

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

A. KANEKO

Chapitre IV. Cohomologie à valeurs dans un faisceau

Cours de l'institut Fourier, tome 12 (1977-1978), p. 85-119

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__12__85_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE IV. COHOMOLOGIE A VALEURS DANS UN FAISCEAU.

1. Faisceaux flasques

Nous continuons davantage l'étude de faisceaux flasques pour introduire la théorie de la cohomologie.

Definition 4.1.1 Soient $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace topologique X et $S \subset X$ un sous ensemble localement fermé (i.e. l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.) On pose

$$\Gamma_S(X, \mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(U); \text{supp}(s) \subset S\},$$

où U est un ouvert qui contient S comme un fermé et appelé un voisinage de S .

Cette définition ne dépend pas du choix de U : Soit en effet U_1, U_2 deux voisinages de S . Alors $U_1 \cap U_2$ en est un. Donc en supposant que $U_1 \supset U_2$, il suffit de vérifier que la restriction

$$\{s \in \mathcal{F}(U_1); \text{supp } s \subset S\} \mapsto \{s \in \mathcal{F}(U_2); \text{supp } s \subset S\}$$

est bijective. Mais c'est clair. On notera aussi $\Gamma_S(U, \mathcal{F})$ au lieu de $\Gamma_S(X, \mathcal{F})$. Notons que si $S = U$ est un ouvert on a $\Gamma_U(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$. Dans ce cas on utilisera aussi la notation $\Gamma(U, \mathcal{F})$. pour ceci.

Proposition et

Définition 4.1.2 Soient $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $S \subset X$ localement fermé. La donnée $U \mapsto \Gamma_{S \cap U}(X, \mathcal{F})$ constitue un faisceau qu'on note par $\Gamma_S(\mathcal{F})$.

→ Notons que si $S = U$ est ouvert, $\Gamma_U(\mathcal{F})$ n'est autre que $\mathcal{F}|_U$, la restriction de $\mathcal{F}$ sur U .

Lemme 4.1.3 Si $\mathcal{F}$ est flasque, il en est de même de $\Gamma_S(\mathcal{F})$.

Démonstration Soit $V \supset S$ un voisinage. Pour un ouvert quelconque U ,

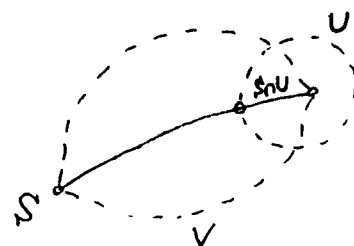
$V \cap U$ est un voisinage de $S \cap U$, donc

$$\Gamma_S(\mathcal{F})(U) = \Gamma_{S \cap U}(X, \mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(V \cap U); \text{supp } s \subset S \cap U\}.$$

Pour un élément s quelconque de cet espace, posons

$$s' = \begin{cases} s & \text{sur } V \cap U \\ 0 & \text{sur } V \setminus \overline{\text{supp } s}, \end{cases}$$

$\Gamma_S(\mathcal{F})$ étant un faisceau sur X , il est aussi considéré comme un sur S en vertu de la remarque ci-dessus.



où le tiret désigne l'adhérence dans V . Cette définition est compatible sur l'intersection $V \cap U \setminus \text{supp } s$, donc définit une section $\underset{\wedge}{s'}$ de $\mathcal{F}$ sur $(V \cap U)^0$ ($V \setminus \overline{\text{supp } s} = V \setminus (\overline{\text{supp } s} \setminus \text{supp } s$). Puisque $\mathcal{F}$ est flasque il existe $\tilde{s} \in \mathcal{F}(V)$, un prolongement de s' . On a $\text{supp } \tilde{s} \subset \overline{\text{supp } s} \subset S$, d'où $\tilde{s} \in \Gamma_S(\mathcal{F})(V)$ est un prolongement voulu de s . C.Q.F.D.

Lemme 4.1.4 Soient $\mathcal{F}', \mathcal{F}, \mathcal{F}''$ des faisceaux sur X et $U \subset X$ un ouvert, $S \subset X$ localement fermé.

a) Si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{h'} \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{F}''$ est une suite exacte de faisceaux, alors les suites suivantes sont exactes:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{h'_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{h_U} \mathcal{F}''(U),$$

$$0 \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}'').$$

b) Si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{h'} \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ est exact et que $\mathcal{F}'$ est flasque, alors

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{h'_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{h_U} \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

sont aussi exacts.

Démonstration Les premières suites étant des cas particuliers des secondes, il suffit de démontrer celles-ci. Soit donc $U \supset S$ un voisinage.

a) Supposons que $s' \in \mathcal{F}'(U)$ satisfait à $h'_U(s') = 0$. Par l'injectivité de h' les germes de s' dans U sont nuls, donc $s' = 0$ par la propriété FI (voir la Définition 1.2.2). De la même manière on vérifiera $h_U \circ h'_U = 0$. Soit enfin $s \in \mathcal{F}(U)$ tel que $h_U(s) = 0$. Par l'exactitude de la suite de faisceaux, pour tout $x \in U$ il existe un germe (unique) de section $s'_x \in \mathcal{F}'_x$ tel que $h'(s'_x) = s_x$. Puisque s'_x sont uniques, ils se recollent à une section globale $s' \in \mathcal{F}'(U)$ satisfaisant à $h'_U(s') = s$. Aussi par unicité on a $\text{supp } s' \subset \text{supp } s \subset S$.

b) Il reste à démontrer la surjectivité. Soit $s'' \in \Gamma_S(U, \mathcal{F}'')$ un élément quelconque. Considérons l'ensemble suivant:

$$\mathcal{M} = \{(s, V); V \subset U \text{ ouvert, } s \in \Gamma_{S \cap V}(V, \mathcal{F}), h_V(s) = s''\}.$$

Avec l'ordre naturel:

$$(s_1, V_1) \succ (s_2, V_2) = V_1 \supset V_2, \quad s_1|_{V_2} = s_2,$$

$\mathcal{M}$ devient un ensemble inductivement ordonné non vide. Montrons en effet un élément de $\mathcal{M}$. Prenons $x \in U$ quelconque. Par hypothèse il existe un voisinage V_x de x et $s_x \in \mathcal{F}(V_x)$ tels que $h_{V_x}(s_x) = s''|_{V_x}$. Modifions s_x de façon que son support soit contenu dans S . Considérons $s_x|_{V_x \setminus S} \in \text{Ker } h$. D'après a) il existe $s' \in \mathcal{F}'(V_x \setminus S)$ tel que $h'(s') = s_x|_{V_x \setminus S}$. Prenons un prolongement $\tilde{s}' \in \mathcal{F}'(V_x)$ en utilisant la flasquité de $\mathcal{F}'$. Alors $s_x - h'(\tilde{s}')$ est un élément bien défini et $(s_x - h'(\tilde{s}'), V_x) \in \mathcal{M}$.

Ainsi d'après le lemme de Zorn $\mathcal{M}$ contient un élément maximal (s, V) .

On prétend que $V = U$: Supposons le contraire et soit $x \in U \setminus V$. Par l'argument ci-dessus il existe un voisinage V_x de x et $s_x \in \Gamma_{S \cap V_x}(V_x, \mathcal{F})$ tel que $h_{V_x}(s_x) = s''|_{V_x}$. Puisque $h(s|_{V \cap V_x} - s_x|_{V \cap V_x}) = 0$, il existe d'après a) $s' \in \Gamma_{S \cap V \cap V_x}(V \cap V_x, \mathcal{F}')$ tel que $h'(s') = s|_{V \cap V_x} - s_x|_{V \cap V_x}$. En vertu de la flasquité de $\mathcal{F}'$ on peut trouver $\tilde{s}' \in \Gamma_{S \cap V_x}(V_x, \mathcal{F}')$ qui prolonge s' (Lemme 4.1.3).

Posons donc

$$\tilde{s} = \begin{cases} s & \text{sur } V, \\ s_x + h'(\tilde{s}') & \text{sur } V_x. \end{cases}$$

Ainsi on obtiendrait un élément $(\tilde{s}, V \cup V_x) \in \mathcal{M}$ plus grand que (s, V) ; une contradiction. C.Q.F.D.

Corollaire 4.1.5 Soit $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{h'} \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux.

- a) Si $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$ sont flasques, $\mathcal{F}''$ en est aussi.
- b) Si $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ sont flasques, $\mathcal{F}$ en est aussi.

Démonstration On a le diagramme commutatif avec les lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F}'(X) & \xrightarrow{h'_X} & \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{h_X} & \mathcal{F}''(X) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \rho'_{UX} & & \downarrow \rho_{UX} & & \downarrow \rho''_{UX} \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{h'_U} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0 \end{array}$$

Dans le cas a), ρ_{UX} et h_U sont surjectifs. Donc étant donné $s'' \in \mathcal{F}''(U)$,

on peut trouver $s \in \mathcal{F}(X)$ tel que

$$s'' = h_U \circ \rho_{UX}(s) = \rho_{UX}'' \circ h_X(s).$$

$h_X(s) \in \mathcal{F}''(X)$ étant le prolongement de s'' , $\mathcal{F}''$ est flasque.

Dans le cas b), ρ_{UX}'' et h_X sont surjectifs. Etant donné $s \in \mathcal{F}(U)$, il existe donc $\tilde{s} \in \mathcal{F}(X)$ tel que

$$h_U(s) = \rho_{UX}'' \circ h_X(\tilde{s}) = h_U \circ \rho_{UX}(\tilde{s}),$$

donc $h_U(s - \rho_{UX}(\tilde{s})) = 0$ et $s - \rho_{UX}(\tilde{s})$ provient d'un élément de $\mathcal{F}'(U)$.

Puisque ρ_{UX}' est surjectif, celui-ci provient d'un élément $\tilde{s}' \in \mathcal{F}'(X)$, d'où

$$s - \rho_{UX}(\tilde{s}) = h_U' \circ \rho_{UX}'(\tilde{s}') = \rho_{UX} \circ h_X'(\tilde{s}').$$

Ainsi

$$s = (s - \rho_{UX}(\tilde{s})) + \rho_{UX}(\tilde{s}) = \rho_{UX}(h_X'(\tilde{s}') + \tilde{s}). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 4.1.6 Soit $0 \rightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{h^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{h^1} \dots \rightarrow \mathcal{F}^r \xrightarrow{h^r} \mathcal{O}_f \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux. Si $\mathcal{F}^j$, $0 \leq j \leq r$ sont tous flasques, il en est de même de $\mathcal{O}_f$. Dans ce cas on a les suites exactes des sections

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^0(U) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^r(U) \rightarrow \mathcal{O}_f(U) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}^0) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}^r) \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{O}_f) \rightarrow 0.$$

Démonstration On décompose la suite donnée en petits morceaux:

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{h^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{h^1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{h^2} \mathcal{F}^3 \xrightarrow{h^3} \dots$$

où $\mathcal{O}_f^j = \text{Im } h^j = \text{Ker } h^{j+1}$. D'après le Corollaire 4.1.5 $\mathcal{O}_f^j$ sont tous flasques et donc en vertu du Lemme 4.1.4 on obtient les petites suites exactes:

$$0 \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{O}_f^j) \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}^j) \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{O}_f^{j+1}) \rightarrow 0.$$

On n'a qu'à les recoller à une suite longue comme le procédé réciproque de (4.1). C.Q.F.D.

Définition 4.1.7 Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X . Une résolution flasque de $\mathcal{F}$ est une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^0 \rightarrow \mathcal{L}^1 \rightarrow \dots$ où les $\mathcal{L}^j$ sont flasques. La longueur de la résolution est le plus petit nombre r tel

que $\mathcal{L}^j = 0$ pour $j > r$. On dit que la dimension flasque de $\mathcal{F}$ est r s'il existe une résolution flasque de $\mathcal{F}$ de longueur r mais non de longueur inférieure. On notera $r = \dim \text{fl } \mathcal{F}$.

Lemme et Définition 4.1.8 Il existe toujours une résolution flasque.
 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$
 De plus il en existe une de type canonique $\wedge$ qu'on va donner dans la démonstration ci-dessous. On l'appelle la résolution flasque canonique.

Démonstration Fabriquons d'abord un faisceau flasque $\mathcal{L}$ tel que $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}$ soit exact. Soit $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ le faisceau de sections discontinues de $\mathcal{F}$ i.e. le faisceau ~~associé à~~ défini par

$$U \mapsto \{s: U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \text{ application quelconque}\}.$$

Il est clair que $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ est un faisceau flasque et $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ exact. Pour fabriquer la résolution on peut continuer ce procédé pour $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})/\mathcal{F}$ etc. C.Q.F.D.

Soit $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorphisme de faisceaux. Il induit des homomorphismes $h^j: \mathcal{C}^j(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^j(\mathcal{G})$ entre leur résolutions canoniques et un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) & \rightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) & \rightarrow & \dots \\ & & h \downarrow & & h^1 \downarrow & & \\ 0 \rightarrow \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) & \rightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Le lemme suivant est clair par la définition de la résolution canonique:

Lemme 4.1.9 Soit $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux. Alors les suites $0 \rightarrow \mathcal{C}^j(\mathcal{F}') \rightarrow \mathcal{C}^j(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^j(\mathcal{F}'') \rightarrow 0$ induite comme ci-dessus sont aussi exactes.

