COURS DE L'INSTITUT FOURIER

ARMAND BRUMER

I- Courbes elliptiques et courbes modulaires

Cours de l'institut Fourier, tome 10 (1975), p. 1-51

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1975__10__A2_0>

I- courbes elliptiques et courbes modulaires

1. *CLASSIFICATION DES COURBES ELLIPTIQUES*

1.1. DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Soient K un corps de caractéristique p (positive ou nulle), $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, et K_s la clôture séparable de K contenue dans $\overline{K}$.

On appelle courbe elliptique sur K toute variété abélienne définie sur K de dimension 1.

Cette définition équivaut à la suivante :

Une courbe elliptique sur K est une courbe algébrique E projective non-singulière de genre 1 définie sur K et munie d'un point O rationnel sur K.

En effet, nous allons voir ci-dessous comment on peut définir une structure de groupe sur une telle courbe E.

1.1.1. *PROPOSITION*.

(i) La courbe E est isomorphe à une cubique plane d'équation affine :

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad , \tag{1}$$

où les a_i sont dans K ;

(ii) On a alors $K(E) = K(x,y) = K[X,Y]/(F(X,Y))$ avec

$$F(X,Y) = Y^2 + a_1XY + a_3Y - X^3 - a_2X^2 - a_4X - a_6 \ .$$

■ (i) Appliquons le théorème de Riemann-Roch au diviseur nO, où n est un entier strictement positif. La dimension $\ell(nO)$ de l'espace $L(nO)$ des diviseurs de fonctions supérieurs ou égaux à $(-nO)$ est donnée par : $\ell(nO) = \deg(nO) - g + 1 = \deg(nO) = n$. En particulier, $L(O) = K$, $L(2O)$ a une base de la forme $\{1,x,y\}$, où x (resp.y) a un pôle d'ordre 2 (resp. 3) en O. Et $L(6O)$ est de dimension 6 ; or il contient les 7 éléments $\{1,x,y,x^2,xy,y^2,x^3\}$, donc il y a une relation K-linéaire entre ces éléments. Si le coefficient de y^2 (resp. de x^3) était nul, la courbe E serait de genre nul; ainsi, on peut écrire l'équation de E sous la forme (1) .

(ii) L'ordre en O des fonctions 1 , x , y , x^2 , xy , y^2 , x^3 , étant respectivement : 0 , -2 , -3 , -4 , -5 , -6 , -6 , il ne peut pas y avoir entre eux de relation de degré strictement plus petit que 2 en y , ou que 3 en x. Donc $F(X,Y)$ est irréductible dans $K[X,Y]$, et l'on a bien : $K(E) = K[X,Y]/(F(X,Y)) = K(x,y)$. ■

Remarque : le point O est l'unique point à l'infini sur la courbe d'équation (1) .

Remarquons aussi que la fonction $\ell x + my + n$ $(\ell,m,n \in K)$ a un pôle triple en O et pas d'autre pôle : elle a donc 3 zéros P_1 , P_2 , P_3 . On définit une loi de groupe sur E en posant : $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ (cf.[11],5,6) ; on utilise ici la non-singularité de E . Sur la cubique d'équation affine (1) , cela signifie que le point à l'infini est l'origine pour la loi de groupe, et que la somme de 3 points est nulle si et seulement si ces 3 points sont alignés (cf [5] ,7). Soient E et E' deux courbes elliptiques sur K , et L une extension de K contenue dans $\overline{K}$. Nous appellerons L-homomorphisme de E dans E' toute application rationnelle définie sur L de E dans E' qui soit un homomorphisme de groupes. En fait, toute application rationnelle de E dans E' définie sur L et transformant l'origine de E en l'origine de E' est un L-homomorphisme (cf [5]).

1.1.2. Réciproquement, une équation du type (1) définit une courbe E qui est elliptique si et seulement si elle n'a pas de points singuliers, ce qui équivaut à $\Delta \neq 0$, où Δ est le <u>discriminant</u> défini par les formules ci-dessous, (cf [47]) :

$$(2) \qquad b_2 = a_1^2 + 4a_2 \quad , \quad b_4 = a_1a_3 + 2a_4 \quad , \quad b_6 = a_3^2 + 4a_6 \quad ,$$

$$b_8 = b_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 = \frac{b_2b_6 - b_4^2}{4}$$

$$c_4 = b_2^2 - 24b_4 \quad , \quad c_6 = -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6 \quad ,$$

$$\Delta = \frac{c_4^3 - c_6^2}{12^3} = -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 \quad .$$

Posons aussi : $j = c_4^3/\Delta$; j est appelé l'<u>invariant</u> de E .

1.1.3. Lorsque $p \neq 2, 3$, l'équation de E peut s'écrire sous la forme :

$$(3) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \quad ,$$

dite "<u>forme de Weierstrass</u>" (cf.[5],7). Dans ce cas, Δ est le discriminant du polynôme cubique du second membre multiplié par 16 .

La forme de Weierstrass d'une courbe elliptique n'est pas unique, mais g_2 (resp. g_3, Δ) sont définis à un coefficient près dans K^{*4} (resp. K^{*6}, K^{*12}) , comme nous le voyons ci-dessous (1.2.1).

1.2. <u>CLASSIFICATION A $\overline{K}$ ISOMORPHISME PRES</u>.

1.2.1. *PROPOSITION* . <u>L'application qui fait correspondre à toute courbe elliptique</u> E <u>son invariant</u> j <u>définit une bijection entre l'ensemble des classes de</u> $\overline{K}$- <u>isomorphisme de courbes elliptiques sur</u> K , <u>et l'espace affine</u> $\mathbf{A}^1(K)$ <u>de dimension</u> 1 <u>sur</u> K .

▪ Soient E , E' , 2 courbes elliptiques sur K , et f un $\overline{K}$-isomorphisme de E sur E' , donc f' envoie O sur l'origine O' de E' . Ecrivons les équations de E et E' sous la forme (1) , les coor-

données étant notées (x,y) pour E, et (x',y') pour E', et considérons x,y (resp. x',y') comme fonctions rationnelles sur E (resp. E') ; alors $x'\circ f$ (resp. $y'\circ f$) est une fonction rationnelle sur E avec un pôle d'ordre 2 (resp. 3) en O, autrement dit c'est un élément de $L(2O)$ (resp. $L(3O)$), c'est-à-dire une combinaison $\overline{K}$ linéaire de $\{1,x\}$ (resp. $\{1,x,y\}$). Mais les coefficients de y^2 et x^3 dans (1) sont égaux à 1, donc on a plus précisément :

$$(4) \qquad x'\circ f = u^2x + r \quad , \quad y'\circ f = u^3y + u^2sx + t \ ,$$

où $u,r,s,t \in \overline{K}$, $u \neq 0$. Les calculs donnent :

$$c'_4 = u^4c_4 \ , \ c'_6 = u^6c_6 \ , \ \Delta' = u^{12}\Delta \ \text{ et } \ j' = j \ .$$

(cf. [18], Appendix 1, §1).

