

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Appendice I Systèmes et idéaux homogènes et non homogènes

Cours de l'institut Fourier, tome 19 (1984-1985), p. 119-127

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1984-1985__19__119_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Appendice I

SYSTÈMES ET IDÉAUX HOMOGÈNES ET NON HOMOGÈNES

Soit k un corps, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k . Si H est un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ et si $x \in V(H)$, pour tout $\lambda \in \bar{k} - \{0\} = \bar{k}^*$, $\lambda x \in V(H)$. On dit que $V(H)$ est un cône.

Sur $\bar{k}^{n+1}$, on introduit la relation d'équivalence : $(x_0, \dots, x_n) \sim (x'_0, \dots, x'_n)$ si il existe $\lambda \in \bar{k}^*$ tel que $x_i = \lambda x'_i$, $i = 0, \dots, n$.

1. DÉFINITION. — L'espace projectif à n dimensions sur $\bar{k}$ (noté $\mathbf{P}_{\bar{k}}^n$ ou $\mathbf{P}^n$ quand aucune confusion n'est possible) est ensemblistement $\bar{k}^{n+1} - \{0\} / \sim$.

2. LEMME. — Soit pour $i = 0 \dots n$, $\phi_i : \mathbf{A}_{\bar{k}}^n = \bar{k}^n \rightarrow \mathbf{P}_{\bar{k}}^n$ tel que $\phi_i(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = \text{cl}(x_0, \dots, 1, \dots, x_n)$. (La notation $\hat{x}_i$ signifie que x_i a été omis). ϕ_i est injectif, $i = 0 \dots n$, et si $Z_i = \text{Im} \phi_i$, $\mathbf{P}_{\bar{k}}^n = \cup_{i=0 \dots n} Z_i$. Si $i \neq j$, $\phi_i^{-1}(Z_i \cap Z_j) = \{(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in \bar{k}^n, x_j \neq 0\}$.

3. DÉFINITION. — La topologie de $\mathbf{P}_{\bar{k}}^n$ dont les fermés sont les sous-ensembles F tels que $\phi_i^{-1}(F \cap Z_i)$ est un $k - (\text{resp. } \bar{k})$ sous-ensemble algébrique de $\mathbf{A}_{\bar{k}}^n$, $i = 0 \dots n$, est appelée la k -topologie de Zariski (resp. la topologie de Zariski) de $\mathbf{P}_{\bar{k}}^n$. On a $\overline{Z_i} = \mathbf{P}_{\bar{k}}^n$, $i = 0 \dots n$.

4. DÉFINITION. — Soit H un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$. $\{h \in k[X_0, \dots, X_n] \text{ tel que } \forall i = 0 \dots n, \exists n_i \text{ (dépendant de } h) \text{ tel que } X_i^{n_i} h \in H\}$ est un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ qu'on appelle le saturé de H et qu'on note H_{sat} .

5. DÉFINITION. — Soit H un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$. $H_i = \{f \in k[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n] \text{ tel que } \exists h \in H \text{ homogène tel que } f = h(X_0, \dots, 1, \dots, X_n)\}$ est un idéal de $k[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n]$.

5.1. REMARQUE. — $V(H_i) = \phi_i^{-1}(V(H) - \{0\} / \sim \cap Z_i)$.

6. PROPOSITION. — Soit H, H' 2 idéaux homogènes de $k[X_0, \dots, X_n]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $H_i = H'_i$, $i = 0 \dots n$;
- ii) H et H' ont le même saturé.

Démonstration. —

i) $\Rightarrow$ ii). Il suffit de montrer que $H_{\text{sat}} \subset H'_{\text{sat}}$. Soit donc $h \in k[X_0, \dots, X_n]$ tel que $\forall i = 0 \dots n$, $\exists n_i$, $X_i^{n_i} h \in H$. On peut supposer h homogène. Il existe donc $h_i \in H$ homogène tel que $X_i^{n_i} h = h_i$, $i = 0 \dots n$ et $h(X_0, \dots, 1, \dots, X_n) = h_i(X_0, \dots, 1, \dots, X_n)$ appartient à $H_i = H'_i$. Il existe donc $h'_i \in H'$ homogène, $i = 0 \dots n$ tel que $h(X_0, \dots, 1, \dots, X_n) = h'_i(X_0, \dots, 1, \dots, X_n)$, $i = 0 \dots n$. Considérons l'application $\theta_i : k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow k[X_0, \dots, X_n]$ définie par $\theta_i(X_j) = X_j X_i$, $j \neq i$, $\theta_i(X_i) = X_i$.

