

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Appendice II Le théorème de Bézout

Cours de l'institut Fourier, tome 19 (1984-1985), p. 129-136

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1984-1985__19__129_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Appendice II

LE THÉORÈME DE BEZOUT

Nous supposons ici que k est un *corps algébriquement clos*. Soit I un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ tel que $X = V(I) - \{0\} / \sim$ soit un ensemble fini de points $P_1, \dots, P_s$ de $\mathbf{P}^n$. A chaque P_i , nous allons associer un entier strictement positif e_{P_i} que nous appellerons *l'ordre de multiplicité* de X en P_i , $i = 1 \dots s$.

Nous devons pour ce faire introduire la notion de localisation.

1. DÉFINITION. — On dit qu'un anneau (commutatif et unitaire) A est local si A possède un unique idéal maximal M . A/M est appelé le corps résiduel de A .

2. DÉFINITION. — Soit A un anneau et $\mathcal{P}$ un idéal premier de A . $A_{\mathcal{P}} = \{\frac{f}{g}; f, g \in A; g \notin \mathcal{P} \text{ modulo la relation d'équivalence } \frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \text{ si } \exists g'' \notin \mathcal{P}, g''(fg' - gf') = 0\}$. $A_{\mathcal{P}}$ est un anneau local dont l'idéal maximal est $\mathcal{P} \cdot A_{\mathcal{P}}$ et le corps résiduel $\kappa(\mathcal{P})$ est le corps des fractions de $A/\mathcal{P}$.

3. DÉFINITION. — Soit A un anneau gradué et $\mathcal{P}$ un idéal premier de A engendré par des éléments homogènes ne contenant pas $\oplus_{s \geq 1} A_s$. $A_{(\mathcal{P})} = \{\frac{f}{g}, f \text{ et } g \text{ homogènes de même degré dans } A, g \notin \mathcal{P} \text{ modulo la relation d'équivalence } \frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'}, \text{ si } \exists g'' \notin \mathcal{P} \text{ homogène } g''(fg' - gf') = 0\}$.

4. LEMME. — Soit I un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$. Si $x = (x_0, \dots, x_n) \in V(I)$ et si $x_0 \neq 0$, désignant par $\mathcal{P}$ l'idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ des polynômes qui s'annulent sur la droite l_x de $\mathbf{A}^{n+1}$ passant par 0 et x , on a un isomorphisme canonique entre $k[X_0, \dots, X_n]/I_{(\mathcal{P}/I)}$ et $k[X_1, \dots, X_n]/I_0\mathcal{P}_0/I_0$ (où I_0 (resp $\mathcal{P}_0$) comme dans l'appendice I. déf.5 est l'idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ formé des $h(1, X_1, \dots, X_n)$, h homogène dans I (resp $\mathcal{P}$)).

Démonstration. — Soit $\Psi_0 : k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ le morphisme de k -algèbres tel que $\Psi_0(X_0) = 1$, $\Psi_0(X_i) = X_i$, $i = 1 \dots n$. Ψ_0 induit $\overline{\Psi}_0 : k[X_0, \dots, X_n]/I \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I_0$ par définition de I_0 .

Si g est homogène et n'appartient pas à $\mathcal{P}$, $\overline{\Psi}_0(g \bmod I) \notin \mathcal{P}_0/I_0$. En effet, autrement il existerait h homogène dans $\mathcal{P}$ et $h' \in k[X_0, \dots, X_n]$ tels que $g = h + (X_0 - 1)h'$. Or $x' = (1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \in l_x$. Donc $h(x') = 0$ et $g(x') = 0$.

Mais g étant homogène, $g(y) = 0, \forall y \in l_x$ et $g \in \mathcal{P}$. Il en résulte que $\bar{\Psi}_0$ induit une application

$$\Psi_x : k[X_0, \dots, X_n]/I_{(\mathcal{P}/I)} \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I_{0\mathcal{P}_0/I_0}.$$