D'autre part, si E et E' sont 2 courbes elliptiques sur K, de même invariant, on peut déterminer $u,r,s,t \in \overline{K}$, $u \neq 0$, de telle sorte que les formules (4) définissent un $\overline{K}$-isomorphisme f de E sur E'. (cf. [18], Appendix 1, §2).

Enfin, pour tout j de K, il existe une courbe elliptique E sur K dont j soit l'invariant ; si $j \neq 0, 12^3$, on peut prendre la courbe d'équation : $y^2+xy = x^3 - \frac{36}{j-12^3}x - \frac{1}{j-12^3}$; si $j = 0$ et $p \neq 2,3$, la courbe d'équation : $y^2 = x^3 - \frac{c_6}{864}$, pour n'importe quelle valeur non nulle de c_6 ; si $j = 12^3$ et $p \neq 2,3$, la courbe d'équation : $y^2 = x^3 - \frac{c_4}{48}x$ pour n'importe quelle valeur non nulle de c_4 ; si $p = 2$ (resp. $p = 3$) et $j = 0 = 12^3$, on peut prendre la courbe d'équation : $y^2 + y = x^3$ (resp. $y^2 = x^3-x$). ∎

1.2.2. <u>Application</u> : détermination de $Aut(E)$.

Notons $Aut(E)$ le groupe des $\overline{K}$-automorphismes de E, et μ_n le groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

PROPOSITION . Si $j \neq 0$, 12^3 , alors $\mathrm{Aut}(E) = \{\pm 1\} = \mu_2$; si $j = 0$ et $p \neq 2,3$, alors $\mathrm{Aut}(E) = \mu_6$; si $j = 12^3$ et $p \neq 2,3$, alors $\mathrm{Aut}(E) = \mu_4$.

■ Considérons un automorphisme de E défini à l'aide des formules (4) . Comme $c'_4 = c_4$ et $c'_6 = c_6$, nous avons $u^2 = 1$ si $j \neq 0, 12^3$; si $j = 0$ et $p \neq 2,3$, nous avons seulement $u^6 = 1$ car $c_4 = c'_4 = 0$; si $j = 12^3$ et $p \neq 2,3$, nous avons seulement $u^4 = 1$ car $c_6 = c'_6 = 0$. Or, le changement de variable défini par les formules (4) doit définir la même courbe E : cela implique $r = s = t = 0$. ■

1.2.3. Remarque : Si $p = 2$ (resp. $p = 3$) et $j = 0 = 12^3$, alors $\mathrm{Aut}\, E \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ (resp. $\mathrm{Aut}\, E \simeq \sigma_3$) (cf. [47] ,2).

1.3. CLASSIFICATION A K-ISOMORPHISME PRES. (cf.[5] , théorème 9.1).

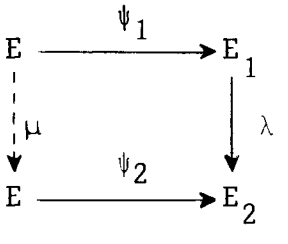
1.3.1. *PROPOSITION* . Soit j un élément de K . L'ensemble des classes de K-isomorphisme de courbes elliptiques sur K d'invariant j , est en bijection avec le groupe de cohomologie $H^1(G_K, \mathrm{Aut}(E))$, où G_K est le groupe de Galois de K_s/K et $\mathrm{Aut}(E)$ le groupe des $\bar{K}$-automorphismes de n'importe quelle courbe elliptique sur K d'invariant j .

Rappelons que les éléments de $H^1(G_K, \mathrm{Aut}(E))$ sont les classes des 1-cocycles continus, et qu'un 1-cocycle λ_σ $(\sigma \in G_K)$ est dit continu s'il existe une extension galoisienne finie L/K telle que $\lambda_\sigma = \lambda_\tau$ dès que σ et τ ont la même action sur L . Et remarquons que $\mathrm{Aut}(E)$ n'est pas toujours abélien (cf. 1.2.3).

■ Définissons d'abord une application de l'ensemble des courbes elliptiques sur K d'invariant j dans le groupe $H^1(G_K, \mathrm{Aut}(E))$, de sorte que deux courbes elliptiques K-isomorphes aient même image.

Soient E et E_1 deux courbes elliptiques sur K d'invariant j .

D'après la proposition (1.2.1), il existe un $\bar{K}$-isomorphisme ψ de E sur E_1. Ecrivons l'équation de E sous la forme (1), et considérons un élément σ de G_K. Notons E^σ la courbe obtenue en remplaçant les coefficients a_i par leur image a_i^σ ; ici $a_i \in K$ donc $a_i^\sigma = a_i$ et $E^\sigma = E$. Notons $\sigma(\psi)$ le $\bar{K}$-isomorphisme de E^σ sur E_1^σ obtenu en appliquant σ aux coefficients de ψ. Ainsi, pour chaque $\sigma \in G_K$, nous déduisons de ψ un $\bar{K}$-isomorphisme $\sigma(\psi)$ de E sur E_1. Définissons $\Phi : G_K \to \mathrm{Aut}(E)$ par : $\Phi_\sigma = \psi^{-1} \circ \sigma(\psi)$ pour tout $\sigma \in G_k$. Alors Φ est un 1-cocycle de G_K dans $\mathrm{Aut}(E)$ car $\Phi_\rho \circ \rho(\Phi_\sigma) = \psi^{-1} \circ \rho(\psi) \circ \rho(\psi^{-1}) \circ \rho\sigma(\psi) = \psi^{-1} \circ \rho\sigma(\psi) = \Phi_{\rho\sigma}$ pour tous $\rho, \sigma \in G_K$. De plus Φ est continu : en effet $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ dès que σ et τ ont la même action sur l'extension galoisienne de K engendrée par les coefficients de la transformation birationnelle ψ. D'autre part, si 2 courbes elliptiques E_1 et E_2 sur K d'invariant j sont K-isomorphes, soient ψ_i un $\bar{K}$-isomorphisme de E sur E_i $(i = 1,2)$, λ un K-isomorphisme de E_1 sur E_2, et $\mu = \psi_2^{-1} \circ \lambda \circ \psi_1 \in \mathrm{Aut}(E)$. Alors

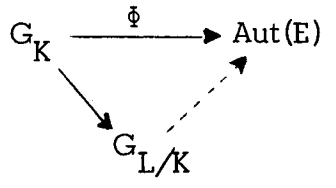


$$\Phi_{1,\sigma} = \psi_1^{-1} \circ \sigma(\psi_1) = \mu^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \lambda \circ \sigma(\lambda^{-1}) \circ \sigma(\psi_2) \circ \sigma(\mu)$$
$$= \mu^{-1} \circ \Phi_{2,\sigma} \circ \sigma(\mu)$$

pour tout $\sigma \in G_K$, donc les cocycles Φ_1 et Φ_2 sont cohomologues. Ceci s'applique en particulier au cas $E_1 = E_2$, $\psi_1 \neq \psi_2$.