$$\begin{aligned} \theta_i(h) &= h(X_i X_0, \dots, X_i, \dots, X_i X_n) = X_i^{\deg h} h(X_0, \dots, 1, \dots, X_n) \\ \theta_i(h'_i) &= h'_i(X_i X_0, \dots, X_i, \dots, X_i X_n) = X_i^{\deg h'_i} h'_i(X_0, \dots, 1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Par suite :

$$X_i^{\deg h'_i} \theta_i(h) = X_i^{\deg h} \theta_i(h'_i).$$

Soit $\delta_i = |\deg h'_i - \deg h|$. On en déduit :

$$\text{ou bien } \theta_i(h) = \theta_i(X_i^{\delta_i} h'_i)$$

$$\text{ou bien } \theta_i(X_i^{\delta_i} h) = \theta_i(h'_i).$$

Considérons maintenant $\mu_i : k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow k(X_0, \dots, X_n)$ l'application définie par $\mu_i(X_j) = \frac{X_j}{X_i}$, $j \neq i$, $\mu_i(X_i) = X_i$. On constate que $\mu_i \circ \theta_i$ est l'injection canonique de $k[X_0, \dots, X_n]$ dans son corps des fractions. On a donc ou bien $h = X_i^{\delta_i} h'_i$ ou bien $X_i^{\delta_i} h = h'_i$. Dans les 2 cas, il existe n_i entier tel que $X_i^{n_i} h \in H'$, $i = 0 \dots n$ et $h \in H'_{\text{sat}}$.

ii) $\rightarrow$ i). De même ici, il suffit de montrer que $H_i \subset H'_i$, $i = 0 \dots n$.

Soit donc $f \in k[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n]$ tel que $\exists h \in H$ homogène tel que $f = h(X_0, \dots, 1, \dots, X_n)$. Or $h \in H'_{\text{sat}}$. En particulier, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ et $h' \in H'$ homogène tel que $X_i^{n_i} h = h'$. $h(X_0, \dots, 1, \dots, X_n) = h'(X_0, \dots, 1, \dots, X_n)$. Par définition de H'_i , $f \in H'_i$.

7. UN EXEMPLE. — $H = (X^2, XY, XZ)$ n'est pas saturé. En effet, nous allons montrer que $H_{\text{sat}} = (X)$. Soit $H' = (X)$. Montrons d'abord que $H_{\text{sat}} = H'_{\text{sat}}$. On a $H_0 = (1, Y, Z)k[Y, Z] = k[Y, Z] = H'_0$, $H_1 = (X^2, X, XZ)k[X, Z] = (X)k[X, Z] = H'_1$, $H_2 = (X^2, XY, X)k[X, Y] = (X)k[X, Y] = H'_2$.

Montrons que $H' = H'_{\text{sat}}$. Soit $P(X, Y, Z) \in H'_{\text{sat}}$. En particulier, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $Y^{n_1} P \in H'$. $Y^{n_1} P$ étant divisible par X , P l'est aussi et $P \in H'$.

Plus généralement, soit H un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ et d un entier ≥ 0 . ${}^d H = \bigoplus_{s \geq d} H_s$ est encore un idéal homogène. H et ${}^d H$ ont même saturé. Puisque ${}^d H \subset H$, ${}^d H_{\text{sat}} \subset H_{\text{sat}}$. Soit $h \in H_{\text{sat}}$. $\forall i = 0 \dots n$, $X_i^{n_i} h \in H$. H_{sat}

étant homogène, on peut supposer h homogène de degré α . Donc $X_i^{n_i} h \in H_{\alpha+n_i}$ et $X_i^{\beta+n_i} h \in H_{\alpha+\beta+n_i}$. Si donc $\alpha + \beta + n_i \geq d$, $X_i^{\beta+n_i} h \in {}^d H$ et $h \in {}^d H_{\text{sat}}$.

8. PROPOSITION. — Soit H un idéal homogène $\neq (1)$ de $k[X_0, \dots, X_n]$. Pour que $H = H_{\text{sat}}$, il faut et il suffit que $(X_0, \dots, X_n)$ ne soit pas un idéal premier associé à H .