Cette application est injective. Si $\Psi_x(\frac{f}{g}) = 0$, il existe $h \notin \mathcal{P}_0/I_0$ tel que $h\bar{\Psi}_0(f) = 0$. Notons encore pour simplifier h un représentant de $h, \notin \mathcal{P}_0$. Soit $d = \deg h$ et soit $H = h \in k[X_0, \dots, X_n]$ (App. I.12). Puisque $H(1, X_1, \dots, X_n) = h, H \notin \mathcal{P}$ et si F est un polynôme homogène de degré d' dont la classe mod I est f , il existe $H' \in k[X_0, \dots, X_n]$ et $G \in I$ tels que $HF = (X_0 - 1)H' + G$. On a $H' = \sum_{i=0 \dots \delta} H'_i, G = \sum_{i \in \mathbb{N}} G_i$ où H'_i (resp G_i) est homogène de degré $i, i \in \mathbb{N}$, ou nul. Identifiant les termes de même degré dans cette égalité, il vient

$$H'_0 = G_0 \in I \text{ puisque } I \text{ est un idéal homogène,}$$

$$H'_1 = X_0 H'_0 + G_1 \in I, \dots, H'_{d+d'-1} = X_0 H'_{d+d'-2} + G_{d+d'-1} \in I,$$

$$H \cdot F = X_0 H'_{d+d'-1} - H'_{d+d'} + G_{d+d'}, X_0 H'_{d+d'} = H'_{d+d'+1} - G_{d+d'+1} \dots \\ \dots X_0 H'_{\delta-1} = H'_{\delta} - G_{\delta}, X_0 H'_{\delta} = -G_{\delta+1}, G_i = 0, i \geq \delta + 2.$$

On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $X_0^\alpha H'_{d+d'} \in I$ et $X_0^\alpha HF \in I$.

Or $X_0 \notin \mathcal{P}, H \notin \mathcal{P}$; par définition $\frac{f}{g} \sim \frac{0}{1}$ et $\frac{f}{g} = 0$. Enfin, cette application est surjective. Si $f \in k[X_1, \dots, X_n]/I_0$, on construit comme en App. I.12, $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polynôme homogène tel que $F(1, X_1, \dots, X_n) \bmod I_0 = f$. Si $f \notin \mathcal{P}_0/I_0, F \bmod I \notin \mathcal{P}/I$. Enfin, on ajuste les degrés en multipliant soit au numérateur soit au dénominateur par une puissance convenable de $\text{cl } X_0 \bmod I \notin \mathcal{P}/I$.

5. LEMME. — Soit k un corps algébriquement clos, J un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\text{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/J < \infty$. Soit $J = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ une décomposition primaire irréductible de J . On a un isomorphisme canonique entre $k[X_1, \dots, X_n]/J\sqrt{Q_i}/J$ et $k[X_1, \dots, X_n]/Q_i, i = 1 \dots s$.

Démonstration. — Nous allons d'abord construire un morphisme

$$\mu_i : k[X_1, \dots, X_n]/J\sqrt{Q_i}/J \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/Q_i.$$

Puisque $J \subset Q_i$, nous avons tout d'abord un morphisme $k[X_1, \dots, X_n]/J \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/Q_i$. Soit $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i) \in k^n$ tel que $\sqrt{Q_i} = (X_1 - x_1^i, \dots, X_n - x_n^i)$. Il existe N tel que si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq N, (X_1 - x_1^i)^{\alpha_1} \dots (X_n - x_n^i)^{\alpha_n} \in Q_i$. Si donc $G \notin \sqrt{Q_i}$, autrement dit si $G(x^i) \neq 0, \text{cl } G \bmod Q_i = G(x^i) + \sum_{|\alpha| < N} C_\alpha (X - x^i)^\alpha \bmod Q_i$ est inversible dans $k[X_1, \dots, X_n]/Q_i$. Si $F \in k[X_1, \dots, X_n]$, on posera donc $\mu_i(\frac{\text{cl } F \bmod J}{\text{cl } G \bmod J}) = \text{cl } F \bmod Q_i \cdot (\text{cl } G \bmod Q_i)^{-1}$. On vérifie que cette définition est compatible avec la relation d'équivalence.