En résumé, soit E une courbe elliptique sur K d'invariant j, et soit une K-classe de courbes elliptiques sur K d'invariant j. Considérons une courbe E' quelconque dans cette classe, un $\bar{K}$-isomorphisme quelconque ψ de E sur E', et la classe de cohomologie du 1-cocycle continu de G_K à valeurs dans $\mathrm{Aut}\, E$ défini par : $\Phi_\sigma = \psi^{-1} \circ \sigma(\psi)$ pour tout $\sigma \in G_K$; nous venons de montrer que ceci définit une application de l'ensemble des K-classes de courbes elliptiques sur K d'invariant j, dans $H^1(G_K, \mathrm{Aut}(E))$. Nous allons voir que cette application est bijective. C'est une injection : si $\psi_i : E \to E_i$ $(i = 1,2)$ donnent des cocycles homologues, c'est-à-dire s'il existe $\mu \in \mathrm{Aut}\, E$ tel que pour tout $\sigma \in G_K$, $\psi_1^{-1} \circ \sigma(\psi_1) = \mu^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \sigma(\psi_2) \circ \sigma(\mu)$, alors l'isomorphisme $\lambda = \psi_2 \circ \mu \circ \psi_1^{-1}$ de E_1 sur E_2 est invariant par σ, donc défini sur K.

C'est une surjection : soit Φ un 1-cocycle continu de G_K à valeurs dans Aut(E) , et L une extension galoisienne finie de K telle que Φ se factorise par le groupe de Galois $G_{L/K}$ de L/K . Soit K(E) le corps des fonctions rationnelles de E , et $L(E) = K(E) \otimes_K L$. Le groupe $G_{L/K}$ agit sur L ; comme L et K(E) sont 2 extensions linéairement disjointes sur K , on peut prolonger l'action de $G_{L/K}$ à L(E) de telle sorte que l'action sur K(E) soit triviale. Notons $\sigma(f)$ l'image de $f \in L(E)$ par $\sigma \in G_{L/K}$. D'autre part, notons $\tilde{\sigma}(f) = \sigma(f) \circ \Phi_\sigma^{-1}$; cela définit une autre action de $G_{L/K}$ sur L(E) , car Φ est un 1-cocycle :



$$\tilde{\rho}\tilde{\sigma}(f) = \rho\sigma(f) \circ [\, \Phi_\rho \circ \rho(\Phi_\sigma)\,]^{-1} = \tilde{\rho\sigma}(f)$$

si $\sigma, \rho \in G_{L/K}$, $f \in L(E)$. Le corps des invariants de L(E) pour l'action "ordinaire" de $G_{L/K}$ est K(E) . Notons $L(E)^{\tilde{G}_{L/K}}$ le corps des invariants pour l'action "tordue" de $G_{L/K}$; son corps des constantes est $L^{\tilde{G}_{L/K}} = K$ et son degré de transcendance sur K est égal à 1 . Donc $L(E)^{\tilde{G}_{L/K}}$ est de la forme K(E') pour une courbe algébrique E' sur K telle que K(E').L = L(E) : donc E' est de genre 1 , c'est une courbe elliptique sur K . Et il existe un L-isomorphisme ψ de E sur E' puisque L(E) = L(E') ; d'où un L-isomorphisme de K(E') sur K(E) , défini par : $f \longmapsto f \circ \psi$ et tel que : $\sigma(f) \circ \psi = \tilde{\sigma}(f \circ \psi)$ c'est-à-dire $(\sigma f) \circ \psi = \sigma(f \circ \psi) \circ \Phi_\sigma^{-1} = \sigma(f) \circ \sigma(\psi) \circ \Phi_\sigma^{-1}$ pour tout $f \in L(E)$, et tout $\sigma \in G_{L/K}$ d'où : $\Phi_\sigma = \psi^{-1} \circ \sigma(\psi)$ pour tout $\sigma \in G_K$. ■

2. *COURBES ELLIPTIQUES SUR* $\mathbb{C}$

2.1. FONCTIONS DE WEIERSTRASS.

2.1.1. *THEOREME* . Toute surface de Riemann compacte de genre 1 sur $\mathbb{C}$ est analytiquement isomorphe à une courbe elliptique sur $\mathbb{C}$.

■ Toute surface de Riemann compacte de genre 1 sur $\mathbb{C}$ est un tore de la forme $\mathbb{C}/L$ pour un réseau L de $\mathbb{C}$. Notons $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} / \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré, et soit $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau

de $\mathbb{C}$ tel que $\tau = \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}$. Définissons la fonction de Weierstrass de L par $\wp(u;L) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\lambda\in L}{}' \left(\frac{1}{(u-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$ pour tout $u \in \mathbb{C}$; ici $\sum'$ signifie qu'on somme sur tous éléments non nuls de L . On montre (cf. [18] ,1,3) que cette série converge sur tout compact de $\mathbb{C}$ ne rencontrant pas L . De plus, $\wp$ a un pôle double en O et est paire. Sa dérivée $\wp'(u;L)$ est impaire et L-périodique, i.e. $\wp'(u+\lambda;L) = \wp'(u;L)$ pour tout $\lambda \in L$. On en déduit que $\wp$ et $\wp'$ sont deux fonctions L-elliptiques, c'est-à-dire méromorphes sur $\mathbb{C}$ et L-périodiques.

Montrons que $\wp$ et $\wp'$ sont liés par une relation algébrique : soit k un entier ≥ 2 , et $G_{2k}(L)$ la série d'Eisenstein de poids 2k associée à L , définie par :

$$G_{2k}(L) = \sum_{\lambda\in L}{}' \frac{1}{\lambda^{2k}} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}{}' \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^{2k}}$$

(le second $\sum'$ signifie qu'on somme sur $\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$) . La série $G_{2k}(L)$ est convergente, car la série $\sum_{\lambda\in L}{}' \frac{1}{|\lambda|^{\alpha}}$ converge pour tout nombre réel $\alpha > 2$ (cf. [18] ,1,2). Alors, nous avons :

$$\wp(u;L) = \frac{1}{u^2} + \sum_{k\geq 1} (2k+1)u^{2k}G_{2k+2}(L)$$

et

$$\wp'(u;L) = \frac{-2}{u^3} + \sum_{k\geq 1} (2k+1)(2k)u^{2k-1}G_{2k+2}(L) ,$$

d'où $\wp'^2 = 4\wp^3 - 60\,G_4\wp - 140\,G_6$.

