, bei genügend großem $|v|$

$$x(w) \leq \lambda X(w) \leq 2\lambda \left\{ |v|^\mu \psi(v) + |v|^\mu \psi\left(\left(1 - \frac{\Theta}{2}\right)v\right) \right\}.$$

Setzt man hier $w = W^*(i\eta)$ ein ($-\infty < \eta < \infty$), so folgt wegen (17)

$$x(W^*(i\eta)) \leq 4\lambda |\eta|^\mu \psi((1 - \Theta)\eta)$$

bei genügend großem $|\eta|$ und daher die Behauptung nach Hilfssatz 3.

9. Um nun schließlich (16) zu erhalten, beachte man, daß aus (29) auch umgekehrt folgt

$$(31) \quad \zeta = b + w + \frac{b_1}{w} + \dots + \frac{b_m}{w^m} + \frac{R_m(w)}{w^m} \quad \text{mit} \quad \lim_{w \rightarrow \infty} R_m(w) = 0,$$

wenn nur $w \rightarrow \infty$ innerhalb eines Bereiches in D_1^* geht, dem mittels $w = W^*(\zeta)$ ein Bereich der ζ -Ebene entspricht, in dem $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} B_m(\zeta) = 0$ ist. Nach Nr. 7 (Anfang) ist dies aber bei gegebenem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ sicher der Fall für den außerhalb eines gewissen Kreises um $w = 0$ gelegenen Teil von $D_{1+\varepsilon}$. Daher ist $\lim_{w \rightarrow \infty} R_m(w) = 0$ in $D_{1+\varepsilon}$. Setzt man (31) in (30) ein, so erhält man die gewünschte Darstellung für $z(w)$.

BEWEIS DES ZUSATZES. Nach Satz III ist für w auf der Kurve

$$L_{1+\Theta}: \quad u = (1 + \Theta) |v|^\mu \psi((1 - \Theta)v), \quad -\infty < v < \infty, \quad \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{z(w)}{w} = \lambda,$$

also insbesondere $\lim_{w \rightarrow \infty} z(w) = \infty$ und $\lim_{v \rightarrow +\infty} y(w) = +\infty$ ($y(w) = \Im z(w)$), $\lim_{v \rightarrow -\infty} y(w) = -\infty$. Sei nun $0 < \varepsilon < 1$. Ist dann Θ so klein, daß

$$(32) \quad \frac{1 - \Theta}{1 + \Theta} > 1 - \varepsilon, \quad (1 + \Theta)^{\mu+1} (2 + \Theta) < 2 + \varepsilon$$

gilt, so liegt das Bild von $L_{1+\Theta}$ mittels $z = z(w)$ für alle genügend großen $|v|$ links¹⁰⁾ von der Kurve

$$x = (2 + \varepsilon) \lambda^{1-\mu} |y|^\mu \psi\left((1 - \varepsilon) \frac{y}{\lambda}\right), \quad -\infty < y < \infty.$$

Sei nämlich $A_1 > 0$ derart, daß für w auf $L_{1+\Theta}$ mit $|v| \geq A_1$

$$(33) \quad v \lambda(1+\Theta)^{-1} < y(w) < v \lambda(1+\Theta)$$

gilt, und daß (24) anwendbar ist. Ist nun $|y_0|$ hinreichend groß, so schneidet die Gerade $y = y_0$ das Bild von $L_{1+\Theta}$ nur noch in Punkten $z(w) = x(w) + iy(w)$ mit $|v| \geq A_1$. Sei $w_0 = u_0 + iv_0$, $|v_0| \geq A_1$, derjenige Punkt auf $L_{1+\Theta}$, für den $y(w_0) = y_0$ und $x(w_0) = y_0$ und $x(w_0)$ am größten ist. Dann ist nach (21) und (24)

$$x(w_0) \leq \lambda X(w_0) \leq \lambda |v_0|^\mu \psi((1-\Theta)v_0)(2+\Theta)(1+\Theta),$$

und wegen (33) und (32) ist daher

$$x(w_0) < \lambda^{1-\mu} |y_0|^\mu \psi\left((1-\varepsilon) \frac{y_0}{\lambda}\right) (2+\varepsilon),$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Das Bild des Bereiches $D_{1+\Theta}$: $u \geq (1+\Theta)|v|^\mu \psi((1-\Theta)v)$ vermittelt $z = z(w)$ in der z -Ebene enthält somit den außerhalb eines hinreichend großen Kreises um $z = 0$ gelegenen Teil des Bereiches $\Delta_{\varepsilon, \lambda}$: $x \geq (2+\varepsilon)\lambda^{1-\mu} |y|^\mu \psi\left((1-\varepsilon) \frac{y}{\lambda}\right)$.

