

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Chapitre II Variétés symplectiques

Cours de l'institut Fourier, tome 18 (1982-1983), p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982-1983__18__A2_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE II

VARIETES SYMPLECTIQUES

Bibliographie pour le chapitre II :

[A-M] , [G-S] , [D] , [W] , [S] , [B-G] .

1. - RAPPELS SUR LES VARIETES

Les notions suivantes seront utilisées dans le cours :

- variété différentiable de classe C^∞ et de dimension d ; applications différentiables entre variétés ; sous-variétés ; plongements et submersions ;
- espace tangent, champ de vecteurs, flot d'un champ de vecteurs, crochet de 2 champs de vecteurs ;
- formes différentielles symétriques et antisymétriques. Dans le cas des formes antisymétriques : produit extérieur, produit intérieur. Image réciproque. Dérivée de Lie, formule $\mathcal{L}_V \omega = i(V)d\omega + d(i(V)\omega)$, $\mathcal{L}_V W = [V, W]$, $\mathcal{L}_V (i(W)\alpha) = i(W)\mathcal{L}_V \alpha + i([V, W])\alpha$;
- plus tard, on sera aussi amené à utiliser l'intégration des formes différentielles, la formule de Stokes ;

Toutes ces choses sont traitées dans [B-G], [S] et dans de nombreux traités de géométrie différentielle par exemple : Pham Mau Quam (introduction à la géométrie des variétés différentiables), Lelong-Ferrand (géométrie différentielle), Flanders (Differential forms with applications to the Physical Sciences), etc...

Sujet de réflexion : définition intrinsèque des opérateurs div , grad , rot .

Exercice. Formule pour la dérivée de Lie d'une forme symétrique.

Application : $g = \sum (dx_i)^2$, chercher les γ tels que $\mathcal{L}_\gamma g = 0$ et donner une interprétation du flot de ces champs.

2 . - VARIETES SYMPLECTIQUES

DEFINITION. - Une variété symplectique est la donnée d'un couple
 (X, ω) où X est une variété C^∞ et ω une 2-forme antisymétrique non dégénérée et fermée sur X .

Remarque 1. - Si on demandait à ω d'être symétrique, on obtiendrait la notion de variété (pseudo) riemannienne.

Remarque 2. - ω non dégénérée signifie $\forall x^\circ \in X$, $\omega(x^\circ) \in \Lambda^2(T_{x^\circ}X)$ est non dégénérée : $(T_{x^\circ}X, \omega(x^\circ))$ est un espace symplectique.

En particulier : la dimension de toute variété symplectique est
paire. Toute variété symplectique est munie canoniquement d'une orientation
et d'une forme volume $\Omega = \frac{1}{n} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n$ où $2n = d$.

Exemple fondamental. On définit pour $x^\circ \in X$, $T_{x^\circ}^*X = (T_{x^\circ}X)^*$: $T_{x^\circ}^*X$ est l'ensemble des $df(x^\circ)$ où $f \in C^\infty(X; \mathbb{R})$: $T^*X = \bigcup_{x^\circ \in X} T_{x^\circ}^*X$ est muni canoniquement d'une structure de variété différentiable : si (U, φ) est une carte de X , on construit une carte $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ de $\pi^{-1}(U)$ où $\pi : T^*X \rightarrow X$ est la projection canonique.

$$\Phi^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

est défini par

$$\Phi^{-1}(x_1, \dots, x_d, \xi_1, \dots, \xi_d) = \sum \xi_i dx_i \in T_{\varphi(x)}^*X.$$

Nous appellerons carte "naturelle" de T^*X une telle carte.

Exercice. Ecrire les changements de cartes.

Sur T^*X on définit la 1-forme canonique α de la façon suivante : soit $(x, \lambda) \in T^*X$, c'est-à-dire $x \in X$, $\lambda \in T_x^*X$. Si $v \in T_{(x, \lambda)}(T^*X)$, on pose :

$$\alpha(v) = \lambda(d\pi_{x, \lambda}(v)).$$

En coordonnées locales $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$.