Posons $g_4 = 60\,G_4$ et $g_6 = 140\,G_6$. La courbe E d'équation $y^2 = 4x^3 - g_4x - g_6$ est une cubique du plan affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Les racines du trinôme $4x^3 - g_4x - g_6$ sont les valeurs $\wp(v_i;L)$ (i = 1,2,3) où les nombres v_i sont les zéros de $\wp'(u,L)$ (mod. L).

Comme la fonction $\wp'$ est à la fois impaire et L-périodique, on a

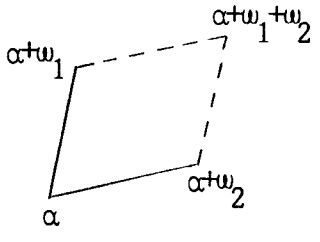
$$\wp'(-\omega_1/2) = -\wp'(\omega_1/2) = \wp'(\omega_1/2) ,$$

donc $\omega_1/2$ est un zéro de $\wp'$; de même $\omega_2/2$ et $(\omega_1+\omega_2)/2$ sont des zéros de $\wp'$, donc les nombres v_1 , v_2 , v_3 sont congrus modulo L à

$\omega_1/2$, $\omega_2/2$, $(\omega_1+\omega_2)/2$ (cf. [3]). La fonction $\wp$ est paire, et $v_i \equiv -v_i \pmod{L}$, donc $\wp$ prend la valeur $\wp(v_i)$ avec une multiplicité paire (≥ 2) . Or $\wp$ a un seul pôle d'ordre 2 modulo L , et nous avons le lemme suivant :

2.1.2. *LEMME* . Soient f une fonction L-elliptique de points "singuliers" (zéros ou pôles) $\{a_i\}$ dans $\mathbb{C}/L$, et m_i l'ordre de f en a_i . Alors $\sum_i m_i = 0$.

■ Soit R un domaine fondamental pour $\mathbb{C}/L$, défini par :



$R = \{z \in \mathbb{C}/z=\alpha+t_1\omega_1+t_2\omega_2, 0 \leq t_i < 1\}$, où α est un complexe choisi de telle sorte que la frontière ∂R de R ne contienne aucun point singulier de f . Le théorème des résidus appliqué à la fonction L-elliptique f'/f et au contour ∂R donne $\sum_i m_i = 0$. ■

Terminons la démonstration du théorème : la fonction L-elliptique $\wp - \wp(v_i)$, ayant un seul pôle double modulo L ne peut avoir d'autre zéro que le zéro double v_i ; en particulier $\wp(v_j) \neq \wp(v_i)$ dès que $i \neq j$. Ainsi les 3 racines du trinôme $4x^3 - g_4x - g_6$ sont distinctes, le discriminant est non nul, et E est une courbe elliptique (cf. 1.1.3).

L'isomorphisme de $\mathbb{C}/L$ sur E (considérée comme courbe projective) est donné par : $u \longmapsto (u^3\wp(u), u^3\wp'(u), u^3)$. ■

2.1.3. Loi de groupe. $\mathbb{C}/L$ et E sont des groupes abéliens (la structure de $\mathbb{C}/L$ étant induite par celle de $\mathbb{C}$), et l'isomorphisme défini dans le théorème (2.1.1) est un isomorphisme de groupes. Autrement dit, si $P_i = (\wp(u_i), \wp'(u_i))$ est le point de E correspondant à $u_i \in \mathbb{C}/L$ $(i=1,2)$, alors le point P_1+P_2 correspond à u_1+u_2 , i.e. $P_1+P_2 = (\wp(u_1+u_2), \wp'(u_1+u_2))$ (cf. [18], 1,3). La loi d'addition sur E étant définie par des propriétés d'alignement (cf. 1.1.1), un raisonnement de géométrie affine élémentaire nous donne les formules :

$$\wp(u_1+u_2) = -\wp(u_1) - \wp(u_2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right)^2 \quad \text{si} \quad u_1 \neq u_2 \ ,$$

$$\wp(2u) = -2\wp(u) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}\right)^2 \qquad \text{(cf. [18], 1, 3).}$$

2.1.4. Corps de fonctions. D'après (1.1.1), le corps $\mathbb{C}(E)$ est égal à $\mathbb{C}(\wp,\wp')$. De façon analogue, $\mathbb{C}(\wp,\wp')$ est le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}/L$, c'est-à-dire le corps des fonctions L-elliptiques (une autre démonstration est donnée dans [18], 1, 2). Ainsi, les fonctions algébriques sur E s'identifient aux fonctions analytiques sur $\mathbb{C}/L$.

2.1.5. Homomorphismes. Lorsqu'on identifie $\mathbb{C}/L$ avec E (resp. $\mathbb{C}/L'$ avec E') au moyen de l'isomorphisme précédent, les homomorphismes de E dans E' correspondent aux homomorphismes analytiques de $\mathbb{C}/L$ dans $\mathbb{C}/L'$. C'est ce que nous entendrons désormais par "homomorphisme de $\mathbb{C}/L$ dans $\mathbb{C}/L'$".

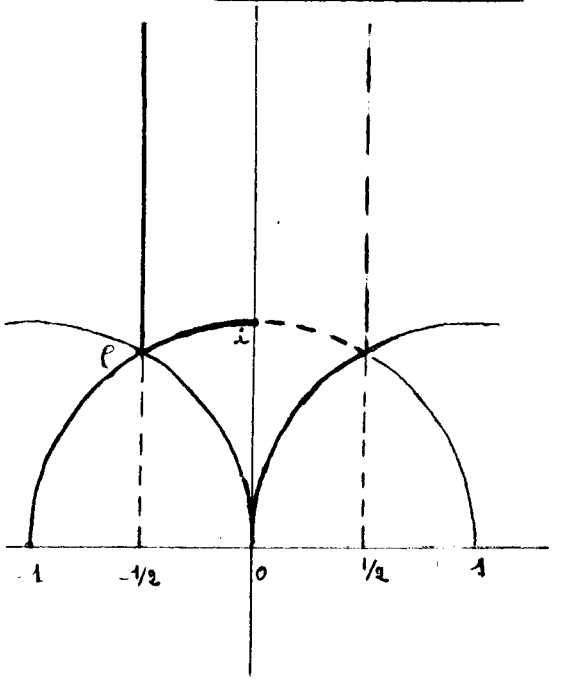
PROPOSITION. Tout homomorphisme ψ de $\mathbb{C}/L$ dans $\mathbb{C}/L'$ est induit par la multiplication, dans $\mathbb{C}$, par un nombre complexe α tel que $\alpha L \subset L'$; et ψ est un isomorphisme si et seulement si $\alpha L = L'$.