Die Entwicklung für $w(z)$ ergibt sich nun durch Umkehrung der Entwicklung (16) für $z(w)$, wenn man beachtet, daß das bei der Umkehrung zunächst formal gewonnene Restglied $r_m(z) \rightarrow 0$ strebt, wenn $z \rightarrow \infty$ in einem Bereiche in $\Re z > 0$ geht, dem mittels $w(z)$ ein Bereich der w -Ebene entspricht, in dem $\lim_{w \rightarrow \infty} \varrho_m(w) = 0$ ist. Nach dem eben Bewiesenen ist dies der Fall, wenn $z \rightarrow \infty$ in $\Delta_{\varepsilon, \lambda}$ geht.

§ 5. FOLGERUNGEN.

1. ERGÄNZUNG ZU SÄTZEN VON C. VISSER UND J. G. VAN DER CORPUT. Herr van der Corput hat kürzlich ein Kriterium für die Existenz einer positiven endlichen Winkelderivierten hergeleitet,¹¹⁾ das, wie er zeigte, mit einem Kriterium von C. Visser¹¹⁾ äquivalent ist, und das so formuliert werden kann:

Es sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der w -Ebene ($w = u + iv$). Für $t \geq 0$ sei $\psi(t) > 0$, stetig und wachsend; für $t < 0$ sei $\psi(t) = \psi(-t)$. Ferner sei

$$(34) \quad \int_1^\infty \psi(t) \frac{dt}{t^2} < \infty.$$

¹¹⁾ Siehe l.c. ¹⁾.

D enthalte D_1^* : $u \geq \psi(v)$, $-\infty < v < \infty$, und sei in D_1 : $u \geq -\psi(v)$, $-\infty < v < \infty$, enthalten. Bildet dann $z = z(w)$ D so auf $\Re z > 0$ ab, daß $\lim_{w \uparrow \infty} z(w) = \infty$ ist, so hat $z(w)$ in $w = \infty$ eine endliche positive Winkelderivierte λ ¹²⁾.

Dieses Kriterium ist übrigens auch äquivalent mit einem vom Verfasser für den Fall angegebenen¹³⁾, daß der betrachtete Randpunkt endlich ist. Man erhält dessen Formulierung für den Fall des unendlich fernen Punktes, wenn man in dem van der Corputschen Satz (34) durch die (nach⁶⁾ äquivalente) Bedingung $\int_1^\infty \max_{|t| \geq v} \left(\frac{\psi(t)}{t^2} \right) dv < \infty$ ersetzt.

Aus Satz III folgt nun (für $m = -1$, $\mu = 0$, $\varphi(t) = \psi(t)$), daß $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{z(w)}{w} = \lambda$ nicht nur im Winkel, sondern in jedem Bereich $D_{1+\varepsilon}$: $u \geq (1+\varepsilon)\psi((1+\varepsilon)v)$, $-\infty < v < \infty$, gilt ($0 < \varepsilon < 1$). Für die Umkehrfunktion $w(z) = w(x+iy)$ von $z(w)$ ist $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \lambda^{-1}$ in jedem Bereich $x \geq (2+\varepsilon)\lambda\psi((1+\varepsilon)\frac{y}{\lambda})$.

Ferner erwähnen wir noch, daß Satz III (mit $m = 0$, $\mu = 0$ und abnehmendem $\varphi(t)$) eine analoge Verallgemeinerung hinsichtlich der Annäherung $w \rightarrow \infty$ für ein kürzlich von Herrn J. Wolff und dem Verfasser gemeinsam bewiesenes Resultat¹⁴⁾ über die Existenz von $\lim_{w \rightarrow \infty} [z(w) - w\lambda]$ liefert.