PROPOSITION. - La forme $\omega = -d\alpha$ définit sur T^*X une structure symplectique ; on a en coordonnées locales $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$ et $\Omega = dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge d\xi_n$.

En mécanique X s'appelle l'espace des positions et T^*X est l'espace des phases : x est la position, $\lambda \in T_x^*X$ est l'impulsion du système. La notation traditionnelle des mécaniciens est $x = q = (q_1, \dots, q_n)$; $\xi = p = (p_1, \dots, p_n)$, $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i = -d(\sum p_i dq_i)$. La notation (x, ξ) est plutôt celle des analystes (cf. travaux de Hörmander sur les opérateurs intégraux de Fourier).

3 . - THEOREME DE DARBOUX.

Comment est faite localement une variété symplectique : la réponse est donnée par le théorème de Darboux :

THEOREME. - Si (X, ω) est symplectique et $x^0 \in X$ il existe au voisinage de x^0 des coordonnées locales canoniques, i.e. dans lesquelles ω s'écrit $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$.

Remarque. - Le même théorème est faux en géométrie riemannienne : une métrique de la forme $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ (i.e. localement euclidienne) n'a pas de courbure : toute métrique riemannienne ayant de la courbure n'est pas de cette forme.

Preuve. - En adaptant une méthode de J. Moser, A. Weinstein a donné une preuve élégante du théorème de Darboux (cf. [W] 5.1 à 5.3) que nous indiquons : soit ω une structure symplectique dans un voisinage de 0

de $\mathbb{R}^{2n}$. On peut par un changement linéaire symplectique (chap. 1) supposer que $\omega(0) = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$: soit $\omega_1 = \omega$ et $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$. On pose $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. Dans un voisinage de 0, ω_t est non dégénérée pour $t \in [0, 1]$. On cherche une famille φ_t de germes de difféomorphismes au voisinage de 0 tels que $\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0$, $\varphi_0 = \text{Id}$.

Par dérivation, si $\xi_t(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt} \varphi_t(x)$, on a :

$$\varphi_t^* \left(\frac{d\omega_t}{dt} \right) + \varphi_t^* (\mathcal{L}_{\xi_t}(\omega_t)) = 0.$$

Soit encore :

$$d(i(\xi_t)\omega_t) = -(\omega_1 - \omega_0).$$

Soit alors α telle que $d\alpha = -(\omega_1 - \omega_0)$ avec $\alpha(0) = 0$. On déduit de l'équation $i(\xi_t)\omega_t = \alpha$ un champ de vecteur $(\xi_t)_{t \in [0, 1]}$ défini au voisinage de 0 et tel que $\xi_t(0) \equiv 0$. Utilisant le fait que l'ensemble de définition des solutions

maximales de :
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \xi_t(x) \\ x(0) = \alpha_0 \end{cases}$$
 est un ouvert contenant $[0, 1] \times \{0\}$ on conclut

à l'existence de φ_t dans un voisinage fixe de 0 et $t \in [0, 1]$ et l'on voit en remontant le calcul que $\varphi_1^*(\omega_1) = \omega_0$, ce qui est l'énoncé de Darboux.

Exercice. Soit X une variété de dimension 2, ω_0 et ω_1 deux structures symplectiques sur X , montrer qu'une CNS pour qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : X \rightarrow X$ tel que $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$ est $\int_X \omega_0 = \int_X \omega_1$.

Nous verrons ultérieurement d'autres problèmes de forme normale plus compliqués : coordonnées actions-angles, lemme de Morse avec forme volume.

4 . - SYSTEMES HAMILTONIENS.

Soit $f \in C^\infty(X; \mathbb{R})$ où (X, ω) est une variété symplectique de dimension $2n$. On définit le gradient symplectique H_f de f par la formule

$$\boxed{i(H_f)\omega = df} .$$

Dans les coordonnées canoniques on a :

$$H_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} .$$

Les trajectoires de H_f vérifient donc l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \\ \frac{d\xi_i}{dt} = - \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{cases} .$$

Ces équations s'appellent équations canoniques ou de Hamilton ; f s'appelle l'hamiltonien du système (ou énergie).