■ Au voisinage de 0, nous avons $\psi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, mais aussi $\psi(z+z') = \psi(z) + \psi(z')$, car la congruence modulo L' devient égalité. Ce n'est possible que si $a_n = 0$ pour $n \neq 1$ et $a_1 = \alpha \in \mathbb{C}$. Soit z un complexe quelconque; pour un entier n assez grand, z/n est assez proche de 0 pour que $\psi(z/n) = \alpha\frac{z}{n}$. Or $\psi(z/n) = \frac{1}{n}\psi(z) \pmod{L'}$ d'où $\psi(z) \equiv \alpha z \pmod{L'}$. Et bien sûr $\alpha L \subset L'$, avec égalité si et seulement si ψ est un isomorphisme. ■

Remarque : Réciproquement, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que $\alpha L \subset L'$, la multiplication par α induit un homomorphisme de $\mathbb{C}/L$ dans $\mathbb{C}/L'$.

2.1.6. Le groupe modulaire. Soit $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \{\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) / a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1\}$ et $\overline{\Gamma} = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$. Le groupe Γ agit sur $\mathcal{H}$ par $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, et cette expression ne dépend que de la classe de γ dans $\overline{\Gamma}$. Nous pouvons donc parler de l'action de $\overline{\Gamma}$ sur $\mathcal{H}$ et du quotient $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$. Le groupe $\overline{\Gamma}$ est appelé le groupe modulaire. Il est engendré

par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (cf. [38] ,7,1,2). On trouve dans ([38] ,7,1,2) , la détermination d'un <u>domaine fondamental</u> pour $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$. Plongeons $\mathbb{C}$ dans la sphère de Riemann, par adjonction d'un point à l'infini (noté ∞), (cf.[3]). L'ensemble $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H} \cup \{\infty\}$, noté $\widehat{\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}}$, a une structure de <u>surface de Riemann</u> compacte de genre 0 .



Le revêtement $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \{\infty\}$ de $\widehat{\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}}$ est non ramifié en dehors de ∞ , i , ρ . L'indice de ramification est égal à 2 en i , à 3 en ρ , et il est infini en ∞ . En effet, l'indice de ramification de la classe d'un point τ de $\widehat{\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}}$ est égal à l'ordre du stabilisateur de τ dans $\overline{\Gamma}$.

2.1.7. *PROPOSITION* . <u>L'application</u> : $\tau \longmapsto \mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z}$ <u>induit une bijection entre</u> $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$ <u>et l'ensemble des classes de</u> $\mathbb{C}$ <u>-isomorphisme des courbes elliptiques de la forme</u> $\mathbb{C}/L$.

■ Soit $L = \mathbb{Z}\omega_1\oplus\mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbb{C}$, et $\tau = \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}$; Alors $L = \omega_2(\mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z})$, et d'après la proposition (2,1,5), $\mathbb{C}/L$ et $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z}$ sont isomorphes. Il suffit donc de regarder les courbes de la forme $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z}$. La même proposition (2.1.5) montre que deux telles courbes (correspondant à τ et τ') sont $\mathbb{C}$-isomorphes si et seulement si il existe un complexe α tel que $\alpha(\mathbb{Z}\tau'\oplus\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z}$, c'est-à-dire tel que $\{\alpha\tau', \alpha\}$ et $\{\tau, 1\}$ forment deux bases du même réseau $\mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z}$. Or nous avons le lemme suivant :

2.1.8. *LEMME* . <u>Soient</u> $\{\omega_1, \omega_2\}$ <u>et</u> $\{\omega'_1, \omega'_2\}$ <u>deux couples de complexes tels que</u> $\tau = \omega_1/\omega_2$ <u>et</u> $\tau' = \omega'_1/\omega'_2$ <u>soient dans</u> $\mathcal{H}$. <u>Les deux réseaux</u> $\mathbb{Z}\omega_1\oplus\mathbb{Z}\omega_2$ <u>et</u> $\mathbb{Z}\omega'_1\oplus\mathbb{Z}\omega'_2$ <u>sont identiques si et seulement si</u> $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}$ <u>pour une matrice</u> γ <u>de</u> Γ .

▪ En effet, nous devons avoir $\binom{\omega_1}{\omega_2} = \gamma\binom{\omega'_1}{\omega'_2}$ pour une matrice γ de $GL_2(\mathbb{Z}) = \{\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)/a,b,c,d \in \mathbb{Z}\ ,\ ad-bc = \pm 1\}$. Et comme $\mathrm{Im}(\gamma\tau) = \dfrac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}.\det\gamma$, nous avons $\det\gamma = +1$. La réciproque est immédiate. ▪

Revenons à la démonstration de la proposition : $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau'\oplus\mathbb{Z}$ sont isomorphes si et seulement si $\binom{\alpha\tau'}{\alpha} = \gamma\binom{\tau}{1}$ pour une matrice γ de Γ , ce qui équivaut à $\tau' = \gamma(\tau)$. ▪

2.1.9. Invariant. Calculons l'invariant de $\mathbb{C}/L = E$. Pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, et tout entier $k \geq 2$, la série ci-dessous converge (cf. 2,1,1) :

$$G_{2k}(\tau) = \sum'_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}} = \omega_2^{2k} G_{2k}(L) .$$

Posons :

$$E_{2k}(\tau) = 1 + (-1)^k \frac{4k}{B_k} \sum_{n\geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n ,$$

où $q = e^{2\pi i\tau}$, $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, et où les B_k sont les nombres de Bernoulli, liés à la fonction zeta de Riemann par

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k} \quad (k \text{ entier} > 0) \quad (\text{cf.}[38],7,4,1) .$$

Par exemple, $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$,... .

Les calculs (cf. [38],7,4,2) montrent que :

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n\geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n = 2\zeta(2k) E_{2k}(\tau) .$$

Ceci prouve que la série $E_{2k}(\tau)$ est convergente sur $\mathcal{H}$, pour tout entier $k \geq 2$. Ainsi, on a :

$$c_4(L) = \frac{48}{4} g_4(L) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 E_4(\tau)$$

$$c_6(L) = \frac{864}{4} g_6(L) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 E_6(\tau)$$

$$\Delta(L) = \frac{c_4(L)^3 - c_6(L)^2}{12^3} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{12^3} .$$

Soit $\Delta(\tau) = \dfrac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{12^3} = \dfrac{(1+240\sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^n)^3 - (1-540\sum_{n\geq 1}\sigma_5(n)q^n)^2}{12^3}$.

