COMPOSITIO MATHEMATICA

J. G. VAN DER CORPUT

Zur Methode der stationären Phase. Erste Mitteilung Einfache Integrale

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 15-38

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__15_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Zur Methode der stationären Phase

Erste Mitteilung

Einfache Integrale

von

J. G. van der Corput

Groningen

Aus der Theorie der asymptotischen Entwicklungen geht hervor, daß die Integrale

$$\int_a^b g(u)\cos f(u)du,\quad \int_a^b g(u)\sin f(u)du \text{ und } \int_a^b g(u)e^{f(u)}du$$

unter sehr allgemeinen Voraussetzungen Näherungswerte besitzen, die eindeutig bestimmt werden durch das Benehmen der Funktionen $f(u)$ und $g(u)$ in der Umgebung der Endpunkte a und b, und in der Umgebung der Punkte, wo die Phase $f(u)$ stationär, d.h. $f'(u) = 0$ ist. Ich beabsichtige, in einigen Mitteilungen neue allgemeine Sätze über diesen Gegenstand zu veröffentlichen, wobei ich mich nicht auf einfache Integrale beschränken will, sondern auch mehrfache behandeln werde. Für das Verständnis dieser Mitteilungen braucht man keine andern Arbeiten zu kennen. Ich werde die Methode der stationären Phase auf die Theorie der approximativen Funktionalgleichungen und die Theorie der Gitterpunktabschätzungen in mehrdimensionalen Bereichen anwenden, und mittels dieser Methode asymptotische Entwicklungen bekannter Funktionen ableiten auch für diejenigen Werte der Argumente, für die man bis jetzt eine solche Entwicklung noch nicht hat finden können.

Obgleich diese erste Mitteilung, die nur einfache Integrale behandelt, einen viel allgemeineren Satz (nämlich Satz 5) enthält, erwähne ich in dieser Einleitung nur

Satz 1: Voraussetzungen: 1. *Es seien* a, b, k, m, r, η, λ, ω *reell mit*

$$(1)\quad \begin{cases} k \text{ und } m \text{ ganz};\ m > k \geqq 1\ ;\ r > 0\ ;\ \eta > 0\ ;\ b > a + 2\eta\ ; \\ 0 \leqq \lambda < 1\ ;\ \omega \geqq 1. \end{cases}$$

2. *Im Intervall* $a \leqq u \leqq b$ *sei* $f(u)$ *mindestens* m *mal stetig differentiierbar mit*

$$|f^{(\varkappa)}(a)| \leqq \frac{r}{\eta^{\varkappa}} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k-1) \tag{2}$$

und

$$|f^{(k)}(a)| \geqq \frac{\omega^k}{r\eta^k}. \tag{3}$$

Dabei sei $f^{(k)}(a)$ *negativ oder nicht-reell. Ist* $0 < \lambda < 1$, *dann sei*

$$|\arg f^{(k)}(a)| \geqq \frac{1}{r}. \tag{4}$$

3. *Außerdem sei*

$$|f^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{r}{\eta^{\mu}} \quad (a \leqq u \leqq a + 2\eta,\ k+1 \leqq \mu \leqq m), \tag{5}$$

$$(u-a)\,|f'(u)| \geqq \frac{\omega}{r} \qquad (a + \eta \leqq u \leqq b) \tag{6}$$

und

$$|f^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{r\,|f'(u)|^{\mu}}{\omega^{\mu}} \quad (a + \eta \leqq u \leqq b,\ 2 \leqq \mu \leqq m). \tag{7}$$

4. *Im Intervall* $a \leqq u \leqq b$ *sei* $g(u)$ *mindestens* m *mal stetig differentiierbar mit*

$$|g^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{rl(u)}{\eta^{\mu}} \quad (a \leqq u \leqq a + 2\eta,\ 0 \leqq \mu \leqq m) \tag{8}$$

und

$$|g^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{r\,l(u)\cdot|f'(u)|^{\mu}}{\omega^{\mu}} \quad (a + \eta \leqq u \leqq b,\ 0 \leqq \mu \leqq m), \tag{9}$$

wo $l(u)$ *eine im Intervall* $a \leqq u \leqq b$ *stetige Funktion* $\geqq 0$ *bezeichnet.*

Behauptung: *Wird im Intervall* $a \leqq u \leqq b$

$$\chi_0(u) = \frac{g(u)}{(u-a)^{\lambda}}, \qquad \varphi_0(u) = g(u)e^{f(u)} \tag{10}$$

und für $1 \leqq \mu \leqq m$

$$\chi_{\mu}(u) = \chi'_{\mu-1}(u) + (\mu - 1)\,f''(u)\,\chi_{\mu-2}(u), \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_{\mu}(u) &= \varphi'_{\mu-1}(u) - \binom{\mu-1}{k-1} f^{(k)}(u)\varphi_{\mu-k}(u) + \\ &\qquad + \binom{\mu-1}{k} f^{(k+1)}(u)\varphi_{\mu-k-1}(u) \end{aligned}\right. \tag{12}$$

gesetzt (Binomalkoeffizienten $\binom{\mu-1}{h}$ *mit* $h > \mu - 1$ *sind Null, so daß Glieder mit solchen Koeffizienten verschwinden), dann ist*

$$(13)\quad \left| \int_a^b \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda} e^{f(u)}\,du - \frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{\varphi_\mu(a)}{\mu!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1-\lambda}{k}\right)}{\left(-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right)^{\frac{\mu+1-\lambda}{k}}} - e^{f(b)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\mu \chi_\mu(b)}{(f'(b))^{\mu+1}} \right| \leqq \frac{c}{\omega^m} \int_a^b \frac{l(u)}{(u-a)^\lambda} e^{\Re f(u)}\,du,$$

wo das Argument von $-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ *zwischen* $-\pi$ *und* π *gewählt wird, und* c *eine geeignet gewählte, höchstens vom* m *und* r *abhängige Zahl bezeichnet.*

Bemerkung: Wird $\psi_\mu(u)$ $(0 \leqq \mu \leqq m)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ durch

$$\psi_0(u) = g(u),$$

$$\psi_\mu(u) = \psi'_{\mu-1}(u) + \sum_{\varkappa=0}^{k-2} \binom{\mu-1}{\varkappa} f^{(\varkappa+1)}(a)\psi_{\mu-1-\varkappa}(u) + \binom{\mu-1}{k} f^{(k+1)}(u)\psi_{\mu-1-k}(u) \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

definiert, dann ist

$$\varphi_\mu(a) = e^{f(a)}\psi_\mu(a) \qquad (0 \leqq \mu \leqq m).$$

Diese rekurrenten Beziehungen sind oft bequemer als (12), z.B. wenn $k = 1$ ist, und auch wenn die Zahlen $f^{(\varkappa)}(a)$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k-1)$ null oder ungefähr null sind.

Definiert man $G(u)$ durch

$$(14)\qquad G(u) = g(u)e^{f(u) - f(a) - \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(u-a)^k} \qquad (a \leqq u \leqq b),$$

dann gilt auch noch

$$\varphi_\mu(a) = e^{f(a)}G^{(\mu)}(a) \qquad (0 \leqq \mu \leqq m).$$

Wählt man in Satz 1 $f(u) = xF(u) - yu$, wo x und y beliebige Parameter bezeichnen, dann findet man Approximationen für Integrale der Gestalt

$$\int_a^b \frac{g(\mu)}{(u-a)^\lambda} e^{xF(u) - yu}\,du.$$

Alsbald wird in Groningen eine Dissertation von Herrn J. Bijl erscheinen, in der der Verfasser mittels obigen Satzes für eine grosse Anzahl derartiger Integrale asymptotische Entwicklungen ableitet; die 25 Seiten zählende Einleitung seiner Dissertation wird er bald im Nieuw Archief voor Wiskunde veröffentlichen.

Eine wichtige Rolle spielt in dieser Arbeit die
Definition von

$$\int^{u} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^{\lambda}} e^{p(z)}\, dz, \tag{15}$$

wo $p(z)$ und $P(z)$ Polynome bezeichnen, $0 \leqq \lambda < 1$ ist und das Polynom $p(z)$ nicht-konstant vorausgesetzt wird.

Zunächst betrachte ich die Menge der Punkte β in der komplexen z-Ebene, denen ein Nullpunkt α von $(z-\gamma)^{\lambda} p'(z)$ mit

$$\Im p(\alpha) = \Im p(\beta); \qquad \Re p(\alpha) \leqq \Re p(\beta) \tag{16}$$

zugeordnet werden kann, derart daß die Punkte α und β in der z-Ebene durch eine stetige Kurve mit

$$\Im p(z) = \Im p(\beta); \qquad \Re p(\alpha) \leqq \Re p(z) \leqq \Re p(\beta) \tag{17}$$

verbunden werden können.