Démonstration. — Supposons d'abord que $H = H_{\text{sat}}$ et soit $H = \cap_{i \in I} Q_i$ une décomposition primaire irrédondante de H . Supposons aussi qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $\sqrt{Q_{i_0}} = (X_0, \dots, X_n)$. Alors, $\exists n_i \in \mathbb{N}$, $X_i^{n_i} \in Q_{i_0}$, $i = 0 \dots n$ et si $f \in \cap_{j \in I - i_0} Q_j$, $X_i^{n_i} f \in \cap_{i \in I} Q_i = H$. Donc $f \in H_{\text{sat}} = H$. Ainsi $H = \cap_{j \in I - i_0} Q_j$. Mais c'est impossible puisque $H = \cap_{i \in I} Q_i$ était une décomposition primaire irrédondante de H . C'est que $\sqrt{Q_i} \neq (X_0, \dots, X_n)$, $\forall i \in I$.

Réciproquement, supposons que $H = \cap_{i \in I} Q_i$ est une décomposition primaire irrédondante de H telle que $\forall i \in I$, $\sqrt{Q_i} \neq (X_0, \dots, X_n)$. Soit $f \in H_{\text{sat}}$. Alors, $\forall j = 0 \dots n$, $\exists n_j$, $X_j^{n_j} f \in H$. En particulier, $\forall i \in I$, $X_j^{n_j} f \in Q_i$. Or Q_i est primaire. Si $f \notin Q_i$, $\exists n'_j$, $X_j^{n'_j} \in Q_i$ et ceci pour tout $j = 0 \dots n$. Donc $(X_0, \dots, X_n) \subset \sqrt{Q_i}$. Or $\sqrt{Q_i} \neq (1)$ (sinon $Q_i = (1)$ et la décomposition primaire étant irrédondante $I = \{i\}$ et $H = (1)$). Donc $(X_0, \dots, X_n) = \sqrt{Q_i}$ contrairement à l'hypothèse. C'est que $f \in \cap_{i \in I} Q_i = H$.

8.1. REMARQUE. — En particulier, si $H = \sqrt{H}$ et si $H \neq (X_0, \dots, X_n)$, H est saturé.

Démonstration. — En effet, H possède alors une décomposition primaire irrédondante $H = \cap_{i \in I} P_i$ où P_i est premier et homogène. Si il existe $i \in I$ tel que $P_i = (X_0, \dots, X_n)$, montrons que $I = \{i\}$ et $H = P_i = (X_0, \dots, X_n)$ contrairement à l'hypothèse. Sinon, soit $j \in I - \{i\}$, $1 \notin P_j$ car alors $P_j \supset P_i$ contrairement à l'hypothèse. Donc $P_j \subset (X_0, \dots, X_n)$. Mais c'est alors P_i qui serait superflu.

9. PROPOSITION. — Soit H un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $s \geq N$, $(H_{\text{sat}})_s = H_s$.

Démonstration. — Si H est saturé, c'est évident. Si H n'est pas saturé, alors $H \neq (1)$. Soit $H = \cap_{i \in I} Q_i$ une décomposition primaire irrédondante de H . D'après 8, il existe $i \in I$ tel que $\sqrt{Q_i} = (X_0, \dots, X_n)$.

Si $I = \{i\}$, $H = Q_i$ et $\sqrt{Q_i} = (X_0, \dots, X_n)$. Or il existe N tel que si g est homogène de degré $s \geq N$, $g \in Q_i$. Ainsi $H_s = k[X_0, \dots, X_n]_s$ si $s \geq N$. Or $1 \in H_{\text{sat}}$, puisque $\forall i = 0 \dots n$, $X_i^{n_i} \in Q_i = H$. Donc $H_{\text{sat}} = (1)$.

Si $I \neq \{i\}$, montrons que N convient encore. Soit $f \in (H_{\text{sat}})_s$, $s \geq N$. Puisque f est de degré $s \geq N$, $f \in Q_i$. D'autre part, $\forall k = 0 \dots n$, $\exists m_k \in \mathbb{N}$ tel que $X_k^{m_k} f \in H$. En particulier, si $j \in I$, $j \neq i$, $X_k^{m_k} f \in Q_j$. Mais Q_j est primaire. Si $f \notin Q_j$, alors $(X_0, \dots, X_n) \subset \sqrt{Q_j}$. $\sqrt{Q_j} = k[X_0, \dots, X_n]$ est impossible, car $Q_j = k[X_0, \dots, X_n]$ ne peut contenir $Q_i \subset (X_0, \dots, X_n)$ puisque la décomposition est irrédondante. $\sqrt{Q_j} = (X_0, \dots, X_n)$ est également impossible, car $\sqrt{Q_j} \neq \sqrt{Q_i}$ pour la même raison. C'est que $f \in \cap_{j \in I - i} Q_j$. Ainsi $f \in H$.