Le numérateur est congru à $12^2(5\sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^n + 7\sum_{n\geq 1}\sigma_5(n)q^n)$ modulo 12^3 , et la parenthèse est nulle modulo 12 car $7 \equiv -5 \pmod{12}$ et $d^3 \equiv d^5 \pmod{12}$ pour tout entier d . Ainsi, dans le développement $\Delta(\tau) = \sum_{n\geq 1}\tau(n)q^n$, l'application τ est à valeurs entières, et $\tau(1) = 1$ (l'application τ est appelée <u>la fonction de Ramanujan</u>, et n'a bien sûr rien à voir avec la variable $\tau \in \mathcal{H}$) . Enfin, $j(\tau) = j(L) = \dfrac{c_4(L)^3}{\Delta(L)} = \dfrac{1}{q} + 744 + \sum_{n\geq 1} c(n)q^n$ où les coefficients $c(n)$ sont entiers.

2.2. <u>FORMES MODULAIRES</u>.

2.2.1. Soit G un sous-groupe d'indice fini de Γ, et soit $\overline{G} = G/G\cap\{\pm 1\}$; $\overline{G}$ agit sur $\mathcal{H}$. L'image, par un élément de $\overline{\Gamma}$, de ∞ est ∞ ou un point rationnel. L'action de $\overline{G}$ décompose $\overline{\Gamma}\cdot\infty$ en $\overline{G}$-orbites, dites <u>pointes</u> de $\widehat{\overline{G}\backslash\mathcal{H}}$; en particulier, ∞ est la pointe unique de $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$. La réunion de $\overline{G}\backslash\mathcal{H}$ et de ses pointes est notée $\widehat{\overline{G}\backslash\mathcal{H}}$; c'est une surface de Riemann compacte, formant un revêtement de $\widehat{\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}}$ de degré égal à l'indice $[\overline{\Gamma}:\overline{G}]$.

D'autre part, soient f une fonction définie sur $\mathcal{H}$, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ un élément de $GL_2^+(\mathbf{R}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid ad - bc > 0 \ , \ a,b,c,d \in \mathbf{R}\}$, et k un entier. Posons, par définition :

$$(f|_k\gamma)(\tau) = (ad-bc)^{k/2}(c\tau+d)^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

pour tout τ dans $\mathcal{H}$. Alors $(\gamma, f) \longmapsto f|_k\gamma$ définit une action de $GL_2^+(\mathbf{R})$ sur l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$. Cette action de $GL_2^+(\mathbf{R})$ a les propriétés suivantes :

$$f|_k 1 = f \ , \ f|_k\gamma\gamma' = (f|_k\gamma)|_k\gamma' \ , \ f|_k\lambda\gamma = f|_k\gamma$$

pour tous γ , $\gamma' \in GL_2^+(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

2.2.2. Nous pouvons maintenant définir une <u>forme modulaire de poids</u> k <u>pour</u> G : c'est une fonction f, holomorphe dans $\mathcal{H}$, telle que $f|_k\gamma = f$ pour tout γ de G, et holomorphe aux pointes de $\overline{G}\backslash\mathcal{H}$. Cette dernière condition a la signification suivante : soit n_o le plus petit entier tel que $n_oT = \begin{pmatrix}1 & n_o\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G$; or $(f|_k n_oT)(\tau) = f(\tau+n_o)$; donc f est (par abus de langage) fonction de q^{1/n_o}, holomorphe dans $\{q\in\mathbb{C} / 0 < |q| < 1\}$; f est dite holomorphe à la pointe ∞ si f se prolonge en une fonction holomorphe en $q = 0$; et f est dite holomorphe à la pointe $P = \gamma_o(\infty)$ (où $\gamma_o \in \Gamma$) si $f|_k\gamma_o$ est holomorphe à l'infini.

Lorsque, de plus, f s'annule aux pointes, f est dite <u>forme parabolique</u> de poids k pour G. Si on remplace l'hypothèse "f holomorphe" ou l'hypothèse plus faible "f méromorphe", f est dite <u>fonction modulaire</u>.

2.2.3. <u>Formes modulaires pour</u> Γ (cf. [38], 7, 3). Notons M_{2k} (resp. M^o_{2k}) le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires (resp. paraboliques) de poids $2k$ pour Γ. Par exemple, $E_{2k} \in M_{2k}$, $\Delta \in M^o_{12}$, $j \in M_o$.

PROPOSITION. <u>La dimension de</u> M_{2k} <u>est égale à</u> :

0 <u>si</u> $k < 0$

$[k/6]$ <u>si</u> $k \equiv 1 \pmod 6$ <u>et</u> $k \geq 0$

$[k/6]+1$ <u>si</u> $k \not\equiv 1 \pmod 6$ <u>et</u> $k \geq 0$.

<u>De plus</u>, <u>si</u> $\dim M_{2k} \neq 0$, <u>on a</u> : $\dim M^o_{2k} = \dim M_{2k}-1$.

■ Pour $k \geq 0$, on montre d'abord la proposition pour $k < 6$, en prouvant : $M_o = \mathbb{C}$, $M_2 = 0$, $M_{2k} = \mathbb{C}G_{2k}$ si $k = 3,4,5$, et $M^o_{2k} = 0$. Puis on montre que la multiplication par Δ définit un isomorphisme de M_{k-6} sur M^o_k. La démonstration se trouve dans ([38], 7, 3, 2) ; elle s'appuie sur le lemme suivant (2.2.4). ■ En particulier, $M^o_{12} = \mathbb{C}.\Delta$.

2.2.4. *LEMME*. <u>Soit</u> f <u>une fonction modulaire de poids</u> $2k$ <u>pour</u> Γ, <u>non identiquement nulle</u>. <u>Alors on a</u> :

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \sum_{P\in\Gamma\backslash\mathcal{H}}{}' v_P(f) = \frac{k}{6} \quad .$$

Dans cet énoncé, $v_P(f)$ est l'ordre de la fonction méromorphe f en P, et le signe $\sum'$ indique que l'on somme sur les points de $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$ distincts de i et ρ.