Die Punkte β mit dieser Eigenschaft bilden eine abgeschlossene Menge, deren Komplementärmenge ich mit $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ bezeichnen werde. $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ ist offen und enthält die Nullpunkte von $p'(z)$ nicht; ist $0 < \lambda < 1$, dann enthält sie γ auch nicht. $\mathfrak{M}(p, \gamma, 0)$ ist unabhängig von γ; ist $p(z)$ linear, dann enthält $\mathfrak{M}(p, \gamma, 0)$ die ganze endliche z-Ebene.

Wenn ich die in (15) angegebene Bezeichnung benutze, nehme ich stets an, daß u der Menge $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ angehört. Bei der Abbildung $w = p(z) - p(u)$ entspricht der negativen reellen Achse in der w-Ebene eine von u ausgehende stetige Bildkurve $\mathfrak{W}_p(u)$ in der z-Ebene. Läge auf $\mathfrak{W}_p(u)$ ein Nullpunkt α von $(z-\gamma)^{\lambda} p'(z)$, dann gälte (16) mit $\beta = u$, und dann wären α und u durch eine stetige Kurve mit (17) verbunden, in Widerspruch mit der Voraussetzung, daß u der Menge $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ angehört. Die Kurve $\mathfrak{W}_p(u)$ enthält also keinen Nullpunkt von $p'(z)$ und ist somit durch das Polynom p und den in $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ liegenden Punkt u eindeutig bestimmt. Außerdem wissen wir, daß γ nicht auf

$\mathfrak{W}_p(u)$ liegt, falls $0 < \lambda < 1$ ist, so daß die Funktion $(z-\gamma)^\lambda$ für jedes z auf $\mathfrak{W}_p(u)$ durch Stetigkeitsbetrachtungen eindeutig bestimmt ist, sobald sie nur in irgend einem Punkte von $\mathfrak{W}_p(u)$ festgelegt ist. Ich setze nun

$$\int^u \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz = -\int_{\mathfrak{W}_p(u)} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz,$$

wo das letzte Integral erstreckt wird über die von u ausgehende Kurve $\mathfrak{W}_p(u)$. Daß dieses Integral existiert, ist evident; denn ist qz^k das Glied höchsten Grades in $p(z)$ mit $q \neq 0$, dann ist auf $\mathfrak{W}_p(u)$ für hinreichend grosses $|z|$

$$\Re p(z) < -\tfrac{1}{2} |q| \cdot |z|^k.$$

Jeder Punkt u von $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ besitzt die Eigenschaft, daß die Punkte v in seiner Umgebung auch zu $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ gehören mit

$$\int_{\mathfrak{W}_p(u)} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz - \int_{\mathfrak{W}_p(v)} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz = \int_u^v \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz,$$

also

$$(18) \quad \int^v \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz - \int^u \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz = \int_u^v \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz.$$

Hieraus geht hervor, daß der in (15) auftretende Ausdruck auf $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ eine differentiierbare Funktion von u ist, und daß die Ableitung den Wert $\dfrac{P(u)}{(u-\gamma)^\lambda} e^{p(u)}$ besitzt, womit die Bezeichnung gerechtfertigt ist.

Wird der Punkt a so gewählt, daß die Punkte u, die auf der durch a gehenden horizontalen Gerade in der Umgebung von a rechts von a liegen, der Menge $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ angehören, dann strebt der in (15) genannte Ausdruck nach einem Grenzwert, wenn u nach a strebt; denn streben u und v mit $u - a > 0$ und $v - a > 0$ nach a, dann strebt die rechte, also auch die linke Seite von (18) nach Null. Ich schreibe dann

$$\int^{a+} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz = \lim_{\substack{u-a>0 \\ u \to a}} \int^u \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)} dz.$$

Analog schreibe ich

$$\int^{a-} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)}dz = \lim_{\substack{u-a<0 \\ u\to a}} \int^{u} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)}dz,$$

wenn die Punkte u, die auf der durch a gehenden horizontalen Geraden in der Umgebung von a links von a liegen, der Menge $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ angehören. Ist a ein Punkt von $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$, dann ist natürlich

$$\int^{a+} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)}dz = \int^{a-} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)}dz = \int^{a} \frac{P(z)}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)}dz.$$

Zur Erläuterung beweise ich den folgenden Satz.

Satz 2: *Ist k ganz $\geqq 1$, μ ganz $\geqq 0$, $0 \leqq \lambda < 1$, a und A beliebig, B positiv oder nicht-reell, und wird*

$$p(z) = A - B(z-a)^k$$

gesetzt, dann enthält $\mathfrak{M}(p, a, \lambda)$ die von a nach rechts ausgehende Halbgerade (den Punkt a selbst nicht mitgerechnet) und hat man

$$\int^{a+} (z-a)^{\mu-\lambda} e^{p(z)}dz = -\frac{e^A}{kB^{\frac{\mu+1-\lambda}{k}}} \Gamma\left(\frac{\mu+1-\lambda}{k}\right),$$

falls man $\arg(z-a)$ in den Punkten mit positivem $z-a$ gleich Null und $\arg B$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ wählt.

Bemerkung: Z.B.

$$\int^{0+} e^{iz^2}dz = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2(-i)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2}\sqrt{\pi};$$

auf dieselbe Weise findet man

$$\int^{0-} e^{iz^2}dz = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2}\sqrt{\pi},$$

so daß diese zwei Grenzwerte nicht übereinstimmen.

Beweis: Es werde $B = Ce^{i\varrho}$ mit $-\pi < \varrho < \pi$ gesetzt. Ist $k = 1$ und $\lambda = 0$, dann enthält $\mathfrak{M}(p, a, \lambda)$ die ganze endliche z-Ebene, also auch die von a nach rechts ausgehende Halbgerade. Sonst ist a der einzige Nullpunkt von $(z-a)^\lambda p'(z)$ und besteht die Komplementärmenge von $\mathfrak{M}(p, a, \lambda)$ aus den Punkten β mit

$$\Im e^{i\varrho}(\beta-a)^k = 0 \text{ und } 0 \leqq -\Re e^{i\varrho}(\beta-a)^k,$$

d.h. mit

$$\arg(\beta - a) = \frac{(2h+1)\pi - \varrho}{k} \qquad (h \text{ ganz}, \ 0 \leqq h \leqq k-1).$$

Wegen $-\pi < \varrho < \pi$ enthält diese Komplementärmenge die Punkte z mit positivem $z - a$ nicht, so daß die von a nach rechts ausgehende Halbgerade der Menge $\mathfrak{M}(p, a, \lambda)$ angehört.

Ist $u - a$ positiv, und strebt u nach a, dann geht $\mathfrak{W}_p(u)$ über in die Halbgerade, die a mit $a + \infty e^{-\frac{i\varrho}{k}}$ verbindet, also

$$\begin{aligned}\int^{a+} (z-a)^{\mu-\lambda} e^{p(z)} dz &= -\int_a^{a+\infty e^{-i\varrho/k}} (z-a)^{\mu-\lambda} e^{A - Ce^{i\varrho}(z-a)^k} dz \\ &= -e^{-\frac{i(\mu+1-\lambda)\varrho}{k}} \int_0^\infty s^{\mu-\lambda} e^{A - Cs^k} ds \\ &= -\frac{e^{A - \frac{i(\mu+1-\lambda)\varrho}{k}}}{kC^{\frac{\mu+1-\lambda}{k}}} \Gamma\left(\frac{\mu+1-\lambda}{k}\right) \\ &= -\frac{e^A}{kB^{\frac{\mu+1-\lambda}{k}}} \Gamma\left(\frac{\mu+1-\lambda}{k}\right).\end{aligned}$$

Satz 3: *Es sei a reell, b reell mit $b > a$, γ eine beliebige nicht zwischen a und b liegende Zahl, k und m ganz $\geqq 1$, $\xi > 0$, $0 \leqq \lambda < 1$, und es bezeichne $p(u)$ ein Polynom k^{ten} Grades in u mit der Eigenschaft, daß jedes u zwischen a und b der Menge $\mathfrak{M}(p, \gamma, \lambda)$ angehört, und der Ungleichung*

$$\text{(19)} \qquad \operatorname*{Max}_{1 \leqq \varkappa \leqq k} \sqrt[\varkappa]{|p^{(\varkappa)}(u)|} \geqq \frac{1}{\xi}$$

genügt.