μ_i est évidemment surjective. Montrons qu'elle est aussi injective. Si $\mu_i(\frac{\text{cl } F \bmod J}{\text{cl } G \bmod J}) = 0$ avec $G \notin \sqrt{Q_i}$, on a $F \in Q_i$. Pour voir que $\frac{\text{cl } F \bmod J}{\text{cl } G \bmod J} = 0$, il faut montrer qu'il existe $G' \in k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $G'(x^i) \neq 0$ et $G'F \in J$. Or la décomposition primaire $J = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ étant irréductible (III.1.9), si $\sqrt{Q_j} = (X_1 - x_1^j, \dots, X_n - x_n^j)$ on a $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j) \neq x^i$ si $j \neq i$. Il existe donc

$\tau(j) \in 1 \cdots n$ tel que $x_{\tau(j)}^j \neq x_{\tau(j)}^i$ et $\alpha_j \in \mathbb{N}$ tel que $(X_{\tau(j)} - x_{\tau(j)}^j)^{\alpha_j} \in Q_j$ si $j \neq i$. Soit $G' = \prod_{j \neq i} (X_{\tau(j)} - x_{\tau(j)}^j)^{\alpha_j}$, $G'(x^i) \neq 0$ et $G'F = \cap Q_i = J$.

6. LEMME. — Sous les hypothèses du lemme 5, l'application canonique

$$k[X_1, \dots, X_n]/J \rightarrow \bigoplus_{i=1 \cdots s} k[X_1, \dots, X_n]/Q_i$$

qui à $\text{cl } F \text{ mod } J$ fait correspondre $\sum_{i=1 \cdots s} \text{cl } F \text{ mod } Q_i$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Cette application est clairement injective. Nous allons montrer qu'elle est surjective par récurrence sur s .

Si $s = 1$, c'est évident. Supposons l'assertion vraie pour $s - 1$ et soit $f_1, \dots, f_s \in k[X_1, \dots, X_n]$. Il s'agit de déterminer $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $f - f_i \in Q_i$, $i = 1 \cdots s$. Par hypothèse de récurrence, il existe $f' \in k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $f' - f_i \in Q_i$, $i = 1 \cdots s - 1$.

Or $x^s \neq x^i$, $i = 1 \cdots s - 1$. On a donc $V(Q_s + Q_i) = V(Q_s) \cap V(Q_i) = x^s \cap x^i = \emptyset$. D'après II.4.3, $1 \in Q_s + Q_i$. Il existe donc $g_i \in Q_i$, $g_s^i \in Q_s$, $i = 1 \cdots s - 1$, tel que $1 = g_i + g_s^i$ et $1 = \prod_{i=1 \cdots s-1} (g_i + g_s^i)$. Il existe donc $h \in Q_s$ tel que $1 = g_1 \cdots g_{s-1} + h$.

Soit $f = f' + (f_s - f')g_1 \cdots g_{s-1}$, $f - f_i = (f' - f_i) + (f_s - f')g_1 \cdots g_{s-1} \in Q_i$ si $i = 1 \cdots s - 1$. $f - f_s = (f' - f_s)(1 - g_1 \cdots g_{s-1}) = (f' - f_s)h \in Q_s$.

Revenant à la situation considérée au début, nous sommes maintenant en mesure de définir e_{P_i} , $i = 1 \cdots s$. Soit $x^i = (x_0^i, \dots, x_n^i) \in k^{n+1} - \{0\}$ un représentant de P_i et soit $\mathcal{P}^i$ l'idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ des polynômes qui s'annulent sur la droite l_{x^i} de k^{n+1} passant par 0 et x^i . Nous allons voir que $k[X_0, \dots, X_n]/I_{(\mathcal{P}^i/I)}$ est un k -espace vectoriel de rang fini sur k .

Considérons x^i . Il existe j , $1 \leq j \leq n$ (dépendant de i) tel que $x_j^i \neq 0$. Supposons pour fixer les idées que $j = 0$ convient. En changeant au besoin la numérotation des P_i , on peut supposer que $x_0^k \neq 0$, $k = 1 \cdots s'$ où $1 \leq s' \leq s$. Avec les notations de l'appendice I, on a

$$V(I_0) = \phi_0^{-1}(V(I) - \{0\} \sim \cap Z_0) = \bigcup_{k=1 \cdots s'} \left(\frac{x_1^k}{x_0^k}, \dots, \frac{x_n^k}{x_0^k} \right).$$