▪ Pour démontrer ce lemme, on peut intégrer la fonction $\frac{1}{2i\pi}\frac{df}{f}$ sur le bord d'un domaine fondamental pour Γ (cf. [38], 7,3,1), ou calculer le degré de la forme différentielle $f(\tau)(d\tau)^k$ et utiliser la formule de Riemann-Roch. ▪

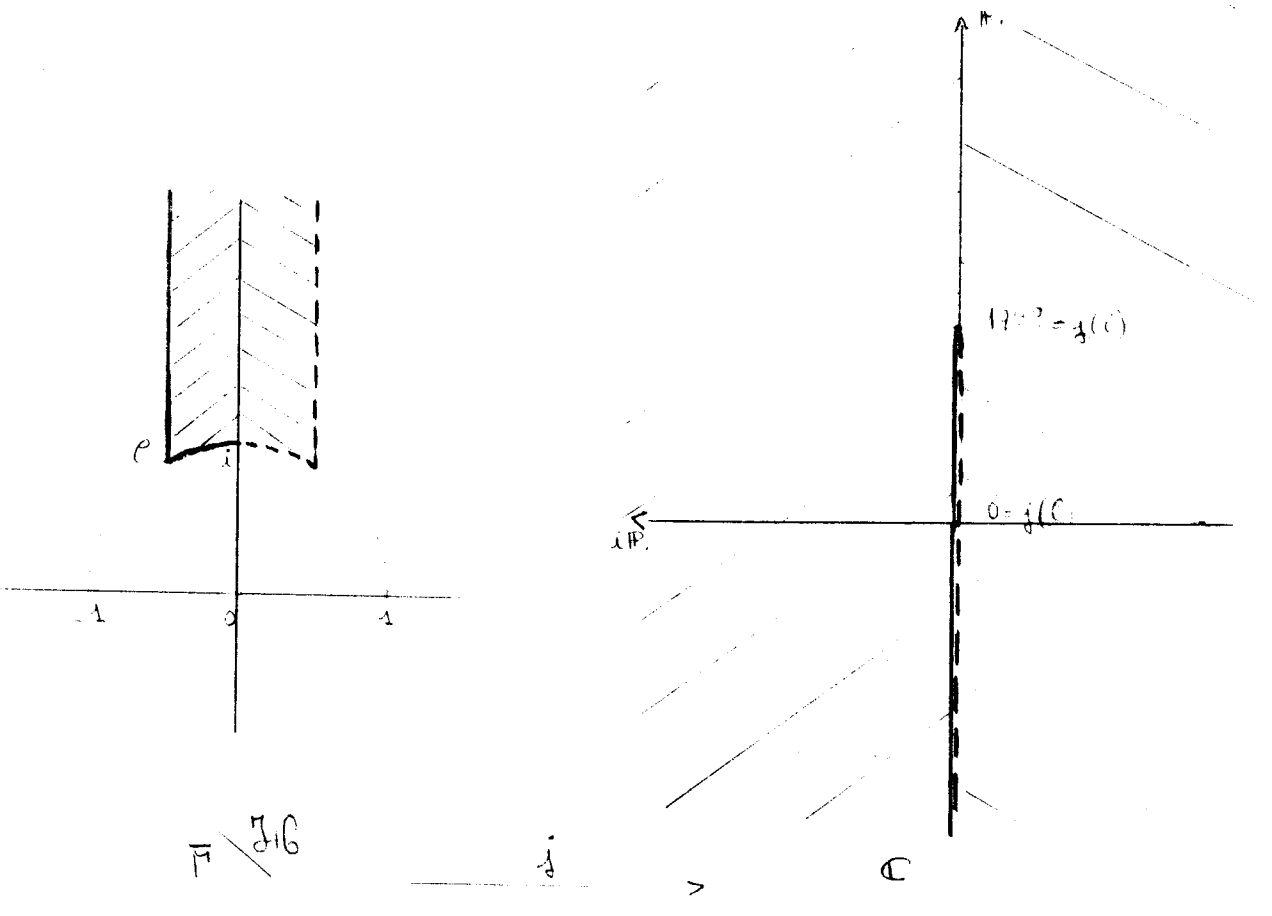
2.2.5. *THEOREME*. Toute courbe elliptique E sur $\mathbb{C}$ est de la forme $\mathbb{C}/L$ pour un réseau L de $\mathbb{C}$.

C'est la réciproque du théorème (2.1.1).

▪ Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{C}$, d'équation $y^2 = x^3 - \frac{c_4}{48}x - \frac{c_6}{864}$, de discriminant $\Delta = \frac{c_4^3 - c_6^2}{12^3}$ non nul et d'invariant $j = \frac{c_4^3}{\Delta}$ (cf. 1.1.3).

Nous allons montrer que j est l'invariant d'une courbe elliptique de la forme $\mathbb{C}/L$: en effet, la fonction $j(\tau) = \frac{c_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$ définie en (2.1.9) induit une bijection de $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$ sur $\mathbb{C}$; pour le voir, il suffit d'appliquer le lemme (2.2.4) à la forme modulaire $f_\lambda(\tau) = c_4(\tau)^3 - \lambda\Delta$ pour tout complexe λ ; f_λ est de poids 12 ; donc $k/6 = 1$, et on a une égalité de la forme $1 = n + n'/2 + n''/3$, avec n, n', $n'' \in \mathbb{N}$, ce qui n'est possible que pour $(n,n',n'') = (1,0,0)$ ou $(0,2,0)$ ou $(0,0,3)$, et prouve que f_λ s'annule en un point τ et un seul de $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$. (cf.[38], 7,3,3). Ainsi les courbes elliptiques E et $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z}$ ont même invariant et sont $\mathbb{C}$-isomorphes. En fait, E est l'image par l'isomorphisme du théorème (2.1.1) de $\mathbb{C}/L$ où $L = u(\mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z})$, u étant l'un des nombres complexes définis par : $g_4(\tau) = u^4.c_4/48$, $g_6(\tau) = u^6.c_6/864$. Dans le cas général, cela détermine u^2 ($\mathrm{Aut}(E) \simeq \mu_2$) ; si $c_4 = 0$ (i.e. $j = 0$, $\tau = \rho$ et $\mathrm{Aut}(E) \simeq \mu_6$) cela détermine u^6 ; et si $c_6 = 0$ (i.e. $j = 12^3$, $\tau = i$ et $\mathrm{Aut}(E) \simeq \mu_4$) cela détermine u^4. Dans tous les cas, L est bien déterminé. ▪

Remarque : L'application $\tau \longmapsto j(\tau)$ est une représentation conforme du domaine fondamental pour $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$ sur $\mathbb{C}$:



2.2.6. *COROLLAIRE* . L'ensemble des classes de $\mathbb{C}$-isomorphisme de courbes elliptiques sur E est en bijection avec $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$.

▪ C'est la proposition (2.1.7) associée au théorème (2.2.5) ▪

2.3. LA FORMULE $\Delta(q) = q \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^{24}$ (cf. [45], [18]).

2.3.1. La formule sommatoire de Poisson. Soit φ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbb{C}$, indéfiniment dérivable, qui tende "rapidement" vers 0 à l'infini ainsi que toutes ses dérivées, au sens suivant : pour tous n , $m \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto |x|^m \varphi^{(n)}(x)$ est bornée. Sa transformée de Fourier est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\hat{\varphi}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i x y} dx$; elle vérifie les mêmes propriétés que φ .

THEOREME . Si φ est une telle fonction, alors, pour tout réel t, nous avons : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(t+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n)e^{2\pi int}$, et en particulier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n)$.