Ist $0 < \lambda < 1$, dann setze ich außerdem voraus, daß bei geeignet gewähltem positivem r_1 für jedes u zwischen a und b der Weg $\mathfrak{W}_p(u)$ ganz außerhalb des Kreises

$$\text{(20)} \qquad |z - \gamma| < \frac{1}{r_1} |u - \gamma|$$

liegt; ist $\lambda = 0$, dann setze ich $r_1 = 1$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt für jede im Intervall $a \leqq u \leqq b$ mindestens m mal stetig differentiierbare Funktion $H(u)$ die Ungleichung

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \int_a^b \frac{H(u)}{(u-\gamma)^\lambda} e^{p(u)}du - \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{H^{(\mu)}(b)}{\mu!} \int^{b-} \frac{(z-b)^\mu}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)}dz + \right. \\ &\left. + \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{H^{(\mu)}(a)}{\mu!} \int^{a+} \frac{(z-a)^\mu}{(z-\gamma)^\lambda} e^{p(z)}dz \right| \leqq c_1^m r_1^\lambda \xi^m \int_a^b \left| \frac{H^{(m)}(u)e^{p(u)}}{(u-\gamma)^\lambda} \right| du, \end{aligned} \right.$$

wo c_1 (desgl. $c_2, \ldots c_7$ nachher) *eine geeignet gewählte positive höchstens von* k *abhängige Zahl bezeichnet.*

Beweis.

Erster Schritt: Liegt u zwischen a und b, und ist z irgend ein nicht mit u zusammenfallender Punkt von $\mathfrak{W}_p(u)$, dann liegen auf $\mathfrak{W}_p(u)$ zwischen u und z (u excl., z incl.) k Punkte $u_\varkappa$ ($1 \leqq \varkappa \leqq k$), die, falls $u = u_0$ gesetzt wird, den Ungleichungen

$$|u_\varrho - u_\sigma| \geqq c_2 \widehat{uz} \qquad (0 \leqq \varrho \leqq k,\ 0 \leqq \sigma \leqq k,\ \varrho \neq \sigma)$$

genügen, wo $\widehat{uz}$ die Bogenlänge von $\mathfrak{W}_p(u)$ zwischen u und z bezeichnet.

Beweis: Da $\mathfrak{W}_p(u)$ eine stetige Kurve k^{ten} Grades ist, hat der Winkel α, den eine beliebige Tangente von $\mathfrak{W}_p(u)$ mit der positiven Achse bildet, eine totale Variation $\leqq \frac{1}{4}c_3\pi$.[1]) Die Kurve $\mathfrak{W}_p(u)$ ist also durch $c_3 - 1$ Teilpunkte in Stücke zerlegbar, derart daß auf jedem dieser Stücke die totale Variation von α höchstens $\frac{\pi}{4}$ ist. Auf $\mathfrak{W}_p(u)$ liegen zwischen u und z höchstens $c_3 - 1$ dieser Teilpunkte, so daß der Bogen dieser Kurve zwischen u und z wenigstens ein Stück der Länge $\geqq \frac{1}{c_3}\widehat{uz}$ enthält, auf dem die totale Variation von α höchstens $\frac{\pi}{4}$ ist. Die Endpunkte dieses Stückes nenne ich t_0 und t_k, und ich zerlege dieses Stück durch die Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ in k Teile derselben Länge, so daß

$$(22)\qquad \widehat{t_\varkappa t_{\varkappa+1}} = \frac{1}{k}\widehat{t_0 t_k} \geqq \frac{1}{kc_3}\widehat{uz}$$

ist.

Ich wähle in der komplexen z-Ebene ein rechtwinkliges Achsensystem XOY derart, daß die Tangente von $\mathfrak{W}_p(u)$ in t_0 mit der

---

[1]) Denn ist die Kurve $\mathfrak{W}_p(u)$ nicht eine Gerade, und besitzt sie C_1 Wendepunkte, C_2 Punkte mit horizontaler Tangente und C_3 Punkte mit vertikaler Tangente, dann ist $c_3 \leqq 2(C_1+C_2+C_3)$.

positiven X-Achse einen Winkel $= \frac{\pi}{4}$ bildet. Die totale Variation des Winkels α ist zwischen t_0 und t_k höchstens $\frac{\pi}{4}$, so daß dort $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ ist. Durchläuft somit ein Punkt (X, Y) die Kurve $\mathfrak{W}_p(u)$ von t_0 nach t_k, dann ist $dX \geqq 0$, und $dY \geqq 0$, und gilt für die Bogenlänge s die Ungleichung

$$ds = \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2} \leqq dX + dY.$$

Für $1 \leqq \varrho < \sigma \leqq k$ ist also

$$\widehat{t_\varrho t_\sigma} \leqq (X_{t_\sigma} - X_{t_\varrho}) + (Y_{t_\sigma} - Y_{t_\varrho}) \leqq \sqrt{2}\,\sqrt{(X_{t_\sigma} - X_{t_\varrho})^2 + (Y_{t_\sigma} - Y_{t_\varrho})^2}$$
$$= \sqrt{2}\,|\,t_\sigma - t_\varrho\,|,$$

so daß aus (22) folgt

$$|\,t_\sigma - t_\varrho\,| \geqq \frac{1}{kc_3\sqrt{2}}\,\widehat{uz}, \tag{23}$$

und diese Ungleichung gilt dann für jedes Zahlenpaar (ϱ, σ) mit $1 \leqq \varrho \leqq k$, $1 \leqq \sigma \leqq k$, $\varrho \neq \sigma$.

Für die Punkte $t_\varkappa$ $(0 \leqq \varkappa \leqq k)$ bis auf höchstens einen ist

$$|\,t_\varkappa - u_0\,| \geqq \frac{1}{2kc_3\sqrt{2}}\,\widehat{uz}\;;$$

denn sonst gäbe es zwei Zahlen ϱ und σ mit

$$1 \leqq \varrho \leqq k,\quad 1 \leqq \sigma \leqq k,\quad \varrho \neq \sigma,$$

$$|\,t_\varrho - u_0\,| < \frac{1}{2kc_3\sqrt{2}}\,\widehat{uz} \quad \text{und} \quad |\,t_\sigma - u_0\,| < \frac{1}{2kc_3\sqrt{2}}\,\widehat{uz},$$

also

$$|\,t_\sigma - t_\varrho\,| < \frac{1}{kc_3\sqrt{2}}\,\widehat{uz}\;,$$

in Widerspruch mit (23). Im System $t_0, t_1, \ldots, t_k$ kommen somit k verschiedene Punkte $u_1, u_2, \ldots, u_k$ mit

$$|\,u_k - u_0\,| \geqq \frac{1}{2kc_3\sqrt{2}}\,\widehat{uz} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k)$$

vor, und wegen (23) ist

$$|\,u_\sigma - u_\varrho\,| \geqq \frac{1}{kc_3\sqrt{2}}\,\widehat{uz} \qquad (1 \leqq \varrho \leqq k,\ 1 \leqq \sigma \leqq k,\ \varrho \neq \sigma),$$

so daß die Behauptung des ersten Schrittes mit $c_2 = \dfrac{1}{2kc_3\sqrt{2}}$ gilt.

Zweiter Schritt: Liegt u zwischen a und b, und ist z irgend ein Punkt auf $\mathfrak{W}_p(u)$, dann ist

$$p(u) - p(z) \geqq c_4\left(\frac{\widehat{uz}}{\xi} - 1\right). \tag{24}$$

Beweis: Die linke Seite von (24) ist auf $\mathfrak{W}_p(u)$ eine monoton zunehmende Funktion von z, die im Punkte $z = u$ verschwindet, also stets $\geqq 0$ ist. Ich darf also $\widehat{uz} \geqq \xi$ annehmen, da sonst die Behauptung des zweiten Schrittes evident ist. Wegen (19) kann man eine (von u abhängige) Zahl $\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ mit

$$\sqrt[\varkappa]{|\,p^{(\varkappa)}(u)\,|} \geqq \frac{1}{\xi} \tag{25}$$

bestimmen. Auf $\mathfrak{W}_p(u)$ wähle ich zwischen u und z die Punkte $u_1, u_2, \ldots, u_k$ mit der im ersten Schritt genannten Eigenschaft. Dann ist für $1 \leqq \sigma \leqq k$

$$p(u) - p(u_\sigma) = -\sum_{\tau=1}^{k} \frac{(u_\sigma - u)^\tau}{\tau!}\, p^{(\tau)}(u),$$

also

$$\frac{p^{(\varkappa)}(u)}{\varkappa!} = -\sum_{\sigma=1}^{k} \frac{\Delta_\sigma}{\Delta} \cdot (p(u) - p(u_\sigma)), \tag{26}$$

wo Δ die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 - u & (u_1 - u)^2 & \ldots & (u_1 - u)^k \\ u_2 - u & (u_2 - u)^2 & \ldots & (u_2 - u)^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_k - u & (u_k - u)^2 & \ldots & (u_k - u)^k \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqq \varrho < \sigma \leqq k} (u_\sigma - u_\varrho)$$

und Δ_σ den Minor von $(u_\sigma - u)^\varkappa$ in Δ bezeichnet.