Bien que la résolution canonique soit utile théoriquement, elle est loin de servir au calcul pratique. On donnera ultérieurement des exemples concrets de la résolution flasque moyennant le faisceau des hyperfonctions. Autre que cela des résolutions flasques concrètes sont peu connues. On est donc obligé d'employer des résolutions moins efficaces que des résolutions ^{ici} flasques. Nous en donnerons $\wedge$ quelques exemples bien connus.

Exemple 4.1.10 a) Résolution de de Rham

$$(4.2) \quad 0 \rightarrow C \rightarrow E^{(0)} \xrightarrow{d^0} E^{(1)} \xrightarrow{d^1} \dots \rightarrow E^{(n)} \rightarrow 0,$$

où $E^{(k)}$ désigne le faisceau des germes de k -formes différentielles de classe C^∞ sur R^n , et d^k la différentiation extérieure. L'exactitude de cette suite est connue comme le lemme de Poincaré. On a aussi sur C^n une suite pareille:

$$(4.3) \quad 0 \rightarrow C \rightarrow \mathcal{O}^{(0)} \xrightarrow{d^0} \mathcal{O}^{(1)} \xrightarrow{d^1} \dots \rightarrow \mathcal{O}^{(n)} \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{O}^{(k)}$ désigne le faisceau des germes de k -formes holomorphes, i.e.

$$\sum F_{j_1 \dots j_k}(z) dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_k}$$

où $F_{j_1 \dots j_k}(z)$ sont des germes de fonctions holomorphes. La démonstration de l'exactitude est pareille au cas réel. En restreignant (4.3) sur R^n on obtient une résolution sur R^n qui est un analogue de (4.2) avec E remplacé par A .

Les résolutions s'apportent de façon évidente sur une variété avec la régularité correspondante.

b) Résolution de de Rham relative Soit (x,y) les coordonnées de R^{d+n} , E_y le faisceau de fonctions de classe C^∞ en y seuls, et $E_y^{(k)}$ le faisceau de k -formes relatives de classe C^∞ , i.e.

$$\sum f_{j_1 \dots j_k}(x,y) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

où $f_{j_1 \dots j_k}(x,y)$ sont des germes de fonctions de classe C^∞ en x, y . On a la résolution suivante:

$$(4.4) \quad 0 \rightarrow E_y \rightarrow E_y^{(0)} \xrightarrow{d_x^0} E_y^{(1)} \xrightarrow{d_x^1} \dots \rightarrow E_y^{(d)} \rightarrow 0,$$

dont l'exactitude se démontre parallèlement au cas absolu. De même on a une suite pareille sur C^{d+n} à coordonnées z, w :

$$(4.5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_w \rightarrow \mathcal{O}_w^{(0)} \xrightarrow{d_z^0} \mathcal{O}_w^{(1)} \xrightarrow{d_z^1} \dots \rightarrow \mathcal{O}_w^{(d)} \rightarrow 0.$$

La forme intrinsèque de ces résolutions est la suivante: Soit $\varphi: M \rightarrow N$ une application lisse de variétés. Soit $E_\varphi^{(k)}$ le faisceau de k -formes relatives, i.e. $E_\varphi^{(k)} = E_M^{(k)} / \varphi^* E_N^{(k)}$ où $\varphi^* E_N^{(k)} = E_M \otimes \varphi^{-1} E_N^{(k)}$. Alors on a une résolution

analogue à (4.4) avec $E_y^{(k)}$ remplacé par $E_\varphi^{(k)}$ et E_y par $\varphi^{-1}E_N$.

c) Résolution de Dolbeault Considérons C^n comme R^{2n} et utilisons $dz_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$ comme la base de vecteurs cotangents. Alors $E^{(0,k)}$ désigne le faisceau de $(0,k)$ -formes de classe C^∞ sur R^{2n} , i.e.

$$\sum f_{j_1 \dots j_k}(z, \bar{z}) d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_k}$$

où $f_{j_1 \dots j_k}(z, \bar{z})$ sont des germes de fonctions de classe C^∞ sur R^{2n} . Puis $\bar{\partial}^k$ désigne la différentiation extérieure anti-holomorphe;

$$\bar{\partial}^k \left(f_{j_1 \dots j_k}(z, \bar{z}) d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_k} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{j_1 \dots j_k}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_k}.$$

On a alors la suite exacte:

$$(4.6) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow E^{(0,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}^0} E^{(0,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}^1} \dots \rightarrow E^{(0,n)} \rightarrow 0.$$

Il est connu que l'on peut remplacer dans ces exemples E par D' . On verra ultérieurement dans ce cours que l'on peut aussi remplacer E par B d'où une résolution flasque concrète de C ou $\mathcal{O}$.

2. Rappel d'algèbre homologique

Nous allons faire un petit rappel d'algèbre homologique.

Définition 4.2.1 La donnée des espaces C -vectoriels K^n , $n = 0, 1, \dots$ et des homomorphismes $d^n: K^n \rightarrow K^{n+1}$ satisfaisant à la condition $d^{n+1} \circ d^n = 0$ est appelée un complexe de cochaînes. Les éléments de $\text{Ker } d^n$ sont appelés des cocycles de degré n ; ceux de $\text{Im } d^{n-1}$ des cobords de degré n . L'espace quotient $\text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n-1}$ est appelé le n -ième groupe de cohomologie et noté par $H^n(K^\bullet)$. (Notons que $\text{Im } d^{n-1} \subset \text{Ker } d^n$ par l'hypothèse $d^{n+1} \circ d^n = 0$.)

Nous considérons aussi le cas où K^n sont des faisceaux d'espaces C -vectoriels. Les arguments ci-dessous étant valables sans modification dans tel cas, nous n'en ferons pas de remarque particulière davantage.

Soient $K^\bullet, K'^\bullet$ deux complexes. Un morphisme de complexes $h: K^\bullet \rightarrow K'^\bullet$ est une famille d'homomorphismes h^n , $n = 0, 1, \dots$ qui rendent le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & K^0 & \xrightarrow{d^0} & K^1 & \xrightarrow{d^1} & K^2 \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow h^0 & & \downarrow h^1 & & \downarrow h^2 \\
 0 & \rightarrow & K',0 & \xrightarrow{d',0} & K',1 & \xrightarrow{d',1} & K',2 \rightarrow \dots
 \end{array}$$

Une suite de morphismes de complexes $0 \rightarrow K' \xrightarrow{h'} K'' \xrightarrow{h''} K''' \rightarrow 0$ est dite exacte si pour chaque n , $0 \rightarrow K',n \xrightarrow{h',n} K'',n \xrightarrow{h'',n} K''',n \rightarrow 0$ est exacte, i.e. si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \rightarrow & K',n-1 & \xrightarrow{d} & K',n & \xrightarrow{d} & K',n+1 \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow h^{n+1} & & \downarrow h^n & & \downarrow h^{n-1} \\
 (4.7) \quad \dots & \rightarrow & K^n & \xrightarrow{d} & K^{n+1} & \xrightarrow{d} & K^{n+2} \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow h^{n+1} & & \downarrow h^n & & \downarrow h^{n-1} \\
 \dots & \rightarrow & K'',n-1 & \xrightarrow{d} & K'',n & \xrightarrow{d} & K'',n+1 \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où les colonnes sont exactes. Dans ce cas on a le

Lemme 4.2.2 (lemme en serpent) On a la suite exacte longue suivante

$$\begin{array}{l}
 0 \rightarrow H^0(K', \cdot) \xrightarrow{h'_0} H^0(K, \cdot) \xrightarrow{h''_0} H^0(K'', \cdot) \\
 \xrightarrow{\delta^0} H^1(K', \cdot) \xrightarrow{h'_1} H^1(K, \cdot) \xrightarrow{h''_1} H^1(K'', \cdot) \\
 \xrightarrow{\delta^1} \dots
 \end{array}$$

où les homomorphismes sont canoniquement définis dans la démonstration ci-dessous

Démonstration Pour un cocycle $z'^n \in \text{Ker } d'^n$ de K' , $h'^n(z'^n)$ est encore un cocycle de K , car

$$d^n \circ h'^n(z'^n) = h'^{n+1} \circ d'^n(z'^n) = 0.$$

Les cobords $\text{Im } d'^{n-1}$ étant envoyés dans $\text{Im } d^{n-1}$ par la même raison, cette correspondance définit une application $h'^n_*: H^n(K', \cdot) \rightarrow H^n(K, \cdot)$. Il en est de même de $h''^n_*: H^n(K, \cdot) \rightarrow H^n(K'', \cdot)$. Enfin, pour $z''^n \in \text{Ker } d''^n$, prenons $c^n \in K^n$ tel que $h''^n(c^n) = z''^n$. En vertu de l'égalité

$$h'^{n+1} \circ d^n(c^n) = d''^n \circ h'^n(c^n) = d''^n(z''^n) = 0,$$

on peut trouver $c'^{n+1} \in K'^{n+1}$ tel que $h'^{n+1}(c'^{n+1}) = d^n(c^n)$. Puisque l'on a

$$h'^{n+2} \circ d'^{n+1}(c'^{n+1}) = d^{n+1} \circ h'^{n+1}(c'^{n+1}) = d^{n+1} \circ d^n(c^n) = 0,$$

c^{n+1} est en effet un cocycle de K' , donc définit un élément de $H^{n+1}(K' \cdot)$, ce qui est par définition $\delta^n([z^{n+1}])$.

Exercice Montrer que δ^n est bien défini et achever la démonstration d'exactitude.

Corollaire 4.2.3 (lemme des neuf) Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & K^0 & \rightarrow & K^1 & \rightarrow & K^2 & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & L^0 & \rightarrow & L^1 & \rightarrow & L^2 & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & M^0 & \rightarrow & M^1 & \rightarrow & M^2 & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Supposons que les colonnes sont exactes; les lignes sont des complexes et exactes sauf une. Alors celle-ci est aussi exacte.

Démonstration D'après le lemme précédent on a la suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(K \cdot) \rightarrow H^0(L \cdot) \rightarrow H^0(M \cdot) \rightarrow H^1(K \cdot) \rightarrow H^1(L \cdot) \rightarrow H^1(M \cdot) \rightarrow 0.$$

Donc si $H^j(K \cdot) = H^j(L \cdot) = 0$, on a $H^j(M \cdot) = 0$ etc.

Exercice (lemme des cinq) Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & K^1 & \rightarrow & K^2 & \rightarrow & K^3 & \rightarrow K^4 \rightarrow K^5 \\
 h^1 \downarrow & & h^2 \downarrow & & h^3 \downarrow & & h^4 \downarrow & & h^5 \downarrow \\
 & L^1 & \rightarrow & L^2 & \rightarrow & L^3 & \rightarrow L^4 \rightarrow L^5
 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Si h^2, h^4 sont isomorphes, h^1 surjectif et h^5 injectif, alors h^3 est isomorphe.

Lemme 4.2.4 (Weil) Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & K^{00} & \xrightarrow{d^{00}} & K^{01} & \xrightarrow{d^{01}} & K^{02} & \xrightarrow{d^{02}} \dots \\
 & \delta^{00} \downarrow & & \delta^{01} \downarrow & & \delta^{02} \downarrow & \\
 0 \rightarrow & K^{10} & \xrightarrow{d^{10}} & K^{11} & \xrightarrow{d^{11}} & K^{12} & \xrightarrow{d^{12}} \dots \\
 & \delta^{10} \downarrow & & \delta^{11} \downarrow & & \delta^{12} \downarrow & \\
 0 \rightarrow & K^{20} & \xrightarrow{d^{20}} & K^{21} & \xrightarrow{d^{21}} & K^{22} & \xrightarrow{d^{22}} \dots \\
 & \delta^{20} \downarrow & & \delta^{21} \downarrow & & \delta^{22} \downarrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

Supposons que toutes les lignes et toutes les colonnes forment des complexes

et que les colonnes sont exactes sauf la première. Alors pour tout n il existe un homomorphisme canonique

$$(4.8) \quad H^n(K^\bullet) \rightarrow H^n(K^{\bullet 0}).$$

Si en plus les lignes sont exactes sauf la première, (4.8) est un isomorphisme.

Démonstration Prenons $x^{n0} \in K^{n0}$ tel que $\delta^{n0} x^{n0} = 0$. On a $\delta^{n0} \cdot d^{n0} x^{n0} = d^{n+1,0} \delta^{n0} x^{n0} = 0$. Donc par l'exactitude de la colonne en terme K^{n1} , il existe $x^{n-1,1} \in K^{n-1,1}$ tel que $\delta^{n-1,1} x^{n-1,1} = d^{n0} x^{n0}$. En répétant ce procédé, on aboutit à un élément $x^{0,1} \in K^{0n}$. On constate facilement que la classe de cohomologie de x^{0n} ne dépend pas des choix intervenus en chemin. Si en outre les lignes sont exactes, on peut tracer ce procédé au sens réciproque. Nous laissons la vérification du détail à titre d'exercice.

Remarque Pour obtenir l'énoncé du lemme pour un n donné, il suffit de supposer l'hypothèse d'exactitude pour les termes $K^{n,k}$ tels que $j+k \leq n$.