2. ZUSATZ ZUM SATZ II. Man ersetze die Voraussetzung (a) im Satze II durch die Annahme, daß $g_1^*(v) = g(v) + \delta(v)$, $g_1(v) = g(v) - \delta(v)$ ist, wobei $\delta(v) \geq 0$, stetig und gerade für $|v| \leq a$ ist, mit $|v|$ wächst und, falls $n > 1$ ist, $\lim_{v \rightarrow \infty} \delta(v)v^{-n} \log v = 0$ gilt. Dann gilt in (6) $\lim_{w \rightarrow \infty} \varrho_n(w) = 0$ sogar, wenn $w \rightarrow 0$ in dem Bereich G_ε

¹²⁾ Man kann (34) durch die folgende Bedingung ersetzen: Sei für $v = V$ $h(V) \geq 0$ derart, daß die Halbgerade $u > h(V)$, $v = V$ in D , die Halbgerade $u < -h(V)$, $v = V$ außerhalb D liegt. Ferner sei $\chi(v) = \max_{|v| \leq V} h(V)$. Dann lautet die Bedingung: $\int_1^\infty \chi(v) \frac{dv}{v^2} < \infty$. Es ist leicht zu sehen, daß sie mit (34) äquivalent ist. In der Formulierung von Herrn van der Corput wird D als in $u \geq 0$ gelegen angenommen und diese Bedingung anstelle von (34) verlangt. Auch beim Visserschen Kriterium wird D in $u \geq 0$ angenommen.

¹³⁾ Siehe l. c. ¹⁾, Math. Z., 454—56.

¹⁴⁾ Proceedings Akad. Amsterdam 37 (1934), 145—149.

($0 < \varepsilon < 1$): $g(v) + (1+\varepsilon) \delta((1+\varepsilon)v) \leq u \leq \beta$, $|v| \leq \alpha$, geht, der bei passendem α und β in G liegt.

Beweis. 1. Es gibt eine in $|w| \leq \varrho$ bei passendem $\varrho > 0$ reguläre schlichte Funktion $\omega = \Omega(w)$, $\Omega(0) = 0$, $\Omega'(0) = 1$, $\omega = \sigma + i\tau$, die einen $w = 0$ als inneren Punkt enthaltenden Teil γ des analytischen Bogens $u = g(v)$ auf ein Stück der τ -Achse abbildet. Man darf nun annehmen, daß G in $|w| < \varrho$ liegt. Sonst kann man G durch einen nicht durch $w = 0$ hindurchgehenden Querschnitt so zerlegen, daß das eine Teilgebiet, H , $w = 0$ als einen längs der positiven u -Achse erreichbaren Randpunkt hat und in $|w| < \varrho$ liegt. In $w = 0$ genügt H analogen Voraussetzungen wie G . Hat man dann den Satz für eine Funktion $z = \chi(w)$ bewiesen, die H auf $|z| < 1$ abbildet, so folgt er für $z = \varphi(w)$ daraus, daß in einer Umgebung von $w = 0$: $\chi(w) = \psi(\varphi(w))$ gilt, wo $\psi(\zeta)$ in $\zeta = 0$ regulär und $\psi'(0) \neq 0$ ist.

2. Wir nehmen nun an, G liege in $|w| < \varrho$ und wenden die Abbildung $W = \frac{1}{\Omega(w)}$ ($W = U + iV$) an. Hierdurch wird G in ein Gebiet D der W -Ebene übergeführt, das $W = \infty$ als einen längs der positiven U -Achse erreichbaren Randpunkt hat. Ferner gehen die Kurven l^* : $u = g_1^*(v)$, l : $u = g_1(v)$ und l_ε : $u = g(v) + (1+\varepsilon) \delta((1+\varepsilon)v)$, $|v| \leq a$ in je eine Kurve L^* resp. L resp. $L(\varepsilon)$ durch $W = \infty$ über, von der ein Ast aus $V > 0$, der andere aus $V < 0$ nach $W = \infty$ geht.