PROPRIETES DE H_f . - Si φ_t est le flot de H_f , on a les deux propriétés de conservation : $\varphi_t^*(\omega) = \omega$ (et donc $\varphi_t^*(\Omega) = \Omega$ si $\Omega = \frac{1}{n!} \omega \wedge \dots \wedge \omega$ est le volume) et $f \circ \varphi_t = f$.

Preuve . - $\frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega) \big|_{t=0} = \mathcal{L}_{H_f} \omega = i(H_f) d\omega + d(i(H_f)\omega) = 0 + d(df) = 0$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t) \big|_{t=0} = df(H_f) = \omega(H_f, H_f) = 0 .$$

La conservation du volume est connue sous le nom de théorème de Liouville.

Une conséquence amusante est la suivante : si $\int_X \Omega < +\infty$, on a le théorème

de retour de Poincaré : $\forall x \in X$, $\forall U$ voisinage de x , $\forall T$, $\exists t$,

$\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset$ et $t \geq T$: sinon $\exists U$, $\text{vol}_\Omega(U) > 0$ et $T_n \rightarrow +\infty$.

$\varphi_{T_n}(U) \cup \varphi_{T_m}(U) = \emptyset$ ($\forall n \neq m$) : d'où contradiction.

Réciproques. - Soit V tel que $\mathcal{L}_V \omega = 0$, on a $d(i(V)\omega) = 0$ et donc localement $i(V)\omega = df$, c'est-à-dire $\omega = H_f$. C'est vrai globalement si $H^1(X) = 0$.

Cas homogène. Si $X = T^*(Y)$, $h = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ est le générateur des homothéties, $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$ et V un champ de vecteur tel que $\mathcal{L}_V \omega = 0$, $[V, h] = 0$ (V commute aux homothéties), on a : $V = H_f$ avec $f = \alpha(V)$.

Preuve. - $\alpha = -i(h)\omega$ et donc $\mathcal{L}_V \alpha = 0$, $i(V)d\alpha + d(i(V)\alpha) = 0$: $df = i(V)\omega$: c'est-à-dire $V = H_f$.

Crochets de Poisson. Pour $f, g \in C^\infty(X; \mathbb{R})$, on pose

$$\{f, g\} = df(H_g) = -dg(H_f) = \omega(H_f, H_g).$$

$\{f, g\}$ s'appellent crochet de Poisson de f et g . Il est visiblement bilinéaire antisymétrique et satisfait l'identité de Jacobi :

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

Cette identité est en fait équivalente à $H_{\{f, g\}} = [H_f, H_g]$.

Preuve de l'équivalence.

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\} &= -dh(H_{\{f, g\}}) \\ \{f, \{g, h\}\} &= -\{f, d_h(H_g)\} = d(dh(H_g)) \cdot (H_f) = \frac{\partial^2 h}{\partial H_f \partial H_g}. \end{aligned}$$

Donc : Jacobi équivaut à :

$$\frac{\partial h}{\partial H_{\{f, g\}}} = \frac{\partial^2 h}{\partial H_g \partial H_f} - \frac{\partial^2 h}{\partial H_f \partial H_g} = \frac{\partial h}{\partial [H_f, H_g]}.$$

Preuve de Jacobi. $\omega(H_g, \cdot) = dg$, on prend la dérivée de Lie par rapport à H_f :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H_f} dg &= d(\mathcal{L}_{H_f} g) = d(dg(H_f)) = -d(\{f, g\}) \\ \mathcal{L}_{H_f} (i(H_g)\omega) &= -\omega([H_f, H_g], \cdot). \end{aligned}$$

Donc :

$$H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g] .$$

COROLLAIRE 1. - L'application $f \mapsto H_f$ de $(C^\infty(X), \{ \cdot, \cdot \})$ dans $(\mathcal{V}(X), [\cdot, \cdot])$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie.