Soit maintenant $\{K_\lambda^\bullet\}_{\lambda \in \Lambda}$ une famille inductive de complexes. Cela signifie entre autre que pour tout couple $\lambda \leq \mu$ on est donné un morphisme de complexes $h_{\mu\lambda}: K_\lambda^\bullet \rightarrow K_\mu^\bullet$ de façon que la condition de chaîne soit satisfaite. Dans ce cas on peut considérer la limite inductive des complexes: $\varinjlim K_\lambda^\bullet$. D'autre part $h_{\mu\lambda}$ induit un homomorphisme $h_{\mu\lambda}^n: H^n(K_\lambda^\bullet) \rightarrow H^n(K_\mu^\bullet)$ de sorte que $\{H^n(K_\lambda^\bullet)\}_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille inductive d'espaces vectoriels. On a le

$$\text{Lemme 4.2.5} \quad \varinjlim H^n(K_\lambda^\bullet) = H^n(\varinjlim K_\lambda^\bullet).$$

Démonstration Considérons d'abord le cas particulier où $0 \rightarrow K_\lambda^0 \rightarrow K_\lambda^1 \rightarrow K_\lambda^2 \rightarrow 0$ sont exactes pour tout λ . Alors la limite

$$0 \rightarrow \varinjlim K_\lambda^0 \rightarrow \varinjlim K_\lambda^1 \rightarrow \varinjlim K_\lambda^2 \rightarrow 0$$

est aussi exacte (bien connu et facile à vérifier). Ensuite dans le cas général on associe à la suite originale

$$\dots \rightarrow K_\lambda^{n-1} \xrightarrow{d_\lambda^{n-1}} K_\lambda^n \xrightarrow{d_\lambda^n} K_\lambda^{n+1} \rightarrow \dots$$

la suite exacte

$$(4.9) \quad 0 \rightarrow \text{Im } d_\lambda^{n-1} \rightarrow \text{Ker } d_\lambda^n \rightarrow H^n(K_\lambda^\bullet) \rightarrow 0.$$

Désignons le complexe en limite par

$$\dots \rightarrow K^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \rightarrow \dots$$

On a évidemment $\varinjlim_\lambda \text{Ker } d_\lambda^n = \text{Ker } d^n$, $\varinjlim_\lambda \text{Im } d_\lambda^{n-1} = \text{Im } d^{n-1}$. Donc d'après la première partie en prenant la limite de (4.9) on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Im } d^{n-1} \rightarrow \text{Ker } d^n \rightarrow \varinjlim_\lambda H^n(K_\lambda^\bullet) \rightarrow 0. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

3. Cohomologie par résolution

Appliquons maintenant la notion ci-dessus aux complexes de faisceaux.

Définition 4.3.1 Soient $\mathcal{F}$ un faisceau sur X , $S \subset X$ localement fermé et $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^\bullet(\mathcal{F})$ la résolution flasque canonique de $\mathcal{F}$. Le n -ième groupe de cohomologie relative : $H_S^n(X, \mathcal{F})$ du couple $(X, X \setminus S)$ à valeurs dans $\mathcal{F}$ est défini comme $H^n(\Gamma_S(X, C^\bullet(\mathcal{F})))$. Il est aussi appelé le n -ième groupe de cohomologie à support dans S . En particulier, pour $S = U$ un ouvert $H^n(U, \mathcal{F})$ est défini comme $H^n(C^\bullet(\mathcal{F})(U))$ et appelé le n -ième groupe de cohomologie (absolue) de U à valeurs dans $\mathcal{F}$.

D'après le Corollaire 4.1.6 on a aussitôt le

Corollaire 4.3.2 Si $\mathcal{F}$ est flasque, on a $H_S^n(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Notons encore que d'après le Lemme 4.1.4 a) la suite suivante est exacte

$$0 \rightarrow \Gamma_S(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_S(X, C^0(\mathcal{F})) \rightarrow \Gamma_S(X, C^1(\mathcal{F})),$$

d'où $H_S^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma_S(X, \mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ quelconque. Rappelons que $\Gamma_S(X, \mathcal{F}) = \Gamma_S(U, \mathcal{F})$

Un homomorphisme de faisceaux $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induit un morphisme de complexes flasques entre les résolutions canoniques de ces faisceaux. Il induit donc un homomorphisme $h_\#^n$ entre leurs groupes de cohomologie. Il est clair que $h_\#^n$ est un isomorphisme si h en est.

Nous montrons qu'on peut calculer les groupes de cohomologie par une résolution plus générale.

Théorème 4.3.3 Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$ une résolution. Supposons que pour tout j on a $H_S^n(X, \mathcal{L}^j) = 0$ pour $n \geq 1$. On a alors $H_S^n(X, \mathcal{F}) = H^n(\Gamma_S(X, \mathcal{L}^\bullet))$. En particulier c'est le cas pour une résolution flasque.

pour un ouvert $U \supset S$ quelconque. On pourrait donc aussi écrire sans ambiguïté $H_S^n(U, \mathcal{F})$ au lieu de $H_S^n(X, \mathcal{F})$. On a en effet $C^\bullet(\mathcal{F})|_U = C^\bullet(\mathcal{F}|_U)$ et donc $H_S^n(U, \mathcal{F}|_U) = H_S^n(X, \mathcal{F}) = H_S^n(U, \mathcal{F})$.

Démonstration Prenons la résolution flasque canonique pour chaque faisceau.

D'après le Lemme 4.1.9 on a le diagramme commutatif exact:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{L}^0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^1 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & c^0(\mathcal{F}) & \longrightarrow & c^0(\mathcal{F}^0) & \longrightarrow & c^0(\mathcal{F}^1) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & c^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & c^1(\mathcal{F}^0) & \longrightarrow & c^1(\mathcal{F}^1) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

D'où on obtient un autre diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma_S(X, \mathcal{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_S(X, \mathcal{L}^1) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma_S(X, c^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \Gamma_S(X, c^0(\mathcal{F}^0)) & \longrightarrow & \Gamma_S(X, c^0(\mathcal{F}^1)) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma_S(X, c^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \Gamma_S(X, c^1(\mathcal{F}^0)) & \longrightarrow & \Gamma_S(X, c^1(\mathcal{F}^1)) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Ici les lignes sont exactes sauf la première d'après le Corollaire 4.1.6. Les colonnes sont exactes sauf la première par hypothèse et par Lemme 4.1.4 a).

Donc d'après le Lemme 4.2.4 on obtient l'isomorphisme. C.Q.F.D.

Notons que si l'hypothèse $H_S^n(X, \mathcal{L}^j) = 0$ n'est pas satisfait, on obtient pourtant un homomorphisme canonique: $H^n(\Gamma_S(X, \mathcal{L}^\bullet)) \rightarrow H_S^n(X, \mathcal{F})$. C'est la conséquence de la première partie du Lemme 4.2.4.

Définition 4.3.4 Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X , et soit $S \subset X$ localement fermé. On définit le faisceau $\overset{\text{dérivé}}{\underset{\wedge}{H}}_S^n(\mathcal{F})$ sur X comme le faisceau associé au préfaisceau

$$(4.10) \quad U \mapsto H_{S \cap U}^n(U, \mathcal{F}).$$

Remarque 1 $\underset{\wedge}{H}_S^n(\mathcal{F})$ est en effet considéré comme un faisceau sur S , car $H_{S \cap U}^n(U, \mathcal{F})$ ne dépend que de $S \cap U$, un ouvert de S , et en particulier $H_{S \cap U}^n(U, \mathcal{F}) = 0$ si $S \cap U = \emptyset$.

Remarque 2 Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{L}^2 \rightarrow \dots$ une résolution flasque.

On a alors un complexe de faisceaux

$$(4.11) \quad 0 \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma_S(\mathcal{L}^1) \xrightarrow{d^1} \Gamma_S(\mathcal{L}^2) \longrightarrow \dots$$

$\underline{H}_S^n(\mathcal{F})$ est isomorphe à l' n -ième groupe de cohomologie du complexe (4.11). Ceci découle du Lemme 4.2.5 si on note que $\underline{H}_S^n(\mathcal{F})_x = \varinjlim_{U \ni x} H_{S \cap U}^n(U, \mathcal{F})$ et que $\Gamma_S(\mathcal{L}^n)_x = \varinjlim_{U \ni x} \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^n)$ pour $x \in S$.

Exercice Si $S = U$ est un ouvert on a $\underline{H}_U^n(\mathcal{F}) = 0$ pour $n \geq 1$ et pour $\mathcal{F}$ quelconque.

Notons que le préfaisceau (4.10), autre que le cas $\underline{H}_S^0(\mathcal{F}) = \Gamma_S(\mathcal{F})$, n'est pas nécessairement un faisceau. Il y a un cas important où il en est:

Lemme 4.3.5 Si $\underline{H}_S^j(\mathcal{F}) = 0$ pour $0 \leq j \leq n-1$; alors le préfaisceau (4.10) est un faisceau.

Démonstration Par hypothèse le complexe de faisceaux (4.11) est exact jusqu'à l'($n-1$)-ième terme. Posons $\mathcal{J} = \text{Im } d^{n-1}$. On a une suite exacte de faisceaux:

$$0 \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^0) \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow 0.$$

En vertu du Lemme 4.1.3, $\Gamma_S(\mathcal{L}^j)$ sont flasques. Donc d'après le Corollaire 4.1.6 $\mathcal{J}$ est aussi flasque et on a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^0) \longrightarrow \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{J}(U) \longrightarrow 0.$$

On a donc $\mathcal{J}(U) = d^{n-1}(\Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^{n-1}))$. Soit d'autre part $\mathcal{Z} = \text{Ker } d^n$. Alors $0 \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^n) \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^{n+1})$ est exact et en vertu du Lemme 4.1.4 a) on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}(U) \longrightarrow \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^n) \xrightarrow{d^n} \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^{n+1}).$$

On a donc $\mathcal{Z}(U) = \text{Ker}\{d^n: \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^n) \longrightarrow \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^{n+1})\}$. Notons que l'on a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \underline{H}_S^n(\mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

Puisque $\mathcal{J}$ est flasque, on a d'après le Lemme 4.1.4 b) la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}(U) \longrightarrow \mathcal{Z}(U) \longrightarrow \underline{H}_S^n(\mathcal{F})(U) \longrightarrow 0.$$

Donc $\underline{H}_S^n(\mathcal{F})(U) = \mathcal{Z}(U)/\mathcal{J}(U) = H_{S \cap U}^n(U, \mathcal{L}^n)$. C.Q.F.D.

Notre définition de la cohomologie satisfait à l'axiome usuel:

Théorème 4.3.6 (théorie de la cohomologie) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X , et soient $S \subset X$ localement fermé, $F \subset S$ fermé dans S .

a) (excision) Pour un ouvert $U \supset S$ on a $H_S^n(X, \mathcal{F}) = H_S^n(U, \mathcal{F}|_U)$.

b) $H_S^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma_S(X, \mathcal{F})$.

c) Les suite exacte longue fondamentale:

$$0 \rightarrow H_F^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_S^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{S \setminus F}^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_F^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

En particulier, en prenant $S = U$ ouvert on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H_F^0(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(U \setminus F, \mathcal{F}) \rightarrow H_F^1(U, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

d) Etant donnée une suite exacte de faisceaux $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$, on a des suites exactes longues:

$$0 \rightarrow H_S^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H_S^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_S^0(X, \mathcal{F}'') \rightarrow H_S^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow \dots,$$

$$0 \rightarrow H_S^0(\mathcal{F}') \rightarrow H_S^0(\mathcal{F}) \rightarrow H_S^0(\mathcal{F}'') \rightarrow H_S^1(\mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

Démonstration a) et b) sont déjà remarqués. Pour démontrer c), prenons un voisinage $U \supset S$. Alors $U \setminus F$ sera un voisinage de $S \setminus F$. Soit $0 \rightarrow \mathcal{L}^0 \rightarrow \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^2 \rightarrow \dots$ une résolution flasque de $\mathcal{F}$. Dans le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_F(U, \mathcal{L}^0) & \rightarrow & \Gamma_F(U, \mathcal{L}^1) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_S(U, \mathcal{L}^0) & \rightarrow & \Gamma_S(U, \mathcal{L}^1) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_{S \setminus F}(U \setminus F, \mathcal{L}^0) & \rightarrow & \Gamma_{S \setminus F}(U \setminus F, \mathcal{L}^1) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

(Lemme 4.1.3)
les colonnes sont exactes puisque $\mathcal{L}^j$ sont flasques. Donc en vertu du lemme en serpent on obtient la suite exacte longue.

Soient enfin $C^*(\mathcal{F}')$, $C^*(\mathcal{F})$, $C^*(\mathcal{F}'')$ les résolutions flasques canoniques. Alors en vertu du Lemme 4.1.9 $0 \rightarrow C^n(\mathcal{F}') \rightarrow C^n(\mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{F}'') \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux flasques, donc d'après le Lemme 4.1.4 b) $0 \rightarrow \Gamma_S(X, C^n(\mathcal{F}')) \rightarrow \Gamma_S(X, C^n(\mathcal{F})) \rightarrow \Gamma_S(X, C^n(\mathcal{F}'')) \rightarrow 0$ est aussi exact. En appliquant encore le lemme en serpent au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_S(X, C^0(\mathcal{F}')) & \rightarrow & \Gamma_S(X, C^1(\mathcal{F}')) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_S(X, C^0(\mathcal{F})) & \rightarrow & \Gamma_S(X, C^1(\mathcal{F})) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_S(X, C^0(\mathcal{F}'')) & \rightarrow & \Gamma_S(X, C^1(\mathcal{F}'')) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

on obtient la suite exacte longue. Puisque $H_S^n(\mathcal{F})_X = \varinjlim_{U \ni X} H_{S \cap U}^n(U, \mathcal{F})$ et que $\varinjlim$ conserve l'exactitude, on obtient aussi la deuxième suite. C.Q.F.D.