Nach dem ersten Schritt ist

$$|\Delta| \geqq c_5 (\widehat{uz})^{1+2+\ldots+k};$$

für $1 \leqq \varkappa \leqq k$ ist

$$|\,u_\varkappa - u\,| \leqq \widehat{uu_\varkappa} \leqq \widehat{uz},$$

also

$$|\,\Delta_\sigma\,| \leqq c_6\,(\widehat{uz})^{1+2+\ldots+(\varkappa-1)+(\varkappa+1)+\ldots+k} \qquad (1 \leqq \sigma \leqq k),$$

somit

$$\left|\frac{\Delta_\sigma}{\Delta}\right| \leqq \frac{c_7}{(\widehat{uz})^\varkappa} \qquad (1 \leqq \sigma \leqq k). \tag{27}$$

Wegen der Monotonie von $p(u) - p(z)$ ist

$$0 \leqq p(u) - p(u_\sigma) \leqq p(u) - p(z) \qquad (1 \leqq \sigma \leqq k). \tag{28}$$

Aus (25), (26), (27) und (28) folgt

$$\frac{1}{\varkappa!\,\xi^\varkappa} \leqq \frac{|\,p^{(\varkappa)}(u)\,|}{\varkappa!} \leqq \frac{kc_7}{(\widehat{uz})^\varkappa}\,(p(u) - p(z))\,,$$

also

$$p(u) - p(z) \geqq c_4\left(\frac{\widehat{uz}}{\xi}\right)^\varkappa \geqq c_4\frac{\widehat{uz}}{\xi}$$

wegen $\widehat{uz} \geqq \xi$. Hiermit ist (24) bewiesen.

Dritter Schritt: Schluß des Beweises. Im Intervall $a < u < b$ setze ich

$$\psi_0(u) = \frac{e^{p(u)}}{(u-\gamma)^\lambda}\,,\ \psi_{\mu+1}(u) = -\frac{1}{\mu!}\int^u \frac{(z-u)^\mu}{(z-\gamma)^\lambda}e^{p(z)}dz \qquad (\mu \geqq 0), \tag{29}$$

so daß

$$\psi_1'(u) = -\frac{e^{p(u)}}{(u-\gamma)^\lambda} = -\psi_0(u) \tag{30}$$

ist. Für $\mu \geqq 1$ ist

$$\psi'_{\mu+1}(u) = -\frac{1}{\mu!}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int^{u+h}\frac{(z-u-h)^\mu}{(z-\gamma)^\lambda}e^{p(z)}dz - \int^u\frac{(z-u)^\mu}{(z-\gamma)^\lambda}e^{p(z)}\,dz\right\}$$

$$= -\frac{1}{\mu!}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_u^{u+h}\frac{(z-u-h)^\mu}{(z-\gamma)^\lambda}e^{p(z)}dz - \frac{1}{\mu!}\lim_{h\to 0}\int^u\frac{(z-u-h)^\mu-(z-u)^\mu}{h}\cdot\frac{e^{p(z)}}{(z-\gamma)^\lambda}dz$$

$$= 0 + \frac{1}{(\mu-1)!}\int^u\frac{(z-u)^{\mu-1}}{(z-\gamma)^\lambda}e^{p(z)}dz = -\psi_\mu(u),$$

so daß wegen (30) für $\mu \geqq 0$

$$\psi'_{\mu+1}(u) = -\psi_\mu(u)$$

ist. Für $0 \leqq \mu \leqq m-1$ ist somit

$$\int_a^b H^{(\mu+1)}(u)\psi_{\mu+1}(u)du - \int_a^b H^{(\mu)}(u)\psi_\mu(u)du = \int_a^b dH^{(\mu)}(u)\psi_{\mu+1}(u)$$

$$= H^{(\mu)}(b)\,\psi_{\mu+1}(b-) - H^{(\mu)}(a)\,\psi_{\mu+1}(a+),$$

woraus durch Summation über $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$ folgt

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^b \frac{H(u)}{(u-\gamma)^\lambda} e^{p(u)} du + \sum_{\mu=0}^{m-1} H^{(\mu)}(b)\, \psi_{\mu+1}(b-) \\ &\qquad - \sum_{\mu=0}^{m-1} H^{(\mu)}(a)\, \psi_{\mu+1}(a+) = \int_a^b H^{(m)}(u)\, \psi_m(u) du. \end{aligned} \right.$$

Nach dem zweiten Schritt ist für jeden Punkt z auf $\mathfrak{W}_p(u)$

$$p(z) - p(u) \leqq -c_4 \left(\frac{s}{\xi} - 1 \right),$$

wo s die Bogenlänge von $\mathfrak{W}_p(u)$ zwischen u und z bezeichnet, also

$$(32)\qquad |e^{p(z)}| \leqq e^{\Re p(u) - \frac{c_4 s}{\xi} + c_4}.$$

Ist $0 < \lambda < 1$, dann liegt der Weg $\mathfrak{W}_p(u)$ ganz außerhalb des in (20) genannten Kreises, so daß dann für jedes z auf $\mathfrak{W}_p(u)$

$$(33)\qquad |z-\gamma|^\lambda \geqq \frac{1}{r_1^\lambda} |u-\gamma|^\lambda$$

ist; ist $\lambda = 0$, dann ist $r_1 = 1$, so daß Ungleichung (33) auch dann gilt.

Aus (29) (mit $\mu = m-1$ angewendet), (32), (33) und $|z-u| \leqq s$ folgt

$$|\psi_m(u)| \leqq \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{r_1^\lambda}{|u-\gamma|^\lambda} \int_0^\infty s^{m-1} e^{\Re p(u) - \frac{c_4 s}{\xi} + c_4}\, ds =$$

$$= \frac{r_1^\lambda}{|u-\gamma|^\lambda} \cdot e^{\Re p(u) + c_4} \cdot \left(\frac{\xi}{c_4} \right)^m \leqq c_1^m \xi^m r_1^\lambda \frac{e^{\Re p(u)}}{|u-\gamma|^\lambda},$$

falls $c_1 = \dfrac{e^{c_4}}{c_4}$ gesetzt wird. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (31) und (29) die Behauptung von Satz 3.

Satz 4: *Es sei $a < b$, $r_2 > 0$, $\omega \geqq 1$, m ganz $\geqq 0$; im Intervall $a \leqq u \leqq b$ seien $f(u)$ und $g(u)$ mindestens m mal stetig differentiierbar mit $f'(u) \neq 0$,*

$$(34)\qquad |f^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{r_2 |f'(u)|^\mu}{\omega^\mu} \qquad (2 \leqq \mu \leqq m)$$

und

$$(35)\qquad |g^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{r_2 l(u) |f'(u)|^\mu}{\omega^\mu} \qquad (0 \leqq \mu \leqq m),$$

wo $l(u)$ eine im Intervalle $a \leqq u \leqq b$ stetige Funktion $\geqq 0$ bezeichnet.

Wird dann im Intervall $a \leqq u \leqq b$

$$\chi_0(u) = g(u);\quad \chi_\mu(u) = \chi'_{\mu-1}(u) + (\mu - 1)f''(u)\chi_{\mu-2}(u) \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{36}$$

gesetzt, dann ist

$$\left| \int_a^b g(u)e^{f(u)}du - e^{f(b)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\mu \chi_\mu(b)}{(f'(b))^{\mu+1}} + e^{f(a)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\mu \chi_\mu(a)}{(f'(a))^{\mu+1}} \right| \leqq \frac{c_8}{\omega^m} \int_a^b l(u)e^{\Re f(u)}du, \tag{37}$$

wo c_8 eine geeignet gewählte, höchstens von r_2 und m abhängige Zahl bezeichnet.