Exercice. Soit V_1, V_2, V_3 tels que $\mathcal{L}_{V_1} \omega = 0$ et $[V_1, V_2] = V_3$. Prouver que $V_3 = H_f$ avec $f = \omega(V_1, V_2)$.

COROLLAIRE 2. - Si $\{f, g\} = 0$, les champs H_f, H_g commutent.

5. - VARIETES LAGRANGIENNES. TRANSFORMATIONS CANONIQUES.

DEFINITION. - Soit (X, ω) une variété symplectique, $Y \subset X$ une sous-variété et $j : Y \rightarrow X$ l'injection canonique. On dit que Y est

- symplectique si $(Y, j^*(\omega))$ l'est (alors dimension (Y) est paire).
- isotrope si $j^*(\omega) = 0$.
- lagrangienne si elle est isotrope de dimension maximale $\frac{1}{2}$ dimension (X) .

Exemple 1. - Soit $Y \subset T^*(X)$ et supposons que $\pi : Y \rightarrow X$ (restriction de la projection canonique) soit un difféomorphisme, alors $Y = \{(x, \beta(x)) \mid x \in X\}$ et α est une 1-forme différentielle sur X ; on a alors :

$$\boxed{Y \text{ lagrangienne} \Leftrightarrow d\beta = 0} .$$

Donc localement (et globalement si $H^1(X) = 0$) on a :

$$Y = \{(x, df(x)) \mid x \in X\} .$$

Preuve. - On a $j^*(\alpha) = \sum y_i(x) dx_i = \beta$ (on a paramétré Y par $\pi^{-1} : X \rightarrow Y$). Donc $j^*(\omega) = 0 = d(\beta) = 0$.

Exemple 2. - $\chi : (X_1, \omega_1) \rightarrow (X_2, \omega_2)$ est dite canonique (ou symplectomorphisme) si c'est un difféomorphisme de X_1 sur X_2 tel que $\chi^*(\omega_2) = \omega_1$. Soit $Y \subset X_1 \times X_2$ le graphe de χ ; si on équipe $X_1 \times X_2$ de la forme $\omega_2 - \omega_1$, on a : Y lagrangienne $\Leftrightarrow \chi$ canonique.

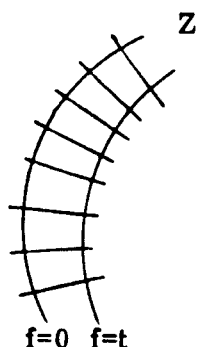
Utilisant des coordonnées naturelles dans le cas où $X_1 = X_2 = T^*X$ on est amené à supposer que l'application $Y \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui a $(x, \xi, x', \xi') \rightsquigarrow (\xi, x')$ est un difféomorphisme ce qui est le cas si $\chi = \text{Id}$ et donc si χ est proche de l'identité : alors il existe une fonction $\phi(x, \xi)$ telle que :

$$Y = \left\{ \left(x + \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \xi ; x', \xi_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \mid (\xi, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \right\}$$

(preuve = exercice) ; ϕ est appelée fonction génératrice de χ .

Application des variétés lagrangiennes à la résolution de $F(x, d_x f) = 0$.