Considérons maintenant une résolution réciproque.

Corollaire 4.3.7 Soit

$$0 \longleftarrow \mathcal{F} \longleftarrow \mathcal{L}_0 \xleftarrow{h_1} \mathcal{L}_1 \xleftarrow{h_2} \dots \xleftarrow{h_n} \mathcal{L}_n \longleftarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux sur X . Soit $S \subset X$ localement fermé. Si

$H_S^k(X, \mathcal{L}_j) = 0$ pour $r \leq k \leq N$ pour tout j , alors on a $H_S^k(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $r \leq k \leq N-n$.

Démonstration Décomposons la suite en quelques suites courtes:

$$0 \longleftarrow \mathcal{F} \longleftarrow \mathcal{L}_0 \longleftarrow \text{Im } h_1 \longleftarrow 0,$$

$$0 \longleftarrow \text{Im } h_1 \longleftarrow \mathcal{L}_1 \longleftarrow \text{Im } h_2 \longleftarrow 0,$$

.....

$$0 \longleftarrow \text{Im } h_{n-1} \longleftarrow \mathcal{L}_{n-1} \longleftarrow \mathcal{L}_n \longleftarrow 0,$$

et appliquons le Théorème 4.3.6 d) à chacune. On déduit ainsi

$$H_S^p(X, \mathcal{F}) = H_S^{p+1}(X, \text{Im } h_1), \quad \text{pour } r \leq p \leq N-1,$$

$$H_S^p(X, \text{Im } h_1) = H_S^{p+1}(X, \text{Im } h_2), \quad \text{pour } r \leq p \leq N-1,$$

.....

$$H_S^p(X, \text{Im } h_{n-1}) = H_S^{p+1}(X, \mathcal{L}_n), \quad \text{pour } r \leq p \leq N-1,$$

d'où

$$H_S^p(X, \mathcal{F}) = H_S^{p+n}(X, \mathcal{L}_n) = 0, \quad \text{pour } r \leq p \leq N-n. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Théorème 4.3.8 (Mayer-Vietoris) Soient X un espace topologique, S sa partie localement fermée et U, V des ouverts de X . Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X . On a la suite exacte suivante:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow H_{S \cap (U \cup V)}^0(U \cup V, \mathcal{F}) \xrightarrow{\iota} H_{S \cap U}^0(U, \mathcal{F}) \oplus H_{S \cap V}^0(V, \mathcal{F}) \xrightarrow{s} H_{S \cap (U \cap V)}^0(U \cap V, \mathcal{F}) \\ &\rightarrow H_{S \cap (U \cup V)}^1(U \cup V, \mathcal{F}) \xrightarrow{\iota} \dots, \end{aligned}$$

où ι est induit par l'inclusion $f \mapsto (f, f)$ et s par la soustraction

$$(f, g) \mapsto f - g.$$

Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$ une résolution flasque. Considérons le

Démonstration

diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_{S \cap (U \cup V)}(U \cup V, \mathcal{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S \cap (U \cup V)}(U \cup V, \mathcal{L}^1) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^0) \oplus \Gamma_{S \cap V}(V, \mathcal{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^1) \oplus \Gamma_{S \cap V}(V, \mathcal{L}^1) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow s & & \downarrow s & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_{S \cap (U \cap V)}(U \cap V, \mathcal{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S \cap (U \cap V)}(U \cap V, \mathcal{L}^1) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Les colonnes sont exactes grâce à la flasquité de $\mathcal{L}^j$. Donc en vertu du lemme en serpent on obtient (4.12).

4. Dimension et codimension flasque de faisceaux

On a déjà donné la définition de la dimension flasque d'un faisceau.

Nous examinerons sa signification cohomologique.

Théorème 4.4.1 Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X . Les énoncés suivants sont équivalents:

- a) $\dim \text{fl } \mathcal{F} \leq n$.
- b) $H_S^{n+1}(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $S \subset X$ fermé.
- b') $H_S^j(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $j > n$ et pour tout $S \subset X$ localement fermé.
- c) $\underline{H}_S^{n+1}(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $S \subset X$ fermé.
- c') $\underline{H}_S^j(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $j > n$ et pour tout $S \subset X$ localement fermé.
- d) $H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(U, \mathcal{F})$ est surjectif pour tout $U \subset X$ ouvert.

Démonstration La déduction $a) \Rightarrow b') \Rightarrow b)$, $a) \Rightarrow c' \Rightarrow c)$ est claire par définition.

$b) \Rightarrow d)$ Dans le Théorème 4.3.6 c), posons $S = X$ et $F = X \setminus U$. On a la suite exacte

$$\dots \rightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(U, \mathcal{F}) \rightarrow H_{X \setminus U}^{n+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Donc b) entraîne d).

$d) \Rightarrow a)$ Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$ une résolution flasque. En posant $\mathcal{J} = \text{Im } d^{n-1}$ on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}^{n-1} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0.$$

Il suffit de démontrer que $\mathcal{J}$ est flasque. De la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^n$

$\rightarrow \mathcal{L}^{n+1}$ on obtient la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}(U) \rightarrow \mathcal{L}^n(U) \rightarrow \mathcal{L}^{n+1}(U)$, d'où

$$H^n(U, \mathcal{F}) = \frac{\text{Ker}\{d^n: \mathcal{L}^n(U) \rightarrow \mathcal{L}^{n+1}(U)\}}{d^{n-1}\mathcal{L}^{n-1}(U)} = \frac{\mathcal{I}(U)}{d^{n-1}\mathcal{L}^{n-1}(U)}.$$

Ceci est vrai pour tout ouvert U de X . L'hypothèse donc signifie que la restriction

$$\frac{\mathcal{I}(X)}{d^{n-1}\mathcal{L}^{n-1}(X)} \rightarrow \frac{\mathcal{I}(U)}{d^{n-1}\mathcal{L}^{n-1}(U)}$$

est surjective. Soit donc $s \in \mathcal{I}(U)$. Il existe alors $\tilde{s} \in \mathcal{I}(X)$ et $u \in \mathcal{L}^{n-1}(U)$ tels que

$$s = \tilde{s}|_U + d^{n-1}u.$$

Puisque $\mathcal{L}^{n-1}$ est flasque, il existe $\tilde{u} \in \mathcal{L}^{n-1}(X)$ tel que $\tilde{u}|_U = u$. Alors $\tilde{s} + d^{n-1}\tilde{u} \in \mathcal{I}(X)$ par la raison évidente et on a

$$s = (\tilde{s} + d^{n-1}\tilde{u})|_U.$$

Donc $\mathcal{I}$ est flasque.

c) $\Rightarrow$ a) Démontrons par récurrence par n . Nous allons d'abord montrer que l'hypothèse $H_S^1(\mathcal{F}) = 0$ pour tout fermé $S \subset X$ implique la flasquité de $\mathcal{F}$. Soit $s \in \mathcal{F}(U)$. Définissons l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{(\tilde{s}, \tilde{U}); \tilde{U} \supset U, \tilde{s} \in \mathcal{F}(\tilde{U}), \tilde{s}|_U = s\},$$

avec l'ordre naturel

$$(\tilde{s}, \tilde{U}) \succ (\tilde{s}', \tilde{U}') \iff \tilde{U} \supset \tilde{U}' \text{ et } \tilde{s}|_{\tilde{U}'} = \tilde{s}'.$$

$\mathcal{M}$ étant inductivement ordonné non vide, il existe d'après le lemme de Zorn un élément maximal $(\tilde{s}, \tilde{U})$. On prétend que $\tilde{U} = X$ ce qui achèvera la démonstration.

Supposons qu'il existe $x \notin \tilde{U}$ et posons $S = X \setminus \tilde{U}$. L'hypothèse $H_S^1(\mathcal{F})_x = \varinjlim_{V \ni x} H_{S \cap V}^1(V, \mathcal{F}) = 0$ nous affirme que la classe de reste de $\tilde{s}|_{V \setminus S}$ est nulle dans $H_{S \cap V}^1(V, \mathcal{F})$ pour un petit voisinage V . De la suite exacte

$$\dots \rightarrow H^0(V, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(V \setminus S, \mathcal{F}) \rightarrow H_{S \cap V}^1(V, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

on trouve donc un élément $s_1 \in H^0(V, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(V)$ tel que $s_1|_{V \setminus S} = \tilde{s}|_{V \setminus S}$, ce qui nous permet de prolonger la section $\tilde{s}$ sur $\tilde{U} \cup V$ contrairement à la maximalité.

Soit maintenant notre assertion vraie jusqu'à n . Prenons une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{L}^0$ est flasque. De la suite exacte

$$\dots \rightarrow \underline{H}_S^k(\mathcal{L}^0) \rightarrow \underline{H}_S^k(\mathcal{I}) \rightarrow \underline{H}_S^{k+1}(\mathcal{I}) \rightarrow \underline{H}_S^{k+1}(\mathcal{L}^0) \rightarrow \dots$$

$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ 0 & & 0 \end{array}$

on tire que $\underline{H}_S^{k+1}(\mathcal{I}) = 0$ implique $\underline{H}_S^k(\mathcal{I}) = 0_K$ pour $k \geq 1$. Donc par l'hypothèse de la récurrence il existe une résolution flasque de longueur n :

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{L}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}^{n+1} \rightarrow 0.$$

Il n'a qu'à recoller les deux suites. C.Q.F.D.

Maintenant nous introduirons la notion de codimension d'une partie S dans X par rapport à un faisceau.

Définition 4.4.2 Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et soit $S \subset X$ fermé. On dit que S est de codimension $\geq n$ par rapport à $\mathcal{F}$ si $\underline{H}_S^j(\mathcal{F}) = 0$ pour $j < n$. Si $\underline{H}_S^j(\mathcal{F}) = 0$ sauf $j \neq n$, on dit que S est pur de codimension n .

Lemme 4.4.3 Supposons que $S \subset X$ est un fermé de codimension $\geq n$ par rapport à $\mathcal{F}$. Supposons en plus que pour tout $F \subset S$ fermé on a $H_F^{n+1}(X, \mathcal{F}) = 0$. Alors $\underline{H}_S^n(\mathcal{F})$ est un faisceau flasque.

Démonstration On sait déjà d'après le Lemme 4.3.5 que $\underline{H}_S^n(\mathcal{F})(U) = H_{S \cap U}^n(U, \mathcal{F})$. D'autre part on a la suite exacte

$$\dots \rightarrow H_S^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{S \cap U}^n(U, \mathcal{F}) \rightarrow H_{S \cap U}^{n+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

C.Q.F.D.

Par hypothèse le dernier terme s'annule. Donc la restriction est surjective. $\wedge$

Exercice Soit $S \subset X$ un fermé. Supposons que le faisceau $\mathcal{F}$ sur X satisfait à $\mathcal{F}|_{X \setminus S} = 0$. On peut alors considérer $\mathcal{F}$ de façon naturelle comme un faisceau sur S . Désignant celui-ci par $\mathcal{F}|_S$ on a $H_F^k(X, \mathcal{F}) = H_F^k(S, \mathcal{F}|_S)$ pour $F \subset S$ localement fermé.

Théorème 4.4.4 Soit $S \subset X$ un fermé pur de codimension n par rapport à $\mathcal{F}$. Soit $F \subset S$ localement fermé. On a alors

$$(4.13) \quad H_F^k(X, \mathcal{F}) = H_F^{k-n}(S, \underline{H}_S^n(\mathcal{F})).$$

Démonstration Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d^1} \dots$ une résolution flasque.