Beweis: Ich zeige zunächst, daß bei geeignet gewähltem, höchstens von r_2, μ und λ abhängigem $C(\mu, \lambda)$

$$|\chi_\mu^{(\lambda)}(u)| \leqq C(\mu, \lambda) \cdot \frac{l(u) \cdot |f'(u)|^{\mu+\lambda}}{\omega^{\mu+\lambda}} \qquad (a \leqq u \leqq b,\ \mu \geqq 0,\ \lambda \geqq 0,\ \mu + \lambda \leqq m) \tag{38}$$

ist. Diese Ungleichung ist für $\mu = 0$ wegen (36) und (35) mit $C(0, \lambda) = r_2$ evident, so daß ich $\mu \geqq 1$, also $m \geqq 1$ voraussetzen und annehmen darf, daß (38) schon bewiesen ist, wenn μ durch eine kleinere Zahl ersetzt wird. Aus (36), wo das Schlußglied mit dem Faktor $\mu - 1$ nur auftritt, wenn $\mu \geqq 2$ ist, folgt für $\mu \geqq 1$, $\lambda \geqq 1$, $\mu + \lambda \leqq m$

$$\chi_\mu^{(\lambda)}(u) = \chi_{\mu-1}^{(\lambda+1)}(u) + (\mu - 1) \sum_{\varrho=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\varrho} f^{(\lambda-\varrho+2)}(u)\chi_{\mu-2}^{(\varrho)}(u);$$

ich wende nun (38) an, zunächst mit $\mu - 1$ statt μ, und außerdem, falls $\mu \geqq 2$, also $m \geqq 2$ ist, mit $\mu - 2$ statt μ, und das Resultat ist dann wegen (34)

$$|\chi_\mu^{(\lambda)}(u)| \leqq \frac{l(u) \cdot |f'(u)|^{\mu+\lambda}}{\omega^{\mu+\lambda}} \left\{ C(\mu - 1,\ \lambda + 1) + (\mu - 1)r_2 \sum_{\varrho=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\varrho} C(\mu - 2, \varrho) \right\},$$

woraus (38) bei geeignetem $C(\mu, \lambda)$ folgt.

Man hat

$$\frac{d}{du}\, e^{f(u)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\mu \chi_\mu(u)}{(f'(u))^{\mu+1}} =$$

$$= e^{f(u)} \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^\mu \left\{ \frac{\chi_\mu(u)}{(f'(u))^\mu} + \frac{\chi'_\mu(u)}{(f'(u))^{\mu+1}} - (\mu+1) \frac{\chi_\mu(u) f''(u)}{(f'(u))^{\mu+2}} \right\}$$

$$= e^{f(u)} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{(-1)^\mu}{(f'(u))^\mu} \{\chi_\mu(u) - \chi'_{\mu-1}(u) - (\mu-1)\chi_{\mu-2}(u) f''(u)\}$$

$$+ e^{f(u)} \left\{ \chi_0(u) + \frac{(-1)^{m-1}\chi_m(u)}{(f'(u))^m} + \frac{(-1)^m m \chi_{m-1}(u) f''(u)}{(f'(u))^{m+1}} \right\}$$

$$= e^{f(u)} \left\{ g(u) + \frac{(-1)^{m-1}\chi_m(u)}{(f'(u))^m} + \frac{(-1)^m m \chi_{m-1}(u) f''(u)}{(f'(u))^{m+1}} \right\}$$

wegen (36). Hieraus folgt

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^\mu \frac{e^{f(u)}\chi_\mu(u)}{(f'(u))^{\mu+1}} \Bigg|_a^b = \int_a^b e^{f(u)} g(u) du + \\ &+ (-1)^{m-1} \int_a^b \frac{e^{f(u)}\chi_m(u)}{(f'(u))^m} du + (-1)^m m \int_a^b \frac{e^{f(u)}\chi_{m-1}(u) f''(u)}{(f'(u))^{m+1}} du, \end{aligned} \right.$$

und hierin ist wegen (38) (mit $\lambda = 0$, und mit $\mu = m$, bzw. $m-1$ angewendet) und (34) (mit $\mu = 2$ angewendet)

$$(40) \qquad \left| \int_a^b \frac{e^{f(u)}\chi_m(u)}{(f'(u))^m} du \right| \leqq \frac{C(m,0)}{\omega^m} \int_a^b e^{\Re f(u)} l(u) du$$

und

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{e^{f(u)}\chi_{m-1}(u) f''(u)}{(f'(u))^{m+1}} du \right| &\leqq \frac{C(m-1,0)\cdot r_2}{\omega^{m+1}} \int_a^b e^{\Re f(u)} l(u) du \\ &\leqq \frac{C(m-1,0)\cdot r_2}{\omega^m} \int_a^b e^{\Re f(u)}\, l(u) du \end{aligned} \right.$$

wegen $\omega \geqq 1$. Aus (39), (40) und (41) folgt die Behauptung.

Satz 5: Voraussetzungen: 1. *Es seien* a, b, k, m, r_3, η, λ *und* ω *reell mit*

k *und* m *ganz* $\geqq 1$, $r_3 > 0$, $\eta > 0$, $b > a + 2\eta$, $0 \leqq \lambda < 1$, $\omega \geqq 1$.

2. *Im Intervall* $a \leqq u \leqq b$ *sei* $f(u)$ *mindestens* m *mal stetig differentiierbar mit*

$$(u-a)\,|f'(u)| \geqq \frac{\omega}{r_3} \quad (a+\eta \leqq u \leqq b) \tag{42}$$ [1]

und

$$|f^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{r_3\,|f'(u)|^\mu}{\omega^\mu} \quad (a+\eta \leqq u \leqq b,\ 2 \leqq \mu \leqq m). \tag{43}$$

3. *Es bezeichne* $p(u)$ *ein Polynom* k^{ten} *Grades in* u *mit*

$$|f^{(\mu)}(u) - p^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{r_3}{\eta^\mu} \quad (a \leqq u \leqq a+2\eta,\ 0 \leqq \mu \leqq m). \tag{44}$$

Jeder Punkt u *zwischen* a *und* $a+2\eta$ *gehöre der Menge* $\mathfrak{M}(p, a, \lambda)$ *an und genüge der Ungleichung*

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqq \varkappa \leqq k} \sqrt[\varkappa]{|p^{(\varkappa)}(u)|} \geqq \frac{\omega}{r_3\eta}\,. \tag{45}$$

Ist $0 < \lambda < 1$, *dann liege für jedes* u *zwischen* a *und* $a+2\eta$ *der Weg* $\mathfrak{W}_p(u)$ *ganz außerhalb des Kreises*

$$|z-a| < \frac{1}{r_3}\,|u-a|. \tag{46}$$

4. *Im Intervall* $a \leqq u \leqq b$ *sei* $g(u)$ *mindestens* m *mal stetig differentiierbar mit*

$$|g^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{r_3\,l(u)}{\eta^\mu} \qquad (a \leqq u \leqq a+2\eta,\ 0 \leqq \mu \leqq m) \tag{47}$$

und

$$|g^{(\mu)}(u)| \leqq \frac{r_3 l(u)\,|f'(u)|^\mu}{\omega^\mu} \quad (a+\eta \leqq u \leqq b,\ 0 \leqq \mu \leqq m), \tag{48}$$

wo $l(u)$ *eine im Intervall* $a \leqq u \leqq b$ *stetige Funktion* $\geqq 0$ *bezeichnet.*

Behauptung: *Wird dann im Intervall* $a \leqq u \leqq b$

$$G(u) = g(u)e^{f(u)-p(u)} \tag{49}$$

---

[1]) Ist $\lambda = 0$, dann darf (42) durch die weniger fordernde Bedingung

$$2\eta\,|f'(u)| \geqq \frac{\omega}{r_2} \qquad (a+\eta \leqq u \leqq a+2\eta)$$

ersetzt werden.

und

$$(50)\quad \chi_0(u) = \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda};\quad \chi_\mu(u) = \chi'_{\mu-1}(u) + (\mu-1)f''(u)\chi_{\mu-2}(u) \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

gesetzt, dann ist

$$(51)\quad \left| \int_a^b \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda} e^{f(u)}du - e^{f(b)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\mu \chi_\mu(b)}{(f'(b))^{\mu+1}} + \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{G^{(\mu)}(a)}{\mu!} \int^{a+} (z-a)^{\mu-\lambda} e^{p(z)}dz \right| \leqq \frac{c_9}{\omega^m} \int_a^b \frac{l(u)}{(u-a)^\lambda} e^{\Re f(u)}du,$$

wo c_9 (desgl. $c_{10}, \ldots, c_{18}$ nachher) *eine geeignet gewählte, höchstens von* r_3, k *und* m *abhängige Zahl bezeichnet.*

Beweis.