Puisque c'est un ensemble fini non vide, $1 \leq \text{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/I_0 < \infty$ (II.6.5.7) et I_0 possède une décomposition primaire irréductible $I_0 = Q_1 \cap \cdots \cap Q_{s'}$ où $\sqrt{Q_k} = (X_1 - \frac{x_1^k}{x_0^k}, \dots, X_n - \frac{x_n^k}{x_0^k}) = \mathcal{P}_0^k$, $k = 1 \cdots s'$. Or

$$\begin{aligned} k[X_0, \dots, X_n]/I_{(\mathcal{P}^k/I)} &\simeq k[X_1, \dots, X_n]/I_{0\mathcal{P}_0^k/I_0} \simeq k[X_1, \dots, X_n]/I_{0\sqrt{Q_k}/I_0} \\ &\simeq k[X_1, \dots, X_n]/Q_k \end{aligned}$$

qui est un quotient de $k[X_1, \dots, X_n]/I_0$.

7. DÉFINITION. — $e_{P_i} = \text{rg}_k k[X_0, \dots, X_n]/I_{(\mathcal{P}^i/I)}$, $i = 1 \cdots s$.

8. THÉORÈME (BEZOUT). — Soit $f_1, \dots, f_n$ des polynômes homogènes de $k[X_0, \dots, X_n]$ tous $\neq 0$. Soit $d_i = \deg f_i$, $i = 1 \dots n$.

Si $X = V(f_1, \dots, f_n) - \{0\} / \sim$ est un ensemble fini de points $P_1, \dots, P_s$ de $\mathbf{P}^n$,

$$\sum_{i=1 \dots s} e_{P_i} = d_1 \cdots d_n .$$

Démonstration. — k algébriquement clos étant infini, il existe un hyperplan H de k^{n+1} tel que $P_i \notin H - \{0\} / \sim$, $i = 1 \dots s$. Quitte à effectuer un changement de variables linéaire, on peut supposer que $H = V(X_0)$ de sorte que si $x^i = (x_0^i, \dots, x_n^i) \in k^{n+1} - \{0\}$ est un représentant de P_i , $x_0^i \neq 0$, $i = 1 \dots s$.

Soit $I = (f_1, \dots, f_n)$. Reprenant l'analyse ci-dessus, on a donc ici $s' = s$ et

$$\sum_{i=1 \dots s} e_{P_i} = \sum_{i=1 \dots s} \operatorname{rg} k[X_1, \dots, X_n] / Q_i = \operatorname{rg} k[X_1, \dots, X_n] / I_0$$

(d'après le lemme 6).

D'autre part, ceci entraîne que $V(f_1, \dots, f_n, X_0) = \{0\}$; $(f_1, \dots, f_n; X_0)$ satisfait donc dans $k[X_0, \dots, X_n]$ les hypothèses de III.3.1 et d'après III.3.2, $d_1 \cdots d_n = \operatorname{rg} k[X_0, \dots, X_n] / I + X_0$.

Il s'agit donc de montrer que

$$\operatorname{rg} k[X_0, \dots, X_n] / I + X_0 = \operatorname{rg} k[X_1, \dots, X_n] / I_0.$$

Soit $\theta_{x_0} : k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$, $x_0 \in k$, le morphisme tel que $\theta_{x_0}(X_0) = x_0$, $\theta_{x_0}(X_i) = X_i$, $i = 1 \dots n$ et soit $I(x_0) = \theta_{x_0}(I)$. Il revient au même de démontrer que :

$$\operatorname{rg} k[X_1, \dots, X_n] / I(0) = \operatorname{rg} k[X_1, \dots, X_n] / I(1).$$

Mais les variables $(X_1, \dots, X_n, X_0)$ sont commodées pour I . En effet, puisque $V(f_1, \dots, f_n, X_0) = 0$, $V(I) \cap V(X_0) = 0$ et (II.5.4) $k[X_0, \dots, X_n] / I$ est une $k[X_0]$ -algèbre entière. D'autre part, nous avons remarqué (III.2.2) que $\dim V(f_1, \dots, f_n, X_0) = 0$ entraîne $\dim V(I) = 1$, puisque $f_1, \dots, f_n, X_0$ sont homogènes. Par suite (II.6.5.0), $k[X_0] \rightarrow k[X_0, \dots, X_n] / I$ est injective. I satisfaisant également les hypothèses de III.3.1, $k[X_0, \dots, X_n] / I$ est un $k[X_0]$ -module libre (III.3.4.1). Plus précisément, si on munit $\mathbf{N}^n$ de l'ordre lexicographique inverse les $(\operatorname{cl} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \operatorname{mod} I)_{\alpha \notin \mathbf{N}^n - \exp I(0)}$ forment une base du $k[X_0]$ -module $k[X_1, \dots, X_n, X_0] / I$ et $\operatorname{rg} k[X_1, \dots, X_n] / I(0) = \#\mathbf{N}^n - \exp I(0)$. On vérifie facilement que $(\operatorname{cl} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \operatorname{mod} I(1))_{\alpha \notin \mathbf{N}^n - \exp I(0)}$ forment également une base de $k[X_1, \dots, X_n] / I(1)$.