Supposons F de classe C^∞ si $f(x)$ est une solution de $F(x, \frac{\partial f}{\partial x_1}) = 0$ on peut associer à f la variété lagrangienne $\Lambda_f = \{x, d_x f\} \subset T^*X$. On est donc amené à chercher des variétés lagrangiennes dans T^*X qui sont contenu dans $F = 0$. On a alors : H_F est tangent à Λ : en effet $dF(V) = \omega(H_F, V)$ et donc si V tangent à Λ , H_F est ω -orthogonal à V et comme $T_{\lambda_0} \Lambda$ est lagrangien, H_F est tangent à Λ . D'où la construction : on choisit une variété isotrope $Y \subset \{F = 0\}$ de dimension $n-1$ telle que H_F soit transverse à Y et on pose $\Lambda = \bigcup_{t \text{ petit}} \varphi_t(Y)$. On est alors amené à regarder si $\pi : \Lambda \rightarrow X$ est un difféomorphisme local. Exemple : $F = \sum \xi_i^2 - 1$. On prend $Y = \{(y, v)\}$ où $y \in Z$ sous-variété de codim 1 de X et $v \in N^*(Z)$ vérifie $F(y, v) = 1$: $Y \subset N^*(Z)$ est isotrope et contenue dans $F = 0$.



on a dessiné sur la figure les lignes de niveau de f ($f = 0 \Leftrightarrow x \in Z$) .

Systèmes complètement intégrables. (X, ω) symplectique, $f = f_1$ un hamiltonien, on dit que f_1 est complètement intégrable s'il existe $f_2, \dots, f_n \in C^\infty(X)$ telles que $\{f_i, f_j\} = 0$ ($\forall i, j$) et les différentielles df_i sont linéairement indépendantes en (presque) tout point de X . Les variétés de niveau $X_{a_1, \dots, a_n} = \{f_i = a_i\}$ sont alors lagrangiennes et leur espace tangent est engendré par les H_{f_i} qui vérifient du reste $[H_{f_i}, H_{f_j}] = 0$: on a donc localement une action de $\mathbb{R}^n$ sur $X_{a_1, \dots, a_n}$: si les champs sont complets les variétés X_a sont donc des quotients de $\mathbb{R}^n$ (le chapitre 4 sera consacré à l'étude de ces systèmes).

Exercice 1. Soit $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$ et $\chi_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$. Pour quelles valeurs de θ , χ_θ admet-elle une fonction génératrice $f(y, x_1)$? ($\chi(x, y) = (x_1, y_1)$). Calculer f .

Exercice 2. Soit $\chi : (\mathbb{R}^2, dx \wedge dy) \rightarrow (\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$ une transformation canonique qui conserve les lignes $y = c^{te}$ ($y_1 = y$). Prouver que χ est de la forme $x_1 = x + F(y)$, $y_1 = y$.

Exercice 3. Soit ω une structure symplectique arbitraire sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. On pose $p(x, y) = \iint_{0 \leq y' \leq y} \omega$. Prouver que si $\text{Im}(p) =]a, b[$, il existe un difféomorphisme canonique $\chi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times]a, b[$ tel que $\chi^*(d\theta \wedge dp) = \omega$ et $p \circ \chi = p(x, y)$.

Exercice 4. Soit ω la structure symplectique (au sens formel) sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par $\omega(f, g) = \iint K(x, y) f(x) g(y) dx dy$, $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $K(x, y) = \text{sgn}(y-x)$. Soit $F(f) = \int_{\mathbb{R}} P(f, f') dx$, en utilisant la formule du calcul des variations (cf. Cartan : Calcul diff. et formes diff.), calculer H_F (formellement). Soit $F_1(f) = \int f^2 dx$ et $F_2(f) = \int f^2 + 4f'^3$, prouver que $\{F_1, F_2\} = 0$. [cf. Faddeev + Zakharov ; Funct. analysis 5 (1971)].

Exercice 5. Soit $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et supposons donnée une action symplectique homogène de G sur $T^*(X)$ (par exemple induite par une action sur X), on pose $f_2 = \alpha(\frac{\partial}{\partial \theta})$ où $\frac{\partial}{\partial \theta}$ est le générateur infinitésimal du groupe φ_θ . Soit $f_1 \in C^\infty(X; \mathbb{R})$ telle que $f_1 \circ \varphi_\theta = f_1$ ($\forall \theta \in G$). Prouver que $\{f_1, f_2\} = 0$.