Erster Schritt:

Wird

$$(52)\quad N(v) = \frac{\int_v^1 e^{\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w}} dw}{\int_0^1 e^{\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w}} dw} \qquad (0 \leqq v \leqq 1),$$

$$(53)\quad H(u) = G(u) \qquad (a \leqq u \leqq a+\eta),$$

$$(54)\quad = G(u)\, N\left(\frac{u-a-\eta}{\eta}\right) \qquad (a+\eta < u \leqq a+2\eta),$$

$$(55)\quad L(u) = \left(1 - N\left(\frac{u-a-\eta}{\eta}\right)\right) \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda} \qquad (a+\eta \leqq u \leqq a+2\eta),$$

$$(56)\quad = \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda} \qquad (a+2\eta < u \leqq b)$$

gesetzt, dann ist

$$\int_a^b \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda} e^{f(u)}du = \int_a^{a+2\eta} \frac{H(u)}{(u-a)^\lambda} e^{p(u)}du + \int_{a+\eta}^b L(u)\, e^{f(u)}du,$$

so daß es genügt zu zeigen

$$(57)\quad \left| \int_a^{a+2\eta} \frac{H(u)}{(u-a)^\lambda} e^{p(u)}du + \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{G^{(\mu)}(a)}{\mu!} \int^{a+} (z-a)^{\mu-\lambda} e^{p(z)}dz \right| \leqq \frac{c_{10}}{\omega^m} \int_a^{a+2\eta} \frac{l(u)}{(u-a)^\lambda} e^{\Re f(u)}du$$

und

$$(58)\quad \left| \int_{a+\eta}^{b} L(u)e^{f(u)}du - e^{f(b)}\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{(-1)^{\mu}\chi_{\mu}(b)}{(f'(b))^{\mu+1}} \right| \leqq \frac{c_{11}}{\omega^m}\int_{a+\eta}^{b}\frac{l(u)}{(u-a)^{\lambda}}e^{\Re f(u)}du.$$

Zweiter Schritt. Beweis von (57). Die Funktion $N\left(\frac{u-a-\eta}{\eta}\right)$ hat im Punkte $u = a + \eta$ den Wert 1, und ihre sämtlichen Derivierten verschwinden dort; außerdem ist $G(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq a + 2\eta$ mindestens m mal stetig differentiierbar. Hieraus geht hervor, daß die in (53) und (54) definierte Funktion $H(u)$ in diesem Intervall mindestens m mal stetig differentiierbar ist.

Die Voraussetzungen von Satz 3 sind hier erfüllt, wenn in Satz 3 b durch $a + 2\eta$, γ durch a, ξ durch $\frac{r_3\eta}{\omega}$ und r_1 durch r_3 oder 1 (je nachdem $\lambda > 0$ oder $= 0$ ist) ersetzt werden; denn (19) folgt dann aus (45), und falls $0 < \lambda < 1$ ist, liegt für jedes u zwischen a und $a + 2\eta$ der Weg $\mathfrak{W}_p(u)$ ganz außerhalb des Kreises $|z-a| < \frac{1}{r_3}|u-a|$. Ich darf also hier Satz 3 anwenden. Da die Funktion $N\left(\frac{u-a-\eta}{\eta}\right)$ im Punkt $u = a + 2\eta$ mit ihren sämtlichen Derivierten verschwindet, ist

$$H^{(\mu)}(a + 2\eta) = 0 \qquad (0 \leqq \mu \leqq m),$$

und wegen (53) ist

$$H^{(\mu)}(a) = G^{(\mu)}(a) \qquad (0 \leqq \mu \leqq m);$$

dabei ist $c_1^m r_1^{\lambda} r_3^m \leqq c_{12}$, so daß Satz 3 hier liefert

$$(59)\quad \left| \int_{a}^{a+2\eta}\frac{H(u)}{(u-a)^{\lambda}}e^{p(u)}du + \sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{G^{(\mu)}(a)}{\mu!}\int^{a+}(z-a)^{\mu-\lambda}e^{p(z)}dz \right| \leqq \frac{c_{12}\eta^m}{\omega^m}\int_{a}^{a+2\eta}\left|\frac{H^{(m)}(u)e^{p(u)}}{(u-a)^{\lambda}}\right|du.$$

Ich behaupte, daß jedem μ $(0 \leqq \mu \leqq m)$ ein höchstens von μ und r_3 anhängiges C_μ mit

$$(60)\qquad \left|\frac{d^{\mu}e^{f(u)-p(u)}}{du^{\mu}}\right| \leqq \frac{C_{\mu}}{\eta^{\mu}} \qquad (a \leqq u \leqq a + 2\eta,\ 0 \leqq \mu \leqq m)$$

zugeordnet werden kann; denn der Spezialfall dieser Ungleichung mit $\mu = 0$ folgt aus (44) (mit $\mu = 0$ angewendet), wenn nur $C_0 = e^{r_3}$ gewählt wird, so daß ich $\mu \geqq 1$ voraussetzen und annehmen darf, daß (60) schon bewiesen ist, wenn μ durch σ $(0 \leqq \sigma \leqq \mu - 1)$ ersetzt wird; aus

$$\frac{d e^{f(u)-p(u)}}{du} = e^{f(u)-p(u)}\,(f'(u) - p'(u))$$

folgt dann für $1 \leqq \mu \leqq m$

$$\left|\frac{d^\mu e^{f(u)-p(u)}}{du^\mu}\right| = \left|\sum_{\sigma=0}^{\mu-1}\binom{\mu-1}{\sigma}\frac{d^\sigma e^{f(u)-p(u)}}{du^\sigma}\cdot(f^{(\mu-\sigma)}(u) - p^{(\mu-\sigma)}(u))\right|$$

$$\leqq \sum_{\sigma=0}^{\mu-1}\binom{\mu-1}{\sigma}\cdot\frac{C_\sigma}{\eta^\sigma}\cdot\frac{r_3}{\eta^{\mu-\sigma}}$$

wegen (44), womit (60) bewiesen ist.

Aus (49), (47) und (60) folgt im Intervall $a \leqq u \leqq a + \eta$ für $\mu = 0, 1, \ldots, m$

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{l} |G^{(\mu)}(u)| = \left|\displaystyle\sum_{\sigma=0}^{\mu}\binom{\mu}{\sigma}g^{(\sigma)}(u)\frac{d^{\mu-\sigma}e^{f(u)-p(u)}}{du^{\mu-\sigma}}\right| \\ \qquad\qquad \leqq \displaystyle\sum_{\sigma=0}^{\mu}\binom{\mu}{\sigma}\frac{r_3 l(u)}{\eta^\sigma}\frac{C_{\mu-\sigma}}{\eta^{\mu-\sigma}} \leqq \frac{c_{13}l(u)}{\eta^\mu}. \end{array}\right.$$

Wegen (54), (61) und

$$(62)\qquad |N^{(\mu)}(v)| \leqq c_{14} \quad (0 \leqq v \leqq 1,\ 0 \leqq \mu \leqq m)$$

ist im Intervall $a + \eta < u \leqq a + 2\eta$

$$|H^{(m)}(u)| = \left|\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}G^{(\mu)}(u)\frac{1}{\eta^{m-\mu}}N^{(m-\mu)}\left(\frac{u-a-\eta}{\eta}\right)\right|$$

$$\leqq \sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\frac{c_{13}l(u)}{\eta^\mu}\frac{1}{\eta^{m-\mu}}c_{14} = \frac{c_{15}l(u)}{\eta^m},$$

und diese Ungleichung gilt wegen (53) und (61) auch im Intervall $a \leqq u \leqq a + \eta$, wenn $c_{15} \geqq c_{13}$ gewählt wird. Formel (44) (mit $\mu = 0$ angewendet) gibt

$$\Re p(u) \leqq \Re f(u) + r_3,$$

somit

$$\int_a^{a+2\eta} \left| \frac{H^{(m)}(u)e^{p(u)}}{(u-a)^\lambda} \right| du \leqq \frac{c_{15}e^{r_3}}{\eta^m} \int_a^{a+2\eta} \frac{l(u)e^{\Re f(u)}}{(u-a)^\lambda} du.$$

Aus dieser Ungleichung und (59) folgt (57).

Dritter Schritt: Beweis von (58).