$\underline{H}_S^k(\mathcal{F})$ est le k-ième groupe de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^0) \xrightarrow{d_S^0} \Gamma_S(\mathcal{L}^1) \xrightarrow{d_S^1} \dots$$

Posons $\mathcal{I} = \text{Im } d_S^{n-1}$. Notre hypothèse alors signifie que la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^0) \xrightarrow{d_S^0} \dots \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

est exacte. D'après le Lemme 4.1.3 $\Gamma_S(\mathcal{L}^j)$ sont flasques. Donc en vertu du Corollaire 4.1.6 $\mathcal{I}$ est aussi flasque et on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_F(X, \mathcal{L}^0) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_F(X, \mathcal{L}^{n-1}) \longrightarrow \Gamma_F(S, \mathcal{I}) \longrightarrow 0,$$

où on a utilisé l'identité banale $\Gamma_F(S, \Gamma_S(\mathcal{F})) = \Gamma_F(X, \mathcal{F})$. On a donc en particulier $\Gamma_F(S, \mathcal{I}) = d^{n-1} \Gamma_F(X, \mathcal{L}^{n-1})$, et $H_F^k(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

D'autre part soit $\mathcal{Z} = \text{Ker } d_S^n$. On a la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \underline{H}_S^n(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$, d'où par Théorème 4.3.6 d) la suite exacte

$$\dots \longrightarrow H_F^k(S, \mathcal{I}) \longrightarrow H_F^k(S, \mathcal{Z}) \longrightarrow H_F^k(S, \underline{H}_S^n(\mathcal{F})) \longrightarrow H_F^{k+1}(S, \mathcal{I}) \longrightarrow \dots$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} H_F^0(S, \underline{H}_S^n(\mathcal{F})) &= \Gamma_F(S, \mathcal{Z}) / \Gamma_F(S, \mathcal{I}), \\ H_F^k(S, \underline{H}_S^n(\mathcal{F})) &= H_F^k(S, \mathcal{Z}) \quad \text{pour } k \geq 1. \end{aligned}$$

Notons enfin que

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^n) \longrightarrow \Gamma_S(\mathcal{L}^{n+1}) \longrightarrow \dots$$

est par hypothèse une résolution flasque de $\mathcal{Z}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} H_F^0(S, \underline{H}_S^n(\mathcal{F})) &= \text{Ker}\{d^n: \Gamma_F(X, \mathcal{L}^n) \longrightarrow \Gamma_F(X, \mathcal{L}^{n+1})\} / d^{n-1} \Gamma_F(X, \mathcal{L}^{n-1}) \\ &= H_F^n(X, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

$$H_F^k(S, \underline{H}_S^n(\mathcal{F})) = H^k(\Gamma_F(X, \mathcal{L}^{n+\cdot})) = H_F^{n+k}(X, \mathcal{F}). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

5. Cohomologie de Čech

Nous introduisons une autre expression du groupe de cohomologie à valeurs dans un faisceau. Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement (ouvert sauf mentions contraires) de X . Une expression symbolique

$$(4.14) \quad \sum_{(\lambda_0, \dots, \lambda_n)} \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n} \quad \text{où } \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} \in \mathcal{F}(U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_n}),$$

est dite une cochaîne de degré n du recouvrement $\mathcal{U}$ (à valeurs dans $\mathcal{F}$).

Le symbole $U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n}$ signifie que l'on fait l'identification suivante:

$$U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n} \sim \text{sgn } \sigma U_{\lambda_{\sigma(0)}} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_{\sigma(n)}},$$

où σ est une permutation de $\{0, \dots, n\}$. En particulier

$$U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n} = 0 \quad \text{si } \lambda_j = \lambda_k \text{ pour un couple } j \neq k.$$

Donc les $U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n}$ où $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ parcourt les combinaisons différentes forment une base. Après le rangement le coefficient de $U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n}$ peut s'écrire

$$(n+1)! \check{\varphi}_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \varphi_{\lambda_{\sigma(0)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}}.$$

Donc (4.14) peut toujours se réécrire de façon unique à la forme $\sum \check{\varphi}_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n}$ avec les coefficients antisymétriques en $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

On note par $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ l'espace $\mathbb{C}$ -vectoriel des cochaînes ci-dessus. De plus soit $\mathcal{U}' = \{U_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda'\}$ une partie de $\mathcal{U}$. On pose

$$C^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) = \left\{ \sum \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n} \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}); \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} = 0 \text{ si } U_{\lambda_0}, \dots, U_{\lambda_n} \in \mathcal{U}' \right\},$$

et l'appelle le groupe de cochaînes relatives de $\mathcal{U}$ modulo $\mathcal{U}'$. On définit l'homomorphisme de cobord $\delta^n: C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ par

$$(4.15) \quad \delta^n \left(\sum_{(\lambda_0, \dots, \lambda_n)} \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n} \right) = \sum_{(\mu, \lambda_0, \dots, \lambda_n)} \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\mu} \wedge U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n}.$$

On fait la convention pour simplifier l'écriture que dans telle somme le coefficient $\varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n}$ signifie en fait la restriction $\varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} \mid U_{\mu} \wedge U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n}$.

Remarque Le coefficient antisymétrique de $U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_{n+1}}$ dans δ^n est égal à

$$(4.16) \quad \check{\varphi}_{\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \check{\varphi}_{\lambda_0, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \mid U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_{n+1}}.$$

Il est clair que δ^n envoie une cochaîne relative à une cochaîne relative.

Lemme 4.5.1 $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Démonstration On a

$$\begin{aligned} \delta^{n+1} \circ \delta^n \left(\sum_{(\lambda_0, \dots, \lambda_n)} \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n} \right) &= \delta^{n+1} \left(\sum_{(\mu, \lambda_0, \dots, \lambda_n)} \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\mu} \wedge U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n} \right) \\ &= \sum_{(\nu, \mu, \lambda_0, \dots, \lambda_n)} \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\nu} \wedge U_{\mu} \wedge U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Puisque $U_{\nu} \wedge U_{\mu} = -U_{\mu} \wedge U_{\nu}$, ce dernier membre sera arrangé à nul. C.Q.F.D.

Définition 4.5.2 On pose

$$H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})), \quad H^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) = H^n(C^*(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F})),$$

et l'appelle le n-ième groupe de cohomologie du recouvrement $\mathcal{U}$ (resp. cohomologie relative de $\mathcal{U}$ modulo $\mathcal{U}'$).

Lemme 4.5.3 On a la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Ceci s'ensuit des suites exactes évidentes:

$$0 \longrightarrow C^k(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^k(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

et du lemme en serpent.

Lemme 4.5.4 Soit $S \subset X$ un fermé tel que $\mathcal{U}'$ soit un recouvrement de $X \setminus S$. On a alors $H^0(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) = \Gamma_S(X, \mathcal{F})$. En particulier on a $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, $H^0(\mathcal{U}', \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X \setminus S)$.

Démonstration Par définition $\varphi \in H^0(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F})$ a la forme

$$\varphi = \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda} U_{\lambda}, \quad \delta^0 \varphi = \sum_{(\mu, \lambda)} \varphi_{\lambda} U_{\mu} \wedge U_{\lambda} = 0.$$

Donc $\varphi_{\lambda}|_{U_{\mu} \cap U_{\lambda}} - \varphi_{\mu}|_{U_{\lambda} \cap U_{\mu}} = 0$ et φ peut être considéré comme une section globale de $\mathcal{F}$. Puisque $\varphi_{\lambda} = 0$ pour $U_{\lambda} \in \mathcal{U}'$, $\text{supp } \varphi \subset S$. La correspondance réciproque est claire:

$$\varphi \mapsto \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda} U_{\lambda}, \quad \text{où } \varphi_{\lambda} = \varphi|_{U_{\lambda}}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Lemme 4.5.5 Si $\mathcal{F}$ est flasque, on a $H^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) = 0$ pour $n \geq 1$.

Démonstration Nous allons démontrer comme un cas particulier $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ pour $n \geq 1$. Alors $H^n(\mathcal{U}', \mathcal{F}) = 0$ pour $n \geq 1$ par la même raison et d'après le Lemme 4.5.3 cela achèvera la démonstration du cas général. (Notons que $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ est surjectif en vertu du Lemme 4.5.4 et de la flasquité de $\mathcal{F}$.)

Plus précisément nous allons plutôt démontrer l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

par récurrence sur n . Alors le Lemme 4.5.4 peut être considéré comme la première étape. Soit donc $\varphi \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tel que $\delta^n \varphi = 0$ et posons

$$\mathcal{M} = \{(\psi, U); U \subset X \text{ ouvert}, \psi \in C^{n-1}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{F}), \delta^{n-1}\psi = \varphi|_U\},$$

où $\mathcal{M}|_U$ désigne le recouvrement $\{U_{\lambda} \cap U\}_{\lambda \in \Lambda}$ de U et $\varphi|_U = \sum \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n}(U_{\lambda_0} \cap U) \wedge \dots \wedge (U_{\lambda_n} \cap U)$. Bien entendu, le coefficient de $\wedge$ dans signifie la restriction sur l'ouvert correspondant. Avec l'ordre habituel (i.e. l'inclusion et la restriction) $\mathcal{M}$ devient un ensemble inductivement ordonné. Montrons $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

Soit $\varphi = U_{\mu} \wedge \varphi_{\mu} + \varphi'$ et posons $U = U_{\mu}$. On a

$$\delta^n \varphi = U_{\mu} \wedge (-\delta^{n-1} \varphi_{\mu}) + U_{\mu} \wedge \varphi' + \delta^{n-1} \varphi',$$

où δ' désigne l'opérateur de cobord par rapport aux indices autre que μ .

On a donc $\delta^{n-1} \varphi' = 0$, $\delta^{n-1} \varphi_{\mu} = \varphi'$. Prenons alors comme un élément de $C^{n-1}(\mathcal{M}|_{U_{\mu}}, \mathcal{F})$, $\psi_{\mu} = \varphi_{\mu}|_{U_{\mu}}$. On a alors

$$\delta^{n-1} \psi_{\mu} = U_{\mu} \wedge \varphi_{\mu}|_{U_{\mu}} + \delta^{n-1} \varphi_{\mu}|_{U_{\mu}} = U_{\mu} \wedge \varphi_{\mu}|_{U_{\mu}} + \varphi'|_{U_{\mu}} = \varphi|_{U_{\mu}}.$$

Donc $(\psi_{\mu}, U_{\mu}) \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \neq \emptyset$. En vertu du lemme de Zorn, il existe donc un élément maximal (ψ, U) dans $\mathcal{M}$. Nous montrons que $U = X$. S'il existe $x \in X \setminus U$, il existe alors $U_{\mu} \ni x$. Comme $(\psi_{\mu}, U_{\mu}) \in \mathcal{M}$, où ψ_{μ} est comme ci-dessus, on obtient donc

$$\delta^{n-1} \psi|_{U \cup U_{\mu}} = \varphi|_{U \cup U_{\mu}} = \delta^{n-1} \psi_{\mu}|_{U \cup U_{\mu}},$$

d'où

$$\delta^{n-1} (\psi|_{U \cup U_{\mu}} - \psi_{\mu}|_{U \cup U_{\mu}}) = 0.$$

Donc l'hypothèse de la récurrence $H^{n-1}(\mathcal{M}|_{U \cup U_{\mu}}, \mathcal{F}) = 0$ implique qu'il existe $\chi \in C^{n-2}(\mathcal{M}|_{U \cup U_{\mu}}, \mathcal{F})$ tel que $\delta^{n-2} \chi = \psi|_{U \cup U_{\mu}} - \psi_{\mu}|_{U \cup U_{\mu}}$. Puisque $\mathcal{F}$ est flasque, il existe $\tilde{\chi} \in C^{n-2}(\mathcal{M}|_{U_{\mu}}, \mathcal{F})$ tel que $\tilde{\chi}|_{U \cup U_{\mu}} = \chi$. Définissons $\tilde{\psi} \in C^{n-1}(\mathcal{M}|_{(U \cup U_{\mu})}, \mathcal{F})$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \psi \quad \text{sur } U, \\ &= \psi_{\mu} + \delta^{n-2} \tilde{\chi} \quad \text{sur } U_{\mu}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\delta^{n-1} \tilde{\psi}|_U = \delta^{n-1} \psi = \varphi|_U,$$

$$\delta^{n-1} \tilde{\psi}|_{U_{\mu}} = \delta^{n-1} \psi_{\mu} = \varphi|_{U_{\mu}},$$

donc $(\tilde{\psi}, U \cup U_{\mu})$ est un prolongement de (ψ, U) , ce qui contredit à la maximalité.

C.Q.F.D.

Théorème 4.5.6 (Leray) Soient X un espace topologique, $S \subset X$ un fermé et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X . Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X et soit $\mathcal{U}'$ sa partie recouvrant $X \setminus S$. On a alors un homomorphisme canonique

$$\chi_{\mathcal{U}}^n : H^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow H_S^n(X, \mathcal{F}).$$

Si en outre

(4.17) $H^n(U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_k}, \mathcal{F}) = 0$ pour $n \geq 1$ et pour tout $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$, on a de plus l'isomorphisme $H^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) = H_S^n(X, \mathcal{F})$.

Démonstration Prenons une résolution flasque $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$. On a un diagramme commutatif

$$(4.18) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & \Gamma_S(X, \mathcal{L}^0) & \xrightarrow{d^0} & \Gamma_S(X, \mathcal{L}^1) & \xrightarrow{d^1} \dots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{L}^0) & \xrightarrow{d^0} & C^0(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{L}^1) \xrightarrow{d^1} \dots \\ & & \delta^0 \downarrow & & \delta^0 \downarrow & & \delta^0 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{L}^0) & \xrightarrow{d^0} & C^1(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{L}^1) \xrightarrow{d^1} \dots \\ & & \delta^1 \downarrow & & \delta^1 \downarrow & & \delta^1 \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Ici d^n opère aux coefficients des éléments de $C^k(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{L}^n)$. Les colonnes sont exactes sauf la première d'après le Lemme 4.5.5, et si (4.17) a lieu, les lignes sont aussi exactes sauf la première d'après le Théorème 4.3.3. Notre assertion s'ensuit donc du Lemme 4.2.4. C.Q.F.D.

Un recouvrement $\mathcal{U}$ (ou plus précisément le couple $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$) satisfaisant à la condition (4.17) est dit un recouvrement de Leray pour $S \subset X$ et $\mathcal{F}$.