9. PROPOSITION. — Soit $f_1, \dots, f_s$, $s \geq n$ des polynômes homogènes de $k[X_0, \dots, X_n]$ tous $\neq 0$. Soit $d_i = \deg f_i$, $i = 1 \dots s$. On suppose que $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_s > 0$. Si $X = V(f_1, \dots, f_s) - \{0\} / \sim$ est un ensemble fini de points $P_1, \dots, P_k$ de $\mathbf{P}^n$, $\sum_{i=1 \dots k} e_{P_i} \leq d_1 \cdots d_n$.

Démonstration. — Comme en 8, on peut supposer que si $x^i = (x_0^i, \dots, x_n^i) \in k^{n+1} - \{0\}$ est un représentant de P_i , $x_0^i \neq 0$, $i = 1 \dots k$. Si $I = (f_1, \dots, f_s)$, on a alors

$$\sum_{i=1 \dots k} e_{P_i} = \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/I_0.$$

De plus, comme ci-dessus $V(I + X_0) = \{0\}$. Par suite (II.7.8), $\dim V(I) \leq 1$. Mais $\dim V(I) = 0$ est impossible, car $V(I)$ n'est pas un ensemble fini de points dans k^{n+1} . Donc $\dim V(I) = 1$. Le polynôme de Hilbert $P(T)$ de $k[X_0, \dots, X_n]/I$ se réduit donc à une constante d . Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $s \geq N_1$, $\operatorname{rg}_k k[X_0, \dots, X_n]/I_s = d$. D'autre part soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $s \geq N_2$, $\operatorname{rg}_k k[X_0, \dots, X_n]/(I + X_0)_s = 0$. Si $s \geq \sup N_1, N_2 - 1$, l'application

$$k[X_0, \dots, X_n]_s/I_s \xrightarrow{X_0} k[X_0, \dots, X_n]_{s+1}/I_{s+1}$$

est donc un isomorphisme.

Nous allons voir que si $s \geq \sup N_1, N_2 - 1$, l'application canonique $k[X_0, \dots, X_n]_s/I_s \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I_0$ (consistant à envoyer X_0 sur 1) est également un isomorphisme.

Cette application est injective. Si $f \in k[X_0, \dots, X_n]_s$ est tel que $f(1, X_1, \dots, X_n) \in I_0$, il existe $h \in I$ homogène tel que $f(1, X_1, \dots, X_n) = h(1, X_1, \dots, X_n)$. Il en résulte qu'il existe $s' \in \mathbb{N}$ tel que ou bien $f = X_0^{s'} h$ et $f \in I_s$ ou bien $X_0^{s'} f = h \in I_{s+s'}$ et puisque $s \geq \sup N_1, N_2 - 1$, $f \in I_s$.

Cette application est surjective. Soit $h \in k[X_1, \dots, X_n]$. Si $\deg h \leq s$, il existe $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogène de degré s tel que $h = f(1, X_1, \dots, X_n)$. Si $\delta = \deg h > s$, il existe $H \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogène de degré δ tel que $H(1, X_1, \dots, X_n) = h$. Mais

$$k[X_0, \dots, X_n]_s/I_s \xrightarrow{X_0^{\delta-s}} k[X_0, \dots, X_n]_\delta/I_\delta$$

étant surjective, il existe $F \in k[X_0, \dots, X_n]_s$ tel que $H = X_0^{\delta-s} F \bmod I_\delta$. On a donc $h = F(1, X_1, \dots, X_n) \bmod I_0$.

Il s'ensuit que $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/I_0 = d$.