Ist $0 < \lambda < 1$, dann darf (42) angewendet werden, so daß dann im Intervall $a + \eta \leqq u \leqq b$ für $0 \leqq \mu \leqq m$

$$\left| \frac{d^\mu \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda}}{du^\mu} \right| = \left| \sum_{\sigma=0}^{\mu} (-1)^\sigma \binom{\mu}{\sigma} g^{(\mu-\sigma)}(u) \frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+\sigma-1)}{(u-a)^{\lambda+\sigma}} \right|$$

$$\leqq \sum_{\sigma=0}^{\mu} \binom{\mu}{\sigma} \cdot \frac{r_3 l(u) \cdot |f'(u)|^{\mu-\sigma}}{\omega^{\mu-\sigma}} \cdot \frac{\sigma!}{(u-a)^\lambda} \cdot \left(\frac{r_3 |f'(u)|}{\omega} \right)^\sigma$$

wegen (48) und (42) ist, also

$$(63) \quad \left| \frac{d^\mu \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda}}{du^\mu} \right| \leqq c_{16} \frac{l(u) \cdot |f'(u)|^\mu}{\omega^\mu (u-a)^\lambda} \qquad (a+\eta \leqq u \leqq b,\ 0 \leqq \mu \leqq m);$$

ist $\lambda = 0$, dann folgt diese Ungleichung unmittelbar aus (48), wenn nur $c_{16} \geqq r_3$ gewählt wird.

Im Intervall $a + \eta \leqq u \leqq a + 2\eta$ ist

$$(64) \qquad 2\eta |f'(u)| \geqq \frac{\omega}{r_3};$$

denn ist $0 < \lambda < 1$, dann geht diese Beziehung aus (42) hervor, und ist $\lambda = 0$, dann kommt sie unter den Voraussetzungen vor. Mit Rücksicht auf (55) findet man in diesem Intervall für $0 \leqq \mu \leqq m$

$$|L^{(\mu)}(u)| = \left| \frac{d^\mu \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda}}{du^\mu} - \sum_{\sigma=0}^{\mu} \binom{\mu}{\sigma} \frac{d^\sigma \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda}}{du^\sigma} \cdot \frac{1}{\eta^{\mu-\sigma}} \cdot N^{(\mu-\sigma)} \left(\frac{u-a-\eta}{\eta} \right) \right|$$

$$\leqq c_{16} \frac{l(u)}{(u-a)^\lambda} \left\{ \frac{|f'(u)|^\mu}{\omega^\mu} + \sum_{\sigma=0}^{\mu} \binom{\mu}{\sigma} \cdot \frac{|f'(u)|^\sigma}{\omega^\sigma} \cdot \frac{1}{\eta^{\mu-\sigma}} \cdot c_{14} \left(\frac{2\eta r_3 |f'(u)|}{\omega} \right)^{\mu-\sigma} \right\}$$

wegen (63), (62) und (64), also

$$(65) \qquad |L^{(\mu)}(u)| \leqq c_{17} \frac{l(u) \cdot |f'(u)|^\mu}{(u-a)^\lambda \omega^\mu} \qquad (0 \leqq \mu \leqq m);$$

diese Ungleichungen gelten wegen (56) und (63) auch im Intervall $a + 2\eta < u \leqq b$, wenn nur $c_{17} \geqq c_{16}$ gewählt wird.

Aus (43) und (65) geht hervor, daß die Voraussetzungen von Satz 4 hier erfüllt sind, wenn man in Satz 4 a durch $a + \eta$; r_2 durch die größte der Zahlen c_{17} und r_3; $g(u)$ durch $L(u)$ und schließlich $l(u)$ durch $\dfrac{l(u)}{(u-a)^\lambda}$ ersetzt. Setzt man im Intervall $a + \eta \leqq u \leqq b$

$$(66)\quad \Lambda_0(u) = L(u);\quad \Lambda_\mu(u) = \Lambda'_{\mu-1}(u) + (\mu-1)f''(u)\Lambda_{\mu-2}(u) \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

dann bekommt man also

$$(67)\quad \left| \int_{a+\eta}^{b} L(u)e^{f(u)}du - e^{f(b)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\mu \Lambda_\mu(b)}{(f'(b))^{\mu+1}} + e^{f(a+\eta)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\mu \Lambda_\mu(a+\eta)}{(f'(a+\eta))^{\mu+1}} \right| \leqq \frac{c_{18}}{\omega^m} \int_{a+\eta}^{b} \frac{l(u)}{(u-a)^\lambda} e^{\Re f(u)}du.$$

Im Punkte $u = a+\eta$ verschwindet die Funktion $1 - N\left(\dfrac{u-a-\eta}{\eta}\right)$ mit ihren sämtlichen Derivierten, so daß wegen (55)

$$(68)\qquad L^{(\sigma)}(a+\eta) = 0 \qquad (0 \leqq \sigma \leqq m)$$

ist. Ich behaupte:

$$(69)\qquad \Lambda_\mu^{(\sigma)}(a+\eta) = 0 \quad (\mu \geqq 0,\ \sigma \geqq 0,\ \mu + \sigma \leqq m);$$

diese Beziehung geht für $\mu = 0$ unmittelbar aus (66) und (68) hervor, und ist sie, $\mu \geqq 1$ vorausgesetzt, schon bewiesen, wenn μ durch eine kleinere ganze Zahl $\geqq 0$ ersetzt wird, dann folgt sie aus (66).

Aus (56), (50) und (66) ergibt sich, daß im Intervall $a+2\eta < u \leqq b$ die Funktionen $\chi_\mu(u)$ und $\Lambda_\mu(u)$ übereinstimmen, also

$$(70)\qquad \Lambda_\mu(b) = \chi_\mu(b) \qquad (0 \leqq \mu \leqq m-1)$$

ist.

Aus (67), (70) und (69) (mit $\sigma = 0$ angewendet) folgt (58), womit Satz 5 bewiesen ist.

Beweis von Satz 1.

Ich werde zeigen, daß hier die Voraussetzungen von Satz 5 mit

$$p(u) = f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(u-a)^k \tag{71}$$

erfüllt sind, wenn r_3 die größte der Zahlen re^2 und 1 bezeichnet. Daß die Voraussetzungen 1, 2 und 4 von Satz 5 gelten, ist wegen $r_3 > r$ evident, sodaß ich nur die dritte Voraussetzung von Satz 5 zu untersuchen brauche.

Im Intervall $a \leqq u \leqq a + 2\eta$ ist für $0 \leqq \mu \leqq k$ bei geeignet gewähltem zwischen a und u liegendem v

$$\left\{\begin{aligned} f^{(\mu)}(u) - p^{(\mu)}(u) &= f^{(\mu)}(a) + f^{(\mu+1)}(a)\cdot\frac{u-a}{1!} + \dots \\ &\dots + f^{(k)}(a)\cdot\frac{(u-a)^{k-\mu}}{(k-\mu)!} + f^{(k+1)}(v)\,\frac{(u-a)^{k-\mu+1}}{(k-\mu+1)!} \\ &\quad - f^{(k)}(a)\cdot\frac{(u-a)^{k-\mu}}{(k-\mu)!}\,, \end{aligned}\right. \tag{72}$$

wobei für $\mu = 0$ außerdem noch das Glied $-f(a)$ hinzukommt. In (72) fallen somit die zwei Glieder mit dem Faktor $f^{(k)}(a)$ fort, und für $\mu = 0$ verschwindet auch noch das Glied $f(a)$. Wegen $0 \leqq u - a \leqq 2\eta$ folgt also aus (72), (2) und (5) (mit $\mu = k+1$ angewendet) im Intervall $a \leqq u \leqq a + 2\eta$ für $0 \leqq \mu \leqq k$

$$\left| f^{(\mu)}(u) - p^{(\mu)}(u) \right| \leqq \sum_{\substack{\varkappa=\mu \\ \varkappa\neq k}}^{k+1} \frac{r}{\eta^{\varkappa}}\cdot\frac{(2\eta)^{\varkappa-\mu}}{(\varkappa-\mu)!} \leqq \frac{r}{\eta^{\mu}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{2^h}{h!} = \frac{re^2}{\eta^{\mu}} \leqq \frac{r_3}{\eta^{\mu}}\,,$$

so daß (44) für $0 \leqq \mu \leqq k$ gilt; für $k+1 \leqq \mu \leqq m$ folgt (44) aus (5), (71) und $r_3 > r$.