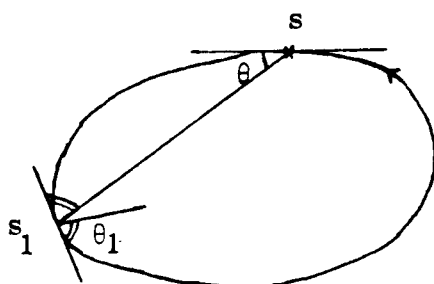
Exemple. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f_1(x, \xi) = \frac{1}{2} |\xi|^2 + V(|x|)$. Etudier les sous-ensemble $X_{a,b} = \{f_1 = a, f_2 = b\}$. Pour quelles valeurs de (a, b) , $X_{a,b}$ est-elle une sous-variété lagrangienne de $T^*(X)$; pour quelles valeurs de (a, b) est-ce un tore ? cas où $V(|x|) = -\frac{1}{|x|}$.

Exercice 6. On admettra que si X est simplement connexe et β est une 1-forme sur X telle que $d\beta = 0$ alors $\beta = df$. Soit $\Lambda \subset T^*X$ une variété

lagrangienne telle que $\pi : \Lambda \rightarrow X$ est un difféomorphisme. Prouver que si X est compacte, $\Lambda \cap \Lambda_0$ contient au moins deux points (Λ_0 correspond au graphe de la forme $\beta = 0$). Est-ce le cas si X n'est pas simplement connexe ? [cf. Weinstein, Ann. of Math. 98 (1973), pp. 377-410].

Exercice 7. Soit $f(x, \theta) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $X = \{(x, \theta) \mid \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0\}$. On suppose que $d(\frac{\partial f}{\partial \theta}) \neq 0$ sur X et soit $j : X \rightarrow T^*(\mathbb{R}^n)$ définie par $j(x, \theta) = (x, d_x f)$. Prouver que si ω est la structure symplectique sur $T^*\mathbb{R}^n$, $j^*(\omega) = 0$ et donc que si j est un plongement, son image est lagrangienne. [cf. [D]].

Exercice 8.



1) Soit Γ une courbe convexe de $\mathbb{R}^2$ de longueur L et $X = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times]-1, +1[$. On considère sur X la transformation $T(s, \cos \theta) = (s_1, \cos \theta_1)$ où s, s_1 sont les abscisses curvilignes sur Γ et T est définie sur la figure. Prouver que T est canonique en utilisant la fonction génératrice $f(s, s_1) = d(m(s), m(s_1))$ où d est la distance euclidienne.

2) Dans le cas où Γ est une ellipse de foyer F, F' , on pose $g(s, \cos \theta) = d^2 \cdot d'^2$ où d (resp. d') est la distance de F (resp. F') à la corde $m(s)m(s_1)$. Prouver que $g \circ T = g$. Tracer l'allure des lignes de niveaux de g . [cf. G. BIRKHOFF, Dynamical systems p. 169 et suivantes].

Exercice 9. Soit $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction telle que $V(0) = 0$, $V'(x) \operatorname{sgn}(x) > 0$ et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. Soit sur $T^*\mathbb{R}$, $f(x, \xi) = \frac{1}{2} \xi^2 + V(x)$.

Prouver que les trajectoires de H_f sont périodiques de période $T(E)$ (si

la trajectoire est $\subset \{f=E\}$. Soit $A(E) = \iint_{f \leq E} dx \wedge d\bar{s}$. Prouver que $T(E) = \frac{dA}{dE}(E)$. En déduire la construction de $V \neq \frac{1}{2}x^2$ tels que $T(E) \equiv 2\pi$. Est-ce possible avec V pair. Montrer (plus difficile) que A et T sont des fonctions C^∞ de E ($E \geq 0$) en supposant $V''(0) > 0$. Dans le cas du pendule simple $V(x) = 1 - \cos x$ (x voisin de 0), prouver que $T(E)$ est une fonction analytique de E dont on calculera le développement de Taylor.

Exercice 10. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telle que $\sum (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 = 1$, montrer que f est une fonction affine.