9.1. COROLLAIRE. — Soit H, H' 2 idéaux homogènes de $k[X_0, \dots, X_n]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $\exists N \in \mathbb{N}$, $H_s = H'_s$, $s \geq N$;
- ii) H et H' ont le même saturé.

Démonstration. —

i) $\Rightarrow$ ii). Si $d \geq N$, ${}^dH = {}^dH'$ (cf. exemple 7). Or H et dH d'une part, H' et ${}^dH'$ d'autre part, ont le même saturé.

ii) $\Rightarrow$ i) est une conséquence immédiate de 9.

10. DÉFINITIONS. — $Y \subset \mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ est appelé k -sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ si et seulement si c'est un fermé pour la k -topologie de Zariski de $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$. Il revient au même de dire qu'il existe H un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ tel que $Y = V(H) - \{0\} / \sim$. $Y \subset \mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ est appelé k -variété algébrique projective (resp. variété algébrique projective) si c'est un fermé irréductible de $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ pour la k -topologie de Zariski (resp. pour la topologie de Zariski).

Si Y est un sous-ensemble de $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$, $I_k(Y)$ est l'idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ engendré par les f homogènes de $k[X_0, \dots, X_n]$ tels que $f(x) = 0$, $\forall x \in \bar{k}^{n+1} - \{0\}$ tel que $\pi(x) \in Y$, $\pi : \bar{k}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ étant l'application canonique.

On écrit parfois $I(Y)$ au lieu de $I_{\bar{k}}(Y)$.

Remarquons que $I_k(Y) = \sqrt{I_k(Y)}$ et que $I_k(Y) \neq (X_0, \dots, X_n)$ donc que $I_k(Y)$ est saturé.

Si Y est un $\bar{k}$ -sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$, le polynôme de Hilbert de $\bar{k}[X_0, \dots, X_n]/I(Y)$ est par définition le polynôme de Hilbert de Y . Si d est le degré de ce polynôme et $\frac{mT^d}{d!}$ est son terme dominant, m est appelé le *degré* de Y . $P_a(Y) = (-1)^d(P(0) - 1)$ (où $P(T)$ est le polynôme de Hilbert de Y) est traditionnellement appelé le *genre arithmétique* de Y .

11. REMARQUE. — Soit H un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ et soit $h_1, \dots, h_s$ des éléments homogènes de H qui sont une base standard de H à la fois pour l'ordre diagonal et pour l'ordre lexicographique (cf. II.6.1).

$h_1(X_0, \dots, X_{n-1}, 1), \dots, h_s(X_0, \dots, X_{n-1}, 1)$ est une base standard de H_n pour l'ordre lexicographique.

Démonstration. — Soit h un élément homogène quelconque de H . Montrons d'abord que $\text{inh}(X_0, \dots, X_{n-1}, 1) = (\text{inh})(X_0, \dots, X_{n-1}, 1)$. (Les monômes de $k[X_0, \dots, X_{n-1}]$ et $k[X_0, \dots, X_n]$ sont ordonnés au moyen de l'ordre lexicographique).

Soit $h = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha|=d} c_\alpha X^\alpha$. Dire que $\text{inh} = c_\gamma X^\gamma$ signifie que $c_\gamma \neq 0$ et que si $c_\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \gamma$, $\gamma > \alpha$ pour l'ordre lexicographique.

Or $h(X_0, \dots, X_{n-1}, 1) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha|=d} c_\alpha X_0^{\alpha_0} \dots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$. On a toujours