Il existe maintenant $g_1, \dots, g_n \in k[X_0, \dots, X_n]$ des polynômes homogènes tels que $\deg g_i = d_i, i = 1 \dots n$, $g_1, \dots, g_n$ est une suite régulière de $k[X_0, \dots, X_n]$ et $J = (g_1, \dots, g_n) \subset I$ (III.4.1). Puisque $\dim V(J) = 1$, le polynôme de Hilbert $Q(T)$ de $k[X_0, \dots, X_n]/J$ se réduit à une constante (II.7.4.1) qui vaut $d_1 \dots d_n$ d'après III.3.2. Pour s assez grand $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/J_s = d_1 \dots d_n$. Puisque $k[X_1, \dots, X_n]_s/J_s \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I_s$ est surjectif, $\forall s \in \mathbb{N}$, $d \leq d_1 \dots d_n$.

10. REMARQUE. — Soit $f_1, \dots, f_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes non nécessairement homogènes et soit $d_i = \deg f_i$. On suppose que $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_s$ que $\dim V(f_1, \dots, f_s) = 0$ et $\dim V(\operatorname{gr} f_1, \dots, \operatorname{gr} f_s) \leq 1$.

Si $(f'_1, \dots, f'_t)$ est une base standard de cardinal minimal de $I = (f_1, \dots, f_s)$ pour un ordre total sur $\mathbb{N}^n$ vérifiant I.1.1, $\deg f'_i \leq d_1 \dots d_n$.

Démonstration. — Soit $H = ({}^h f_1, \dots, {}^h f_s)$. L'hypothèse signifie que $V(I)$ est un ensemble fini de points $x^1, \dots, x^t$ de k^n et que $V(\text{gr } f_1, \dots, \text{gr } f_s)$ est ou $\{0\}$ ou un ensemble fini de droites $l^1, \dots, l^{t'}$ passant par 0 dans k^n . $V(H)$ est donc, dans k^{n+1} , la réunion des droites passant par 0 et les points $(1, x^i)$, $i = 1 \dots t$ de k^{n+1} et des droites $0 \times l^j$, $j = 1 \dots t'$, de k^{n+1} et $V(H) - \{0\} / \sim$ est un ensemble fini de points de $\mathbf{P}^n$; P_i , $i = 1 \dots t$, correspondant aux droites de la 1ère sorte, $P'_{i'}$, $i' = 1 \dots t'$, correspondant aux droites de la 2ème sorte. On a $I = H_0$ et

$$\text{rg } k[X_1, \dots, X_n] / I = \sum_{i=1 \dots t} e_{P_i} \leq \sum_{i=1 \dots t} e_{P_i} + \sum_{i'=1 \dots t'} e_{P'_{i'}} \leq d_1 \dots d_n.$$

Pour tout ordre total sur $\mathbf{N}^n$ vérifiant I.1.1, on a alors

$$\text{rg } k[X_1, \dots, X_n] / I = \# \mathbf{N}^n - \exp I \leq d_1 \dots d_n.$$

Soit $A_1, \dots, A_u$ l'escalier de $\exp I$. Il s'agit de voir que $|A_i| \leq d_1 \dots d_n$, $i = 1 \dots u$. Soit $A_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est tel que $\gamma_i \leq \alpha_i$, $i = 1 \dots n$ et $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \notin \exp I$. En effet autrement $A_1, \dots, \gamma, \dots, A_u$ serait une autre frontière de cardinal minimal de $\exp I$. En particulier, si $\alpha_j \neq 0$, $(\alpha_1, \dots, k, \dots, \alpha_n)$ (k à la $j^{\text{ème}}$ place), $0 \leq k \leq \alpha_j - 1$, n'appartient pas à $\exp I$ et ces éléments sont deux à deux distincts. On a donc trouvé $|A_i| = |\alpha| = \sum_j \alpha_j$ éléments de $\mathbf{N}^n - \exp I$. Donc $|A_i| \leq \# \mathbf{N}^n - \exp I \leq d_1 \dots d_n$.

Cette borne peut être atteinte. Si on munit $\mathbf{N}^2$ de l'ordre lexicographique et si $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - 2$, $f_2 = x_1 x_2 - 1$, une base standard de cardinal minimal de $I = (f_1, f_2)$ pour cet ordre est donnée par $f'_1 = x_1 + x_2^3 - 2x_2$, $f'_2 = x_2^4 - 2x_2 + 1$. $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (0, 4)$, $|A_2| = 4$.