Da $f^{(k)}(a)$ nach der zweiten Voraussetzung von Satz 1 negativ oder nicht-reell ist, kann hier Satz 2 mit

$$A = f(a); \qquad B = -\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

angewendet werden, so daß die Punkte $u > a$ der Menge $\mathfrak{M}(p, a, \lambda)$ angehören mit

$$\int^{a+} (z-a)^{\mu-\lambda} e^{p(z)} dz = -\frac{e^{f(a)}}{k}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1-\lambda}{k}\right)}{\left(-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right)^{\frac{\mu+1-\lambda}{k}}} \qquad (\mu \geqq 0). \tag{73}$$

Man hat

$$r_3 \geqq \sqrt[k]{\frac{\pi}{2}r}\,; \tag{74}$$

denn ist $\frac{\pi}{2}r \leqq 1$, dann ist

$$\sqrt[k]{\frac{\pi}{2}r} \leqq 1 \leqq r_3\,,$$

und sonst ist

$$\sqrt[k]{\frac{\pi}{2}r} \leqq \frac{\pi}{2}r < re^2 \leqq r_3.$$

Aus (71), (3) und (74) folgt

$$\sqrt[k]{|\,p^{(k)}(u)\,|} = \sqrt[k]{|\,f^{(k)}(a)\,|} \geqq \frac{\omega}{\sqrt[k]{r}\,\eta} > \frac{\omega}{r_3\eta}\,,$$

womit (45) bewiesen ist. Es erübrigt sich also, noch unter der Voraussetzung, daß $0 < \lambda < 1$ ist, für jedes u zwischen a und $a + 2\eta$ und für jedes z auf $\mathfrak{W}_p(u)$ die Ungleichung

$$|\,z - a\,| \geqq \frac{1}{r_3}\,(u - a) \tag{75}$$

zu beweisen. Aus (71) folgt

$$(z - a)^k = (u - a)^k - \frac{k!}{f^{(k)}(a)}\,(p(u) - p(z))\,, \tag{76}$$

und hierin ist $p(u) - p(z) \geqq 0$ für jedes z auf $\mathfrak{W}_p(u)$. Bezeichnet ϱ das im Intervall $-\pi < \varrho \leqq \pi$ liegende Argument von $f^{(k)}(a)$, dann ist $|\,\varrho\,| \geqq \frac{1}{r}$ wegen (4). Ist $|\,\varrho\,| \geqq \frac{\pi}{2}$, dann folgt aus (76) und $p(u) - p(z) \geqq 0$, daß $|\,z - a\,|^k \geqq (u - a)^k$ ist, so daß dann (75) wegen $r_3 \geqq 1$ gilt. Ist $|\,\varrho\,| < \frac{\pi}{2}$, also $\frac{1}{r} \leqq |\,\varrho\,| < \frac{\pi}{2}$, dann ist wegen (76)

$$|\,z - a\,|^k = \left|\,(u - a)^k e^{i\varrho} - \frac{k!}{|\,f^{(k)}(a)\,|}\,(p(u) - p(z))\,\right|$$

$$\geqq \left|\,\Im\left\{(u - a)^k e^{i\varrho} - \frac{k!}{|\,f^{(k)}(a)\,|}\,(p(u) - p(z))\right\}\right| = (u - a)^k\,|\sin\varrho\,|$$

$$\geqq (u - a)^k\,\frac{2\,|\,\varrho\,|}{\pi} \geqq (u - a)^k\,\frac{2}{\pi r} \geqq (u - a)^k\,\frac{1}{r_3{}^k}$$

wegen (74), so daß (75) auch dann gilt.

Hiermit ist bewiesen, daß hier die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt sind, und (51) nimmt wegen (73) die Gestalt

$$(77)\quad \left| \int_a^b \frac{g(u)}{(u-a)^\lambda} e^{f(u)}du - e^{f(b)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\mu \chi_\mu(b)}{(f'(b))^{\mu+1}} - \frac{e^{f(a)}}{k} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{G^{(\mu)}(a)}{\mu!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1-\lambda}{k}\right)}{\left(-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right)^{\frac{\mu+1-\lambda}{k}}} \right| \leqq \frac{c_9}{\omega^m} \int_a^b \frac{l(u)}{(u-a)^\lambda} e^{\Re f(u)}du$$

an, wo $G(u)$ durch (14) definiert ist, und c_{19} wegen $k < m$ eine geeignet gewählte, höchstens von r_3 und m, also höchstens von r und m abhängige Zahl bezeichnet.

Satz 1 und die dazu gehörige Bemerkung ist somit bewiesen, wenn nun noch bewiesen wird

$$(78)\qquad \varphi_\mu(a) = e^{f(a)}G^{(\mu)}(a) = e^{f(a)}\psi_\mu(a) \qquad (0 \leqq \mu \leqq m).$$

Dazu setze ich zunächst im Parallelogramm $a \leqq u \leqq b$, $a \leqq u + v \leqq b$

$$(79)\qquad P(u, v) = g(u + v) \exp\left(f(u + v) - f^{(k)}(u)\frac{v^k}{k!}\right) \quad [1])$$

somit

$$\frac{\partial P}{\partial u} = g'(u + v) \exp\left(f(u + v) - f^{(k)}(u)\frac{v^k}{k!}\right) + + P(u, v)\left(f'(u + v) - f^{(k+1)}(u)\frac{v^k}{k!}\right)$$

und

$$\frac{\partial P}{\partial v} = g'(u + v) \exp\left(f(u + v) - f^{(k)}(u)\frac{v^k}{k!}\right) + + P(u, v)\left(f'(u + v) - f^{(k)}(u)\frac{v^{k-1}}{(k-1)!}\right),$$

also

$$\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial u} = P(u, v)\left(f^{(k+1)}(u)\frac{v^k}{k!} - f^{(k)}(u) \cdot \frac{v^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

Differentiiert man beide Seiten $\mu - 1$ mal $(1 \leqq \mu \leqq m)$ partiell nach v, und setzt man danach $v=0$, dann erhält man im Intervall $a \leqq u \leqq b$ für $1 \leqq \mu \leqq m$

---

[1]) $\exp \alpha = e^\alpha$.

$$\left(\frac{\partial^\mu P}{\partial v^\mu}\right)_{v=0} - \left(\frac{\partial^\mu P}{\partial u \partial v^{\mu-1}}\right)_{v=0} =$$

$$= \binom{\mu-1}{k} f^{(k+1)}(u) \left(\frac{\partial^{\mu-1-k} P}{\partial v^{\mu-1-k}}\right)_{v=0} - \binom{\mu-1}{k-1} f^{(k)}(u) \left(\frac{\partial^{\mu-k} P}{\partial v^{\mu-k}}\right)_{v=0},$$

also

$$(80) \quad \begin{cases} \Phi_\mu(u) - \Phi'_{\mu-1}(u) = \\ \qquad = \binom{\mu-1}{k} f^{(k+1)}(u)\, \Phi_{\mu-1-k}(u) - \binom{\mu-1}{k-1} f^{(k)}(u)\, \Phi_{\mu-k}(u), \end{cases}$$

wenn

$$(81) \qquad \Phi_\mu(u) = \left(\frac{\partial^\mu P(u, v)}{\partial v^\mu}\right)_{v=0} \qquad (a \leqq u \leqq b,\ 0 \leqq \mu \leqq m)$$

gesetzt wird.

Aus (81), (79) und (10) folgt

$$\Phi_0(u) = P(u, 0) = g(u) e^{f(u)} = \varphi_0(u),$$

so daß wegen (80) und (12) die Funktionen $\Phi_\mu(u)$ und $\varphi_\mu(u)$ übereinstimmen. Aus (81) und (79) folgt für $0 \leqq \mu \leqq m$

$$\Phi_\mu(a) = \left(\frac{\partial^\mu P(a, v)}{\partial v^\mu}\right)_{v=0} = \left(\frac{\partial^\mu g(a+v) e^{f(a+v) - f^{(k)}(a)\frac{v^k}{k!}}}{\partial v^\mu}\right)_{v=0} = e^{f(a)} G^{(\mu)}(a)$$

wegen (14), womit die erste Hälfte von (78) bewiesen ist. Auf genau dieselbe Weise erhält man die zweite Hälfte vom (78), wenn man

$$Q(u, v) = g(u+v) \exp\left(f(u+v) - \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \frac{v^\varkappa}{\varkappa!} (f^{(\varkappa)}(u) - f^{(\varkappa)}(a)) - \frac{v^k}{k!} f^{(k)}(u)\right)$$

statt $P(u, v)$ benutzt.

Hiermit ist Satz 1 mit der zugehörigen Bemerkung bewiesen.

(Eingegangen den 2. August 1933.)