$c_\gamma \neq 0$. Si $\alpha \neq \alpha'$, $|\alpha| = |\alpha'| = d$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \neq (\alpha'_0, \dots, \alpha'_{n-1})$. Donc si $\alpha \neq \gamma$ et $c_\alpha \neq 0$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \neq (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})$ et $(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) > (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ pour l'ordre lexicographique. Ainsi $\text{inh}(X_0, \dots, X_{n-1}, 1) = c_\gamma X_0^{\gamma_0} \dots X_{n-1}^{\gamma_{n-1}} = (\text{inh})(X_0, \dots, X_{n-1}, 1)$. Maintenant, puisque $h_1, \dots, h_s$ est une base standard de H pour l'ordre lexicographique, pour tout $h \in H$ homogène, il existe M_i , $i \in (1 \dots s)$, un monôme tel que $\text{inh} = M_i \text{inh}_i$. Soit enfin $f \in H_n$. Par définition, il existe $h \in H$ homogène tel que $f = h(X_0, \dots, X_{n-1}, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{inf} &= \text{inh}(X_0, \dots, X_{n-1}, 1) = (\text{inh})(X_0, \dots, X_{n-1}, 1) \\ &= M_i(X_0, \dots, X_{n-1}, 1)(\text{inh}_i)(X_0, \dots, X_{n-1}, 1) \\ &= M_i(X_0, \dots, X_{n-1}, 1)\text{inh}_i(X_0, \dots, X_{n-1}, 1). \end{aligned}$$

11.1. EXEMPLE. — $H = (X_1^4, X_0^3 X_1 - X_2^4)$, $H_2 = (X_1^4, X_0^3 X_1 - 1)$. On vérifie que $(X_1^4, X_0^3 X_1 - X_2^4, X_1^3 X_2^4, X_1^2 X_2^8, X_1 X_2^{12}, X_2^{16})$ est une base standard de H à la fois pour l'ordre diagonal et pour l'ordre lexicographique.

$$\text{in}I = (X_1^4, X_0^3 X_1, X_1^3 X_2^4, X_1^2 X_2^8, X_1 X_2^{12}, X_2^{16}).$$

$$V(\text{in}I) = \{(x_0, x_1, x_2) \in \bar{k}^3, x_1 = x_2 = 0\}, \dim V(I) = 1.$$

Une base standard pour l'ordre lexicographique de I_2 est donc $(X_1^4, X_0^3 X_1, X_1^3, X_1^2, X_1, 1)$ et également (1) . Donc $I_2 = (1)$ et $V(I_2) = \emptyset$. L'algorithme pour trouver une base standard pour l'ordre lexicographique de I_2 passe par les intermédiaires $X_1^3, X_0^3 X_1 - 1, X_1^3, X_1^2, X_1, 1$. Trouver une base standard pour I renseigne donc sur les étapes intermédiaires dans la construction d'une base standard pour l'ordre lexicographique de I_2 . (Cet exemple est dû à Mora).

Etant donné un idéal homogène dans un anneau de polynômes à $n + 1$ variables, nous venons de voir comment lui associer des idéaux quelconques dans un anneau de polynômes à n variables. Ce procédé est souvent appelé *déshomogénéisation*.

Nous cherchons maintenant étant donné un idéal quelconque d'un anneau de polynômes à n variables à lui associer un idéal homogène d'un anneau de polynômes à $n + 1$ variables. C'est l'opération inverse d'*homogénéisation*.

12. DÉFINITIONS. — Soit $f \in k[X_1, \dots, X_n] \neq 0$. Si $d = \deg f$ et si $f = f_d + f_{d-1} + \dots + f_0$ où f_i est homogène de degré i , $i = 0, \dots, d$, on pose ${}^h f = f_d + X_0 f_{d-1} + \dots + X_0^d f_0$. ${}^h f$ est homogène en $X_0, \dots, X_n$ de degré d et ${}^h f(0, X_1, \dots, X_n) = \text{gr} f$, ${}^h f(1, X_1, \dots, X_n) = f$. Si I est un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$, on pose ${}^h I = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} ({}^h I)_s$ où $({}^h I)_s = \{X_0^k {}^h f, k \in \mathbb{N}, f \in I \text{ de degré } s - k\}$.

On vérifie que ${}^h I$ est un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$, que $I = {}^h I_0$ (au sens de 5.) et par suite que $V({}^h I) \cap V(X_0 - 1) = V(I)$.

13. LEMME. — X_0 est non diviseur de zéro dans $k[X_0, \dots, X_n]/{}^h I$.

Démonstration. — En effet, soit $g \in k[X_0, \dots, X_n]$ tel que $X_0 g \in {}^h I$. ${}^h I$ étant homogène, on peut supposer g homogène $\neq 0$. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ et $f \in I$, $f \neq 0$ tel que $X_0 g = X_0^k {}^h f$. Si $k \geq 1$, $g \in {}^h I$, par définition. $k = 0$ est impossible, car ${}^h f$ n'est pas divisible par X_0 .