Wie man nun unter Benutzung des Hilffsatzes 2 leicht sieht, bleibt für festes η mit $0 < \eta < 1$, außerhalb eines genügend großen Kreises um $W = 0$, jeder der beiden Äste

$$(35) \quad \text{von } L^* \text{ links}^{10) \text{ von } L_1^*: U = (1+\eta) \delta\left((1+\eta) \frac{1}{V}\right) V^2 \equiv \psi(V) \cdot V^2,$$

$$\text{und von } L \text{ rechts}^{10) \text{ von } L_1: U = -\psi(V) V^2, \quad |V| \geq A > 0.$$

Hierbei ist also $\psi(V) \equiv (1+\eta) \delta\left((1+\eta) \frac{1}{V}\right)$ eine für $|V| \geq A$ stetige gerade und mit wachsendem $|V|$ abnehmende Funktion. Offenbar liegt für ein $A_1 \geq A$ der Teil von L_1^* für $|V| \geq A_1$ innerhalb und der von L_1 außerhalb D . Ferner erkennt man, daß bei genügend kleinem η , außerhalb eines genügend großen Kreises um $W = 0$, jeder der beiden Äste von

$$(36) \quad L(\varepsilon) \text{ rechts von } L_{1+\eta}: U = (1+\eta) \psi((1-\eta)V) V^2, \quad |V| \geq A, \\ \text{verläuft. } L_{1+\eta} \text{ liegt rechts von } L_1^*, \text{ und befindet sich für } |V| \geq A_2 \\ \text{bei passendem } A_2 \geq A \text{ in } D.$$

Sei nun η fest gewählt, so daß (35) und (36) erfüllt ist. Bei

hinreichend großem $A^* \geq A$ kann man nun $\psi(V)$ für $|V| \leq A^*$ so abändern bzw. definieren, daß $\psi(V)$ für $|V| > 0$ stetig und gerade ist und mit wachsendem $|V|$ abnimmt, $\psi(V)V^2$ aber auch in $V = 0$ stetig ist, und daß $u = \psi(V)V^2$ innerhalb, $u = -\psi(V)V^2 - \infty < V < \infty$, außerhalb D liegt. Aus dem oben Gesagten erkennt man dann leicht, daß für D die Satz III zugrundeliegende Konfiguration erfüllt ist, indem D den Bereich D_1^* : $u \geq V^2\psi(V)$, $-\infty < V < \infty$, enthält und in D_1 : $u \geq -V^2\psi(V)$ enthalten ist. Ferner bemerken wir, daß der Teil des Bildbereiches von G_ε mittels $W = \frac{1}{\Omega(w)}$, der außerhalb eines hinreichend großen Kreises um $W = 0$ liegt, sicher dem Bereiche $D_{1+\eta}$:

$$U \geq (1+\eta)\psi((1-\eta)V)V^2, \quad -\infty < V < \infty,$$

angehört. Wenn also $w \rightarrow 0$ in G_ε geht, so strebt $W = \frac{1}{\Omega(w)} \rightarrow \infty$

in $D_{1+\eta}$. Schließlich beachte man, daß $\int_1^\infty \psi(V)V^2V^{n-3}dV$ konvergiert.

Bildet man nun $|z| < 1$ durch $z = z(Z)$ auf $\Re Z > 0$ so ab, daß der Punkt $z_1 = \lim_{w \downarrow 0} \varphi(w)$ in $Z = \infty$ übergeht, so gilt für

$W = W(Z) = \frac{1}{\Omega(\varphi(z(Z)))}$ nach Satz III (für $\mu = 2$ und $m = n - 2$)

$$W(Z) = C_0 + CZ + \frac{C_1}{Z} + \dots + \frac{C_m}{Z^m} + \frac{R_m(Z)}{Z^m}$$

mit $\lim_{Z \rightarrow \infty} R_m(Z) = 0$ in $D_{1+\eta}$. Indem man hier von W zu w und von Z zu z übergeht und das über G_ε und $D_{1+\eta}$ Gesagte berücksichtigt, folgt die Behauptung.

(Eingegangen den 8. Juli 1935.)