Exercice Démontrer la canonicité de $\chi_{\mathcal{U}}^n$ défini ci-dessus (i.e. que $H^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) \xrightarrow{\chi_{\mathcal{U}}^n} H^n(\Gamma_S(X, \mathcal{L}^\bullet)) \xrightarrow{\chi_{\mathcal{U}}^n} H^n(\Gamma_S(X, C^\bullet(\mathcal{F})))$ est commutatif).

Exercice Démontrer que $\chi_{\mathcal{U}}^1$ est toujours injectif.

Nous examinerons maintenant l'effet du changement de recouvrement. Soit $\mathcal{V} = \{V_\mu\}_{\mu \in M}$ un autre recouvrement. On dit que $\mathcal{V}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$ si pour tout $V_\mu \in \mathcal{V}$ il existe $U_\lambda \in \mathcal{U}$ tel que $V_\mu \subset U_\lambda$. Soit $\mathcal{V}' = \{V_\mu\}_{\mu \in M'}$ une partie de $\mathcal{V}$. Si en plus pour tout $V_\mu \in \mathcal{V}'$ il existe $U_\lambda \in \mathcal{U}'$ tel que $V_\mu \subset U_\lambda$, on dit que $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ est un raffinement du recouvrement relatif $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$. Choisissons une application $\tau : M \rightarrow \Lambda$ telle que $\tau(M') \subset \Lambda'$ et

que $V_\mu \subset U_{\tau(\mu)}$ d'après Zermelo. (On dira que τ est une application de raffinement.) On obtient ainsi une application

$$\tau^{*n}: C^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow C^n(\mathcal{V} \bmod \mathcal{V}', \mathcal{F})$$

définie par

$$\tau^{*n} \left(\sum_{(\lambda_0, \dots, \lambda_n)} \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n} \right) = \sum_{(\mu_0, \dots, \mu_n)} \varphi_{\tau(\mu_0), \dots, \tau(\mu_n)} V_{\mu_0} \wedge \dots \wedge V_{\mu_n}.$$

Puisque τ^* commute avec δ , il induit un homomorphisme

$$(4.19) \quad [\tau^{*n}]: H^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{V} \bmod \mathcal{V}', \mathcal{F}).$$

Lemme 4.5.7 L'homomorphisme $[\tau^{*n}]$ ne dépend pas du choix de τ .

Démonstration Soit τ_1, τ_2 deux applications de raffinement. Nous définissons une famille d'homomorphismes $\theta^n: C^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow C^{n-1}(\mathcal{V} \bmod \mathcal{V}', \mathcal{F})$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (une homotopie de cochaînes comme on dit) telle que

$$\tau_2^{*n} \varphi - \tau_1^{*n} \varphi = \delta^{n-1} \theta^n \varphi - \theta^{n+1} \delta^n \varphi \quad \text{pour } \varphi \in C^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}).$$

(On pose $\theta^0 = 0$.) Cela signifiera que la différence $\tau_2^{*n} \varphi - \tau_1^{*n} \varphi$ est un cobord si φ est un cocycle, d'où notre assertion. Pour définir θ^n nous utilisons

l'expression antisymétrique d'une cochaîne $\varphi = \sum_{(\lambda_0, \dots, \lambda_n)} \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_n}$. On pose

$$\theta^n \varphi = \sum_{(\mu_0, \dots, \mu_{n-1})} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \varphi_{\tau_1(\mu_0) \dots \tau_1(\mu_j) \tau_2(\mu_j) \dots \tau_2(\mu_{n-1})} V_{\mu_0} \wedge \dots \wedge V_{\mu_{n-1}}.$$

On a alors

$$(4.20) \quad \delta^{n-1} \theta^n \varphi = \sum_{(\mu, \mu_0, \dots, \mu_{n-1})} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \varphi_{\tau_1(\mu_0) \dots \tau_1(\mu_j) \tau_2(\mu_j) \dots \tau_2(\mu_n)} V_{\mu} \wedge V_{\mu_0} \wedge \dots \wedge V_{\mu_{n-1}}.$$

D'autre part on a

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \theta^{n+1} \delta^n \varphi &= \theta^{n+1} \left(\sum_{(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1})} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \varphi_{\lambda_0 \dots \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} \dots \lambda_{n+1}} U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_{n+1}} \right) \\ &= \sum_{(\mu_0, \dots, \mu_n)} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \varphi_{\tau_1(\mu_0) \dots \tau_1(\mu_j) \tau_2(\mu_j) \dots \tau_2(\mu_{k-1}) \tau_2(\mu_{k+1}) \dots \tau_2(\mu_n)} V_{\mu_0} \wedge \dots \wedge V_{\mu_n} \\ &\quad + \sum_{(\mu_0, \dots, \mu_n)} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sum_{j=k+1}^n (-1)^j \varphi_{\tau_1(\mu_0) \dots \tau_1(\mu_{k-1}) \tau_1(\mu_{k+1}) \dots \tau_1(\mu_j) \tau_2(\mu_j) \dots \tau_2(\mu_n)} V_{\mu_0} \wedge \dots \wedge V_{\mu_n} \\ &\quad + \sum_{(\mu_0, \dots, \mu_n)} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{k-1} (-1)^k \varphi_{\tau_1(\mu_0) \dots \tau_1(\mu_{k-1}) \tau_2(\mu_k) \dots \tau_2(\mu_n)} V_{\mu_0} \wedge \dots \wedge V_{\mu_n} \\ &\quad + \sum_{(\mu_0, \dots, \mu_n)} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (-1)^k \varphi_{\tau_1(\mu_0) \dots \tau_1(\mu_k) \tau_2(\mu_{k+1}) \dots \tau_2(\mu_n)} V_{\mu_0} \wedge \dots \wedge V_{\mu_n}. \end{aligned}$$

Notons que dans les premiers deux termes du second membre de (4.21) on a

$$(-1)^k V_{\mu_0} \wedge \dots \wedge V_{\mu_n} = V_{\mu_k} \wedge V_{\mu_0} \wedge \dots \wedge V_{\mu_{k-1}} \wedge V_{\mu_{k+1}} \wedge \dots \wedge V_{\mu_n}.$$

Donc, en considérant μ_k comme μ et en changeant aussi la notation des autres indices, on voit que ces deux termes se tuent avec (4.20). Ainsi $\delta^{n-1}\theta^n\varphi - \theta^{n+1}\delta^n\varphi$ est égal à (-1) fois la reste de (4.21), ce qui se tue dedans et ne laisse que deux termes extrémaux. Ainsi on obtient finalement $\tau_2^{*n}\varphi - \tau_1^{*n}\varphi$. C.Q.F.D.

Notons donc $[\tau^{*n}]$ par $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}^n$. On a le

Lemme 4.5.8 $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}^n$ commute avec les homomorphismes $\check{c}_{\mathcal{U}}^n, \check{c}_{\mathcal{U}'}^n$ donnés par Théorème 4.4.6:

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}^n} & H^n(\mathcal{U}' \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F}) \\ & \searrow \check{c}_{\mathcal{U}}^n & \swarrow \check{c}_{\mathcal{U}'}^n \\ & H_S^n(X, \mathcal{F}) & \end{array}$$

Démonstration On décrit le diagramme (4.18) pour $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ ainsi que pour $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ dans chacune de deux feuilles superposées. τ^* induit ^{un} ~~des~~ homomorphismes entre chaque couple de termes superposés. Puisque τ^* commute avec δ et d , on obtient ainsi un diagramme commutatif cubique, d'où la conclusion.

Définition 4.5.9 Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X . Soit $S \subset X$ fermé. Faisons $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ parcourir l'ensemble des recouvrements relatifs de $(X, X \setminus S)$. Dans cette situation on pose $\check{H}_S^n(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{(\mathcal{U}, \mathcal{U}')} H^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{F})$ et l'appelle le groupe de cohomologie (relative) de Čech du couple $(X, X \setminus S)$ à valeurs dans $\mathcal{F}$.

On définit aussi l'homomorphisme

$$\check{c}^n = \varinjlim_{(\mathcal{U}, \mathcal{U}')} c_{\mathcal{U}}^n: \check{H}_S^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H_S^n(X, \mathcal{F}).$$

Théorème 4.5.10 Si X ~~est~~ ^{est} paracompact (séparé), $\check{c}^n$ est un isomorphisme.

Démonstration On examine le diagramme (4.18) avec un recouvrement $\mathcal{U}$ indéterminé. Il suffit de montrer les deux choses suivantes:

a) Si un cocycle $\varphi \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ satisfait à $\check{c}_{\mathcal{U}}^n \varphi = 0$, alors il existe un raffinement $\tau: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ et $\psi \in C^{n-1}(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ tels que $\delta^{n-1}\psi = \tau^{*n}\varphi$.

b) Pour tout $f \in \Gamma(X, \mathcal{F}^n)$ tel que $d^n f = 0$, il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ et un cocycle $\varphi \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tels que $\check{c}_{\mathcal{U}}^n \varphi = f$. Pour cela

En passant à la limite à partir du Lemme 4.5.3, on obtient une suite exacte pour $\check{H}^k$ correspondant au Théorème 4.3.6 c). Il suffit donc de montrer $\check{H}^k(X, \mathcal{F}) = H^k(X, \mathcal{F})$ et $\check{H}^k(X \setminus S, \mathcal{F}) = H^k(X \setminus S, \mathcal{F})$.

il faut tracer le diagramme (4.18) au sens réciproque en raffinant $\mathcal{U}$ en chaque pas si nécessaire. Le lemme suivant alors suffira pour ce but:

Lemme 4.5.11 Soit X un espace paracompact (séparé),
et soit $\mathcal{F}' \xrightarrow{h'} \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{F}''$ une suite exacte de faisceaux sur X . Alors pour tout $\varphi \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tel que $h\varphi = 0$, il existe un raffinement τ :
 $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ et $\psi \in C^n(\mathcal{V}, \mathcal{F}')$ tels que $h'\psi = \tau^{*n}\varphi$.

Démonstration On peut supposer que $\mathcal{U}$ est localement fini. De plus, on peut trouver un ouvert W_λ pour chaque U_λ tel que $\overline{W}_\lambda \subset U_\lambda$ et que $\{W_\lambda\}$ soit aussi un recouvrement de X . Prenons en chaque point $x \in X$ un voisinage V_x de façon que

- a) $V_x \subset W_\lambda$ pour un λ .
- b) Si $V_x \cap \overline{W}_\mu \neq \emptyset$, alors $V_x \subset U_\mu$.
- c) Si $V_x \cap \overline{W}_{\lambda_0} \cap \dots \cap \overline{W}_{\lambda_n} \neq \emptyset$, alors il existe $\psi_{x, \lambda_0, \dots, \lambda_n} \in \mathcal{F}'(V_x)$ tel que $h'\psi_{x, \lambda_0, \dots, \lambda_n} = \varphi_{\lambda_0, \dots, \lambda_n}|_{V_x}$.

Notons que d'après la condition b), l'hypothèse dans la condition c) implique que $V_x \subset U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_n}$. Puisque $\{W_\lambda\}$ est aussi localement fini, c) sera donc satisfait en vertu de l'exactitude de la suite donnée.

Posons donc $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x \in X}$ et fixons une application de raffinement $\lambda: X \rightarrow \Lambda$. (C'est à dire qu'on a $V_x \subset W_{\lambda(x)}$.) Alors

$$\psi = \sum_{(x_0, \dots, x_n)} \psi_{x_0, \lambda(x_0), \dots, \lambda(x_n)} V_{x_0} \wedge \dots \wedge V_{x_n} \in C^n(\mathcal{V}, \mathcal{F}')$$

sera un élément voulu. (Notons que $V_{x_0} \cap \dots \cap V_{x_n} \neq \emptyset$ implique $V_{x_0} \subset U_{\lambda(x_0)} \cap \dots \cap U_{\lambda(x_n)}$.) C.Q.F.D.

Exercice Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace topologique X . Soit $S \subset X$ fermé. Supposons qu'il existe un système cofinal de recouvrements formé de recouvrements de Leray pour $\mathcal{F}$. Alors $H_S^n(X, \mathcal{F}) = H_S^n(X, \mathcal{F})$ indéfiniment.

Exercice Soit $\mathcal{E}$ le faisceau de fonctions $\wedge$ différentiables sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que, quel que soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $H^k(\Omega, \mathcal{E}) = 0$ pour $k \geq 1$. Quelle est la dimension flasque de $\mathcal{E}$? (Imiter la démonstration du Lemme 4.5.5.)

Utiliser le fait que $\varphi \in \mathcal{E}(U)$ peut se prolonger à $\mathbb{R}^n$ s'il admet une modification au voisinage de ∂U . Donc dans la dernière étape de la démonstration on devrait prendre un raffinement.)

6. Images directes supérieures

Nous avons déjà défini l'image directe d'un faisceau par une application continue. (Voir la Définition 1.7.8.) Maintenant nous donnons la

Définition 4.6.1 Soit X, Y des espaces topologiques, $f: X \rightarrow Y$ une application continue et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X . Nous désignons par $R^k f_*(\mathcal{F})$ le faisceau associé à préfaisceau

$$Y \supset U \mapsto H^k(f^{-1}(U), \mathcal{F})$$

et l'appelons la k -ième image directe de $\mathcal{F}$ par f .

Notons que $R^0 f_*(\mathcal{F})$ n'est que $f_*(\mathcal{F})$ déjà défini.