13.1. REMARQUE . — ${}^h I$ est saturé. (8, 13, III.1.14.1).

14. PROPOSITION. — Soit $I = (f_1, \dots, f_s)$ un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. On suppose $f_i \neq 0$, $i = 1 \dots s$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) ${}^h I = ({}^h f_1, \dots, {}^h f_s)$
- ii) $\text{gr} I = (\text{gr} f_1, \dots, \text{gr} f_s)$
- iii) X_0 est non diviseur de zéro dans $k[X_0, \dots, X_n]/({}^h f_1, \dots, {}^h f_s)$.

Démonstration. —

i) $\Rightarrow$ ii). Soit $f \in I$, $f \neq 0$. Par hypothèse, il existe $g_i \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogènes, $i = 1 \dots s$ tels que ${}^h f = \sum_{i=1 \dots s} g_i {}^h f_i$. Substituant 0 à X_0 , nous obtenons $\text{gr} f = \sum_i g_i(0, X_1, \dots, X_n) \text{gr} f_i$.

i) $\Rightarrow$ iii) à cause de 13.

ii) $\Rightarrow$ i). Soit $g \in I$, $g \neq 0$ de degré d . Par hypothèse, il existe $g_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogènes, $i = 1 \dots s$ tels que $\text{gr} g = \sum_{i=1 \dots s} g_i \text{gr} f_i$.

Il en résulte que ${}^h g - \sum g_i {}^h f_i \in {}^h I \cap (X_0)$. Etant homogène de degré d , ce polynôme est de la forme $X_0^{k_1} {}^h g_1$ avec $k_1 \geq 1$ et $g_1 \in I$ de degré $d_1 = d - k_1 < d$, s'il n'est pas nul. Ainsi de suite, on détermine $g_{ij} \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogènes, $k_j \geq 1$, $g_j \in I$ de degré $d_j = d_{j-1} - k_j$, $i = 1 \dots s$, $j \geq 1$ tels que : $\text{gr} g_j = \sum_i g_{ij} \text{gr} f_i$, ${}^h g_j - \sum_i g_{ij} {}^h f_i = X_0^{k_{j+1}} {}^h g_{j+1}$. Ce processus s'arrête puisque la suite $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

iii) $\Rightarrow$ i). De façon générale, si $g_1, g_2 \in k[X_1, \dots, X_n]$,

$$X_0^{\deg g_1 + \deg g_2} {}^h g_1 + g_2 = X_0^{\deg(g_1 + g_2)} \left[X_0^{\deg g_2} {}^h g_1 + X_0^{\deg g_1} {}^h g_2 \right].$$

et

$${}^h g_1 {}^h g_2 = {}^h g_1 g_2.$$

Il en résulte que si $g \in I$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $X_0^k {}^h g \in ({}^h f_1, \dots, {}^h f_s)$. Mais si X_0 est non diviseur de zéro dans $k[X_0, \dots, X_n]/({}^h f_1, \dots, {}^h f_s)$, ${}^h g \in ({}^h f_1, \dots, {}^h f_s)$ et ${}^h I \subset ({}^h f_1, \dots, {}^h f_s)$.

14.1. REMARQUE . — Soit $\theta_{x_0} : k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$, $x_0 \in k$, le morphisme tel que $\theta_{x_0}(X_0) = x_0$, $\theta_i(X_j) = X_j$, $j = 1 \dots n$. Notons ${}^h I(x_0) = \theta_{x_0}(I)$. Nous avons : ${}^h I(0) = \text{gr} I$, ${}^h I(1) = I$. Nous avons construit une famille d'idéaux ${}^h I(x_0)$ paramétrée par X_0 "continue" en fonction de X_0 dont la valeur en 0 est $\text{gr} I$ et la valeur en 1, I . Pour illustrer cette idée de continuité, nous avons déjà remarqué (II.6.5.4) que $\dim V(\text{gr} I) = \dim V(I)$. Elle s'exprime algébriquement par le fait que X_0 étant non diviseur de zéro dans $k[X_0, \dots, X_n]/{}^h I$, $k[X_0, \dots, X_n]/{}^h I$ est un $k[X_0]$ -module libre. C'est la déformation au cône des directions asymptotiques.