Définition 4.6.2 Dans la situation ci-dessus f est dit pur de dimension n par rapport à $\mathcal{F}$ si $R^k f_*(\mathcal{F}) = 0$ pour $k \neq n$.

Théorème 4.6.3 Si $f: X \rightarrow Y$ est pur de dimension n par rapport à un faisceau $\mathcal{F}$ sur X , on a pour tout S localement fermé dans Y ,

$$H_{f^{-1}(S)}^k(X, \mathcal{F}) = H_S^{k-n}(Y, R^n f_*(\mathcal{F})).$$

Démonstration Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d^1} \dots$ une résolution flasque. $H^k(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ est par définition le k -ième groupe de cohomologie du complexe:

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^0(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{L}^1(f^{-1}(U)) \rightarrow \dots$$

i.e. du complexe:

$$0 \rightarrow f_* \mathcal{L}^0(U) \rightarrow f_* \mathcal{L}^1(U) \rightarrow \dots$$

Donc $R^k f_*(\mathcal{F})$ est le k -ième groupe de cohomologie du complexe de faisceaux:

$$0 \rightarrow f_* \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d_*^0} f_* \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d_*^1} \dots$$

Notre hypothèse donc fournit une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow f_* \mathcal{L}^0 \rightarrow \dots \rightarrow f_* \mathcal{L}^{n-1} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

où $\mathcal{G} = \text{Im } d_*^{n-1}$. Notons que $f_* \mathcal{L}^j$ sont flasques. Donc en vertu du Corollaire

4.1.6 $\mathcal{I}$ est aussi flasque et on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \Gamma_S(Y, f_{\#} \mathcal{L}^0) \longrightarrow \Gamma_S(Y, f_{\#} \mathcal{L}^1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_S(Y, \mathcal{I}) \longrightarrow 0.$$

En remarquant que $\Gamma_S(Y, f_{\#} \mathcal{L}^k) = \Gamma_{f^{-1}(S)}(X, \mathcal{L}^k)$ on obtient ainsi $\Gamma_S(Y, \mathcal{I}) = d^{n-1} \Gamma_{f^{-1}(S)}(X, \mathcal{L}^{n-1})$, et $H_{f^{-1}(S)}^k(X, \mathcal{I}) = 0$ pour $k < n$. De plus, en posant $\mathcal{Z} = \text{Ker } d_{\#}^n$ on a la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow R^n f_{\#}(\mathcal{I}) \longrightarrow 0$ et une résolution flasque de $\mathcal{Z}$: $0 \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow f_{\#} \mathcal{L}^n \longrightarrow f_{\#} \mathcal{L}^{n+1} \longrightarrow \dots$. À partir de maintenant la démonstration sera une copie fidèle de celle du Théorème 4.4.4. C.Q.F.D.

Par la même raison on obtient le

Corollaire 4.6.4 Supposons que $R^k f_{\#}(\mathcal{I}) = 0$ pour $k < n$. Alors le préfaisceau $Y \supset U \mapsto H^n(f^{-1}(U), \mathcal{I})$ est un faisceau et bien entendu égal à $R^n f_{\#}(\mathcal{I})$.

Pour continuer l'étude de l'image directe introduisons la

Définition 4.6.5 Soit X un espace topologique, $S \subset X$ une partie et $\iota: S \rightarrow X$ l'inclusion. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X . On désigne le faisceau $\iota^{-1} \mathcal{F}$ sur S par $\mathcal{F}|_S$ et l'appelle la restriction de $\mathcal{F}$ sur S .

Remarquons que $\mathcal{E}|_{\{x_1=0\}}$ n'est pas le faisceau de fonctions de $n-1$ variables sur $\mathbb{R}^{n-1}$. En chaque point x dans $\{x_1=0\}$, $\mathcal{E}|_{\{x_1=0\}}$ a la même fibre que $\mathcal{E}$ du départ.

Proposition 4.6.6 Supposons que X est un espace topologique dont les ouverts sont tous paracompacts (séparés). (Cette condition sera satisfaite si par exemple X est métrisable.) Pour une partie $S \subset X$ et pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur X , on a alors

$$H^k(S, \mathcal{F}|_S) = \varinjlim_{U \supset S} H^k(U, \mathcal{F}),$$

où U parcourt les ouverts contenant S .

Démonstration 1^{ère} étape Nous montrons que l'application canonique

$$(4.22) \quad \varinjlim_{U \supset S} \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(S, \mathcal{F}|_S)$$

est un isomorphisme. Soient U_1, U_2 deux ouverts contenant S et soient $s_1 \in \Gamma(U_1, \mathcal{F})$, $s_2 \in \Gamma(U_2, \mathcal{F})$ vérifiant $s_1|_S = s_2|_S$. Cela signifie que leur germe est égal en chaque point $x \in S$: $s_1(x) = s_2(x)$. Il existe donc un voisinage V_x

Pour $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ désignons par $s|_S$ la section globale de $\mathcal{F}|_S$ canoniquement induite de s .

de x tel que $s_1|_{V_x} = s_2|_{V_x}$. On obtient ainsi un voisinage $V = \bigcup_{x \in S} V_x$ de S où l'on a $s_1|_V = s_2|_V$. Donc (4.22) est injectif.

Réciproquement, soit $s \in \Gamma(S, \mathcal{F}|_S)$. Pour tout $x \in S$ choisissons un voisinage U_x et une section $s_x \in \Gamma(U_x, \mathcal{F})$ tels que $s_x|_{S \cap U_x} = s|_{S \cap U_x}$. Posons $U = \bigcup_{x \in S} U_x$ et prenons un raffinement localement fini $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ du recouvrement $\{U_x\}_{x \in S}$ de U (ce qui est possible puisque U est paracompact). On peut trouver aussi un autre raffinement $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ avec le même ensemble d'indices tel que $\overline{W}_\lambda \subset V_\lambda$. Choisissons une application de raffinement $x: \Lambda \rightarrow X$ et posons $s_\lambda = s_{x(\lambda)}|_{V_\lambda}$. Posons encore $V = \{x \in X; s_\lambda(x) = s_\mu(x) \text{ si } x \in \overline{W}_\lambda \cap \overline{W}_\mu\}$.

C'est un voisinage de S (mais non nécessairement ouvert). En effet, par la finitude locale on peut prendre un voisinage V_x pour chaque $x \in S$ tel qu'il intersecte seulement un nombre fini d'éléments $\overline{W}_{\lambda_1}, \dots, \overline{W}_{\lambda_N}$. On peut donc trouver un autre voisinage $W_x \subset V_x$ tel que $s_{\lambda_1}|_{W_x} = \dots = s_{\lambda_N}|_{W_x}$. D'où $V \supset W_x$. Il existe donc un ouvert W tel que $V \supset W \supset S$ et une section $\tilde{s} \in \Gamma(W, \mathcal{F})$, le recollement de $s_\lambda \in \Gamma(V_\lambda \cap W, \mathcal{F})$. Il est clair que $\tilde{s}|_S = s$. Ainsi (4.22) est surjectif.

Remarquons que nous avons juste démontré que dans ce cas particulier le préfaisceau donné dans la Définition 1.7.4 pour définir l'image réciproque $\mathcal{G}^{-1}\mathcal{F}$ est déjà un faisceau.

2^e étape Montrons que pour un faisceau flasque $\mathcal{L}$ sur X , $\mathcal{L}|_S$ est aussi flasque. Soit $U \subset X$ un ouvert. D'après la 1^{ère} étape on a

$$\Gamma(S \cap U, \mathcal{L}|_S) = \varinjlim_{V \supset S \cap U} \Gamma(V, \mathcal{L}).$$

Donc $s \in \Gamma(S \cap U, \mathcal{L}|_S)$ provient d'une section $s_V \in \Gamma(V, \mathcal{L})$. $\mathcal{L}$ étant flasque, celle-ci est la restriction d'une autre $\tilde{s} \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Alors $\tilde{s}|_S \in \Gamma(S, \mathcal{L}|_S)$ sera un prolongement voulu.

3^e étape Soit donc $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^*$ une résolution flasque. Alors $0 \rightarrow \mathcal{F}|_S \rightarrow \mathcal{L}^*|_S$ en est aussi. D'après le Lemme 4.2.5 on obtient donc

$$\varinjlim_{U \supset S} H^k(U, \mathcal{F}) = \varinjlim_{U \supset S} H^k(\Gamma(U, \mathcal{L}^*)) = H^k(\varinjlim_{U \supset S} \Gamma(U, \mathcal{L}^*))$$

$$= H^k(\Gamma(S, \mathcal{X}|_S)) = H^k(S, \mathcal{F}|_S). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Théorème 4.6.7 Supposons que X a la même propriété que la Proposition

4.6.6. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue et fermée (i.e. f envoie tout fermé à un fermé de Y). On a alors

$$(R^k f_*(\mathcal{F}))_y = H^k(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)}),$$

pour tout $y \in Y$, où le premier membre désignant la fibre en y .

Démonstration D'après la Proposition 4.6.6 on a

$$H^k(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)}) = \varinjlim_{U \supset f^{-1}(y)} H^k(U, \mathcal{F}).$$

Puisque f est fermé, $\{f^{-1}(V)\}$ constitue un système de voisinages fondamentaux de $f^{-1}(y)$ lorsque V parcourt les voisinages de y . On a donc

$$\varinjlim_{U \supset f^{-1}(y)} H^k(U, \mathcal{F}) = \varinjlim_{V \ni y} H^k(f^{-1}(V), \mathcal{F}) = R^k f_*(\mathcal{F})_y. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque L'hypothèse que f soit fermé est essentielle. Considérons

par exemple le faisceau $\mathcal{E}$ de fonctions indéfiniment différentiables sur un

ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tel qu'il existe un niveau $x_1 = \text{cte}$

dont l'intersection avec Ω est non connexe. Soit

π la projection sur l'axe des x_1 . Considérons

l'homomorphisme de faisceaux $p(x, \partial) = \frac{\partial}{\partial x_2}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Alors $\text{Ker } p$ est un faisceau isomorphe à l'image

réciproque par π du faisceau de fonctions différentiables d'une variable

x_1 . La restriction de ce faisceau sur chaque fibre $\pi^{-1}(x_1)$ est constant.

Donc comme on le calcule dans le paragraphe suivant on a $H^k(\pi^{-1}(x_1), \mathcal{E}_p|_{\pi^{-1}(x_1)}) = 0$ pour $k \geq 1$. Mais π n'est pas pur de dimension 0 par rapport à $\mathcal{E}_p$.

En effet, s'il en était ainsi, on obtiendrait d'après le Théorème 4.6.3

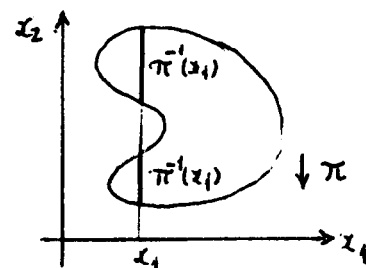
$H^k(\Omega, \mathcal{E}_p) = H^k(\pi(\Omega), \pi_* \mathcal{E}_p)$. On voit facilement que ce second membre

s'annule pour $k \geq 1$. On obtiendrait donc en particulier $H^1(\Omega, \mathcal{E}_p) = 0$. Mais ce

dernier est équivalent à la surjectivité de $p: \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ et il est bien

connu qu'il n'en est pas ainsi. Notons que par contre si on considère un

compact K au lieu de Ω , cet argument nous montre la surjectivité bien



connue $p: \mathcal{E}(K) \rightarrow \mathcal{E}(K)$.

Exercice Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Soit $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux sur X . On a alors la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow f_* \mathcal{F}' \rightarrow f_* \mathcal{F} \rightarrow f_* \mathcal{F}'' \rightarrow R^1 f_* (\mathcal{F}') \rightarrow R^1 f_* (\mathcal{F}) \rightarrow R^1 f_* (\mathcal{F}'') \rightarrow \dots$$

7. Calcul de cohomologie pour faisceaux constants

Pour usage ultérieur nous calculons quelques exemples concrets de groupes de cohomologie.

Définition 4.7.1 Soit G un espace C -vectoriel et soit X un espace topologique. Le faisceau constant G_X sur X à fibre G est celui défini par

$$X \supset U \mapsto G_X(U) = \{s: U \rightarrow G; \text{fonctions localement constantes}\}.$$

Notons que si U est connexe on a $G_X(U) = U \times G$. En général, la section peut prendre différentes valeurs sur chaque composante connexe. Nous écrirons G au lieu de G_X s'il n'y aura pas de crainte de confusion.

Lemme 4.7.2 Soit $I = [0, 1]$ l'intervalle. On a

$$H^k(I, G_I) = \begin{cases} G & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration Puisque I est compact (séparé), on peut calculer la cohomologie par recouvrement. Tout recouvrement de I admet un raffinement fini $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$ formé d'ouverts connexes tels que $U_j \cap U_{j+k} = \emptyset$ pour $k \geq 2$. D'où aussitôt $H^k(I, G_I) = 0$ pour $k \geq 2$. $H^1(I, G_I) = 0$ se vérifie directement en résolvant l'équation $\delta^0 \psi = \varphi$ pour $\varphi \in C^1(\mathcal{U}, G_I)$. Enfin on a $H^0(I, G_I) = \Gamma(I, G_I) = G$. C.Q.F.D.