Remarquons également que à cause de II.7.8.1, la dimension de l'ensemble algébrique $V({}^hI)$ de $\mathbf{A}_k^{n+1}$ est $\dim V(\text{gr}I) + 1$ donc aussi $\dim V(I) + 1$.

En particulier, si $\dim V(I) = 0$ (i.e. si le système n'a qu'un nombre fini de solutions), $V(\text{gr}I) = 0$. La variété projective $Y = V({}^hI) - \{0\} / \sim$ est toute entière contenue dans Z_0 .

14.2. REMARQUE . — Etant donné $f_1, \dots, f_s$ des polynômes $\neq 0$ de $k[X_1, \dots, X_n]$, on considère aussi dans la littérature le système ${}^h f_1, \dots, {}^h f_s$ appelé *système homogène associé au système* $f_1, \dots, f_s$.

Comme nous avons vu, cette opération dépend en général du choix de $f_1, \dots, f_s$ et non de l'idéal I qu'ils engendrent.

Si $H = ({}^h f_1, \dots, {}^h f_s)$ et si $H(x_0) = \theta_{x_0}(H)$ comme en 14.1, on a bien $H(1) = I$, mais il se peut que $\dim V(H(0)) > \dim V(H(1))$. La famille d'idéaux $H(x_0)$ n'est plus continue en fonction de X_0 .

Supposons par exemple que $\dim V(I) = 0$. Dire que $Y = V(H) - \{0\} / \sim$ n'est pas tout entier contenu dans $Z_0(\mathbf{P}_k^n - Z_0)$ étant appelé l'*hyperplan à l'infini* de $\mathbf{P}_k^n$, cela revient au même de dire que le système homogène ${}^h f_1, \dots, {}^h f_s$ a des solutions à l' ∞ est équivalent à dire qu'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}^n - \{0\}$ tel que $h(x_1, \dots, x_n) = 0$, $\forall h \in H(0)$ ou bien encore tel que : $\text{gr}f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, $i = 1 \dots s$. Si l est la droite de $\bar{k}^n$ joignant 0 à $(x_1, \dots, x_n)$, $\text{gr}f_i(x'_1, \dots, x'_n) = 0$, $i = 1 \dots s$, $\forall x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in l$. $V(H(0))$ n'est donc pas un ensemble fini et $\dim V(H(0)) > 0$. C'est ce qui se produit dans l'exemple II.1.5 avec $n = 2$, $s = 2$. On vérifie que : $X_0 {}^h f_4 = (X_2 - X_1 - 3X_0) {}^h f_1 + (X_1 + 2X_0) {}^h f_2$ alors que ${}^h f_4 \notin ({}^h f_1, {}^h f_2)$. Néanmoins, toujours si $\dim V(I) = 0$ et si $s = n$, si le système homogène ${}^h f_1, \dots, {}^h f_n$ n'a pas de solutions à l'infini, alors ${}^h I = ({}^h f_1, \dots, {}^h f_n)$.

En effet, dans $k[X_0, \dots, X_n]$ le système ${}^h f_1, \dots, {}^h f_n, X_0$ ne possède que la solution $(0, \dots, 0)$. On a donc $\dim V({}^h f_1, \dots, {}^h f_n, X_0) = 0$. D'après III.2.2, III.2.4, ${}^h f_1, \dots, {}^h f_n, X_0$ est donc une suite régulière de $k[X_0, \dots, X_n]$. En particulier, X_0 est non diviseur de zéro dans $k[X_0, \dots, X_n] / ({}^h f_1, \dots, {}^h f_n)$ et d'après 14, ${}^h I = ({}^h f_1, \dots, {}^h f_n)$. Cette propriété ne reste pas vraie si $s > n$, comme le montre l'exemple suivant : $n = 2$. $f_1 = X_1(X_1 + X_2)$, $f_2 = X_2(X_1 + X_2)$, $f_3 = X_1^2 + X_2^2 - 1$, $f_4 = (-1 + X_1 + X_2)(X_1 + X_2)$. On a $V(I)$ fini. Le système ${}^h f_1, \dots, {}^h f_4$ n'a pas de solutions à l' ∞ . Néanmoins, ${}^h I \neq ({}^h f_1, \dots, {}^h f_4)$ car $X_1 + X_2 \in I$ et $\text{gr}I \neq (\text{gr}f_1, \dots, \text{gr}f_4) \subset \oplus_{s \geq 2} k[X_1, \dots, X_n]_s$, puisqu'il contient $X_1 + X_2$.