Lemme 4.7.3 Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur Y , et soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Il existe alors un homomorphisme canonique

$$(4.23) \quad f^*: H^k(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^k(X, f^{-1}\mathcal{F}).$$

En particulier, il existe un homomorphisme canonique

$$(4.24) \quad f^*: H^k(Y, G_Y) \rightarrow H^k(X, G_X).$$

Démonstration Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^{\bullet}$ une résolution flasque. Alors $0 \rightarrow f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow f^{-1}\mathcal{L}^{\bullet}$ est aussi une résolution mais non nécessairement flasque. Comme on a remarqué après le Théorème 4.3.3, il existe donc un homomorphisme $H^k(\Gamma(X, f^{-1}\mathcal{L}^{\bullet})) \rightarrow H^k(X, f^{-1}\mathcal{F})$. D'autre part, l'homomorphisme canonique $\Gamma(Y, \mathcal{L}^j) \rightarrow \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{L}^j)$ induit une application de cochaînes $\Gamma(Y, \mathcal{L}^{\bullet}) \rightarrow \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{L}^{\bullet})$, d'où un homomorphisme $H^k(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^k(\Gamma(X, f^{-1}\mathcal{L}^{\bullet}))$. En combinant ces deux homomorphismes on obtient (4.23). La canonicité se vérifie comme dans la démonstration du Lemme 4.5.8. Pour (4.24) il suffit de remarquer que $f^{-1}(G_Y) = G_X$. C.Q.F.D.

Exercices Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une suite d'applications continues. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur Z . On a alors $(g^* \circ f^*)^{\#} = f^* \circ g^{\#} : H^k(Z, \mathcal{F}) \rightarrow H^k(X, f^{-1}g^{-1}\mathcal{F})$.

Exercice Soit $\mathcal{U} = \{U_{\lambda}\}$ un recouvrement de Y . Posons $f^{-1}\mathcal{U} = \{f^{-1}(U_{\lambda})\}$. Pour la cohomologie de Čech, l'application f^* de (4.24) est représentée par celle : $H^k(\mathcal{U}, G_Y) \rightarrow H^k(f^{-1}\mathcal{U}, G_X)$ définie par $\sum c_{\lambda_0, \dots, \lambda_k} U_{\lambda_0} \wedge \dots \wedge U_{\lambda_k} \mapsto \sum c_{\lambda_0, \dots, \lambda_k} f^{-1}(U_{\lambda_0}) \wedge \dots \wedge f^{-1}(U_{\lambda_k})$.

Soient maintenant $f_j : X \rightarrow Y$, $j = 0, 1$, deux applications continues. On dit qu'elles sont homotopes (et note $f_0 \simeq f_1$) s'il existe une application continue $F : X \times I \rightarrow Y$ telle que $F(x, 0) \equiv f_0(x)$, $F(x, 1) \equiv f_1(x)$. F est dit une homotopie entre f_0 et f_1 . Deux espaces topologiques $\underbrace{(X, Y)}_{\text{homotopiques}}$ sont dits du même type homotopique s'il existe des applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Par exemple un espace contractile a le même type homotopique qu'un point.

Lemme 4.7.4 Si $f_j : X \rightarrow Y$, $j = 0, 1$ sont homotopes, ils induisent le même homomorphisme (4.24) : $f_0^{\#} = f_1^{\#}$.

Démonstration Soit $F : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie entre f_0 et f_1 . Définissons les applications $\iota_j : X \rightarrow X \times I$ par $\iota_j(x) = (x, j)$, $j = 0, 1$. On a $f_j = F \circ \iota_j$, d'où $f_j^{\#} = \iota_j^{\#} F^{\#}$. D'autre part, soit $\pi : X \times I \rightarrow X$ la projection. Alors $\pi \circ \iota_j = \text{id}_X$, d'où $\iota_j^{\#} \pi^{\#} = \text{id}$. Donc on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^k(X, G_X) & \xleftarrow{f_0^{\#}} & \\
 & \nearrow \text{id} & \uparrow \iota_0^{\#} & & \\
 H^k(X, G_X) & \xrightarrow{\pi^{\#}} & H^k(X \times I, G_{X \times I}) & \xleftarrow{F^{\#}} & H^k(Y, G_Y) \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow \iota_1^{\#} & & \\
 & & H^k(X, G_X) & \xleftarrow{f_1^{\#}} &
 \end{array}$$

Donc pour voir $f_0^{\#} = f_1^{\#}$, il suffit de montrer que $\pi^{\#}$ est un isomorphisme.

Or on a d'après le Corollaire 4.6.7 et le Lemme 4.7.2

$$(R^k \pi_{\#}^{G_{X \times I}})_X = H^k(\{x\} \times I, G_{\{x\} \times I}) = \begin{cases} G & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0. \end{cases}$$

Donc π est pur de dimension 0 par rapport à $G_{X \times I}$ et d'après le Théorème 4.6.3 on a un isomorphisme $H^k(X, \pi_{\#}^{G_{X \times I}}) \cong H^k(X \times I, G_{X \times I})$. Notons que $\pi_{\#}^{G_{X \times I}} = G_X$. Donc il reste à vérifier que l'homomorphisme $\pi^{\#}$ s'accorde avec celui qui définit cet isomorphisme. Soit $0 \rightarrow G_{X \times I} \rightarrow \mathcal{L}^{\bullet}$ une résolution flasque. Le fait que π est pur de dimension 0 signifie que $0 \rightarrow \pi_{\#}^{G_{X \times I}} \rightarrow \pi_{\#} \mathcal{L}^{\bullet}$ est exact, donc une résolution flasque de $\pi_{\#}^{G_{X \times I}} = G_X$. Donc $\pi^{\#}$ est par définition la composée de deux flèches obliques dans le diagramme ci-dessous:

$$\begin{array}{ccc} H^k(\Gamma(X, \pi_{\#} \mathcal{L}^{\bullet})) & \xrightarrow{\quad} & H^k(\Gamma(X \times I, \mathcal{L}^{\bullet})) \\ & \searrow & \nearrow \\ & H^k(\Gamma(X \times I, \pi^{-1} \pi_{\#} \mathcal{L}^{\bullet})) & \end{array}$$

D'autre part l'isomorphisme dans le Théorème 4.6.3 est donné par la flèche horizontale. C.Q.F.D.

Théorème 4.7.5 Si X et Y ont le même type homotopique, on a $H^k(X, G_X) = H^k(Y, G_Y)$ pour tout k . En particulier, si X est contractile, on a

$$H^k(X, G_X) = \begin{cases} G & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0. \end{cases}$$

En effet, par définition il existe $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ tels que $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, d'où d'après le Lemme 4.7.4 $g^{\#} \circ f^{\#} = \text{id}$, $f^{\#} \circ g^{\#} = \text{id}$.

Proposition 4.7.6 Soit S^n la sphère de dimension n . On a

$$H^k(S^0, G) = \begin{cases} G \oplus G & \text{pour } k = 0, \\ 0 & \text{pour } k \neq 0, \end{cases}$$

$$H^k(S^n, G) = \begin{cases} G & \text{pour } k = 0, n \\ 0 & \text{pour } k \neq 0, n \end{cases} \quad (\text{pour } n \geq 1).$$

Démonstration Le cas $n = 0$ est banal. Supposons $n \geq 1$. Soit p un point de S (soit par exemple le pôle du nord). En vertu du Théorème 4.3.6 c)

on a la suite exacte suivante:

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow H_{\{p\}}^0(S^n, G) \longrightarrow H^0(S^n, G) \longrightarrow H^0(S^n \setminus \{p\}, G) \\
 &\longrightarrow H_{\{p\}}^1(S^n, G) \longrightarrow H^1(S^n, G) \longrightarrow H^1(S^n \setminus \{p\}, G) \\
 &\longrightarrow \dots \\
 &\longrightarrow H_{\{p\}}^k(S^n, G) \longrightarrow H^k(S^n, G) \longrightarrow H^k(S^n \setminus \{p\}, G) \longrightarrow \dots
 \end{aligned}$$

Notons que $S^n \setminus \{p\}$ est homéomorphe au disque ouvert de dimension n , donc contractile. On a donc $H^k(S^n \setminus \{p\}, G) = 0$ pour $k \geq 1$, d'où

$$(4.25) \quad H_{\{p\}}^k(S^n, G) = H^k(S^n, G)$$

pour $k \geq 2$. D'autre part l'application $H^0(S^n, G) \rightarrow H^0(S^n \setminus \{p\}, G)$ n'est autre que l'identité $G \rightarrow G$. Donc la suite se casse en première ligne et on obtient

(4.25) aussi pour $k = 1$ et en plus

$$H_{\{p\}}^0(S^n, G) = 0.$$

Désignons ensuite par D^n l'hémisphère du nord ouverte qui est homéomorphe au disque. D'après le Théorème 4.3.6 a) (excision), on a

$$(4.26) \quad H_{\{p\}}^k(S^n, G) = H_{\{p\}}^k(D^n, G), \quad \text{pour tout } k.$$

Or, on a une autre suite pareille:

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow H_{\{p\}}^0(D^n, G) \longrightarrow H^0(D^n, G) \longrightarrow H^0(D^n \setminus \{p\}, G) \\
 &\longrightarrow H_{\{p\}}^1(D^n, G) \longrightarrow H^1(D^n, G) \longrightarrow H^1(D^n \setminus \{p\}, G) \\
 &\longrightarrow \dots \\
 &\longrightarrow H_{\{p\}}^k(D^n, G) \longrightarrow H^k(D^n, G) \longrightarrow H^k(D^n \setminus \{p\}, G) \longrightarrow \dots
 \end{aligned}$$

d'où

$$(4.27) \quad H_{\{p\}}^k(D^n, G) = H^{k-1}(D^n \setminus \{p\}, G) \quad \text{pour } k \geq 2.$$

$$(4.28) \quad H_{\{p\}}^1(D^n, G) = H^0(D^n \setminus \{p\}, G) / H^0(D^n, G) = \begin{cases} G & \text{pour } n = 1 \\ 0 & \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

Notons enfin que $D^n \setminus p$ a le même type homotopique que S^{n-1} . On a donc

$$(4.29) \quad H^k(D^n \setminus p, G) = H^k(S^{n-1}, G) \quad \text{pour tout } k.$$

En combinant (4.25) - (4.27) et (4.29) on obtient

$$H^k(S^n, G) = H^{k-1}(S^{n-1}, G) \quad \text{pour } k \geq 2.$$

Donc si $k > n$ on obtient par la récurrence descendante

$$H^k(S^n, G) = H^{k-n}(S^0, G) = 0.$$

De même, si $1 \leq k \leq n$, on obtient

$$\begin{aligned} H^k(S^n, G) &= H^1(S^{n-k+1}, G) = H^1_{\{p\}}(S^{n-k+1}, G) = H^1_{\{p\}}(D^{n-k+1}, G) \\ &= \begin{cases} G & \text{pour } k = n; \\ 0 & \text{pour } 1 \leq k \leq n-1, \end{cases} \end{aligned}$$

où on a utilisé (4.25), (4.26) et (4.28). C.Q.F.D.

Proposition 4.7.7

$$H^k_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}(G_{\mathbb{R}^{n+d}}) = \begin{cases} G_{\mathbb{R}^n} & \text{pour } k = d, \\ 0 & \text{pour } k \neq d. \end{cases}$$

Démonstration Le cas $d = 0$ étant banal, supposons $d \geq 1$. Prenons $D^n \times D^d$ comme un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^{n+d}$, où D^n désigne le disque ouvert de dimension n . On a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0_{D^n \times \{0\}}(D^n \times D^d, G) \longrightarrow H^0(D^n \times D^d, G) \longrightarrow H^0(D^n \times (D^d \setminus \{0\}), G) \\ &\longrightarrow H^1_{D^n \times \{0\}}(D^n \times D^d, G) \longrightarrow H^1(D^n \times D^d, G) \longrightarrow H^1(D^n \times (D^d \setminus \{0\}), G) \\ &\longrightarrow \dots \\ &\longrightarrow H^k_{D^n \times \{0\}}(D^n \times D^d, G) \longrightarrow H^k(D^n \times D^d, G) \longrightarrow H^k(D^n \times (D^d \setminus \{0\}), G) \longrightarrow \dots, \end{aligned}$$

d'où

$$H^0_{D^n \times \{0\}}(D^n \times D^d, G) = 0$$

$$H^1_{D^n \times \{0\}}(D^n \times D^d, G) = \begin{cases} G & \text{pour } d = 1, \\ 0 & \text{pour } d \geq 2, \end{cases}$$

$$H^k_{D^n \times \{0\}}(D^n \times D^d, G) = H^{k-1}(D^n \times (D^d \setminus \{0\}), G) \text{ pour } k \geq 2.$$

Notons que $D^n \times (D^d \setminus \{0\})$ a le même type homotopique que S^{d-1} . Donc d'après la proposition précédente, on obtient

$$H^k_{D^n \times \{0\}}(D^n \times D^d, G) = \begin{cases} G & \text{pour } d = k, \\ 0 & \text{pour } d \neq k \end{cases}$$

aussi pour $k \geq 2$. Donc en passant à la limite par rapport au voisinage, on obtient le même résultat pour la fibre de $H^k_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}(G_{\mathbb{R}^{n+d}})$ en 0. C.Q.F.D.