■ Soit $\Phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(t+n)$; alors Φ est périodique de période 1, et $\Phi'(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi'(t+n)$ est continue ; donc Φ est égale à sa série de Fourier : $\Phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi int}$, où $a_n = \int_0^1 e^{-2\pi inu}\Phi(u)du = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-2\pi inu}\varphi(u+m)du = \hat{\varphi}(n)$. ■

2.3.2. Exemple : la fonction thêta. Posons $\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi in^2\tau}$, $(\tau \in \mathcal{H})$.

PROPOSITION . Nous avons $\theta^4|_2 S = -\theta^4$ et $\theta^4|_2 T^2 = \theta^4$ si $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rappelons que le groupe $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ est engendré par S et T (cf.2.1.6). Si $z \in \mathbb{C}^*$, choisissons son argument de sorte que $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq +\pi$, et posons $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{i/2\ \mathrm{Arg}(z)}$.

■ Nous allons montrer que $\theta(\tau)\sqrt{\tau/i} = \theta(-1/\tau)$ et $\theta(\tau+2) = \theta(\tau)$. La seconde égalité est évidente ; pour la première, appliquons la formule sommatoire de Poisson à $\varphi_\tau(t) = e^{\pi it^2\tau}$:

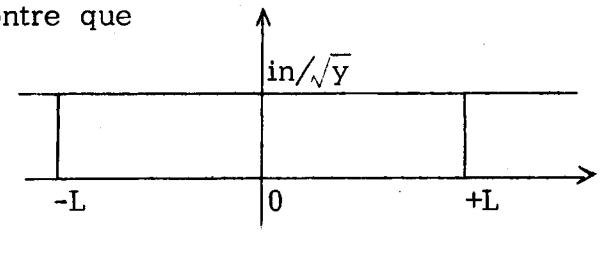
$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_\tau(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_\tau(n) \quad \text{où} \quad \hat{\varphi}_\tau(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi inu} e^{\pi iu^2\tau} du .$$

Lorsque τ est sur le demi-axe imaginaire positif ; c'est-à-dire $\tau = iy$, $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, cela donne :

$$\hat{\varphi}_{iy}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi inu - \pi u^2 y} du = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{-\infty + \frac{in}{\sqrt{y}}}^{+\infty + \frac{in}{\sqrt{y}}} e^{-(\pi n^2/y) - \pi v^2} dv$$

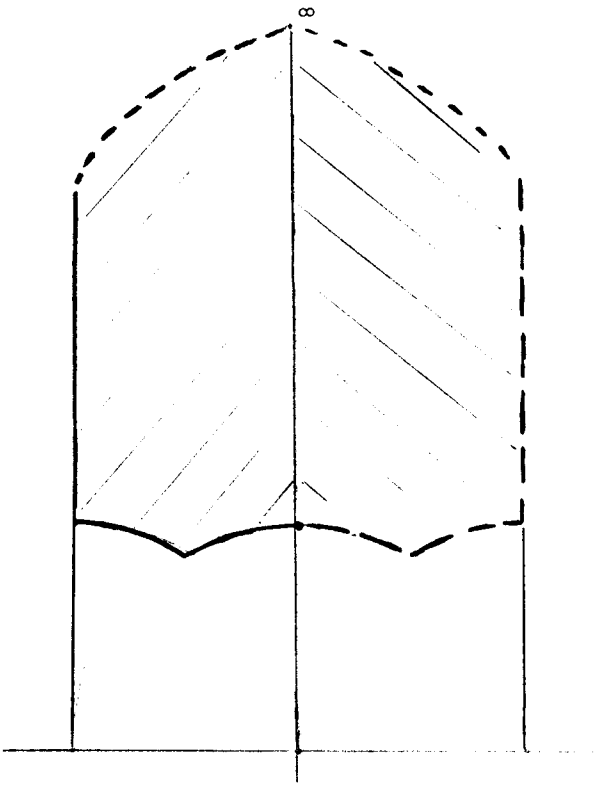
où $v = \sqrt{y}\,.u + \frac{in}{\sqrt{y}}$. Or le théorème de Cauchy, appliqué au rectangle ci-contre lorsque L tend vers l'infini, montre que

$$\int_{-\infty+\frac{in}{\sqrt{y}}}^{+\infty+\frac{in}{\sqrt{y}}} e^{-\pi v^2} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi v^2} dv = 1$$



d'où : $\hat{\varphi}_{iy}(n) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\pi n^2/y}$ et $\theta(iy)\sqrt{iy/i} = \theta(-1/iy)$; par prolongement

analytique, on obtient l'égalité cherchée. ∎



Cette proposition montre que θ^4 est "presque" une forme modulaire de poids 2 pour le sous-groupe $\Gamma_\theta = \langle S, T^2 \rangle$ de Γ. Γ_θ est d'indice 2 dans Γ ; voici ci-contre un domaine fondamental de Γ_θ dans $\mathcal{H}$, formé de la réunion de 2 domaines fondamentaux de Γ (cf. 2.1.6). On voit que $\overline{\Gamma_\theta}\backslash\mathcal{H}$ est une surface de Riemann compacte de genre 1 avec une seule pointe, à l'infini. L'indice de ramification de la pointe ∞ dans le revêtement $\overline{\Gamma_\theta}\backslash\mathcal{H} \longrightarrow \overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$ est égal à 2.

2.3.3. La fonction η de Dedekind. Posons $\eta(\tau) = e^{2\pi i\tau/24} \prod_{n\geq 1}(1-e^{2\pi i\tau})$ pour tout τ de $\mathcal{H}$. Pour tout réseau L de $\mathbb{C}$ et tout complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, posons $\Phi_L(s) = (\mathrm{vol}.L)^s \sum'_{\lambda\in L} \frac{1}{|\lambda|^{2s}}$. Si $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, avec $\omega_1/\omega_2 = \tau = x + iy \in \mathcal{H}$, posons $L_1 = \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$; le volume de L, c'est-à-dire l'aire du parallélogramme de sommets O, ω_1, ω_2, $\omega_1+\omega_2$ dans le plan complexe, est égal à $|\omega_2|^2 \times \mathrm{vol}.L_1 = |\omega_2|^2.y$, donc $\Phi_L(s) = \Phi_{L_1}(s) = \sum'_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{y^s}{|n\tau+m|^{2s}}$ (en fait, pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, la fonction $L \longmapsto \Phi_L(s)$ est une fonction de réseau de poids 0, c'est-à-dire une fonction telle que $\Phi_{\gamma L}(s) = \Phi_L(s)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, (cf. [38] 7,2). Etudions le comportement de $\Phi_L(s)$ lorsque s tend vers 1.

PROPOSITION. Première formule limite de Kronecker : soit γ la constante d'Euler ; alors $\Phi_L(s) = \frac{\pi}{s-1} + 2\pi[\gamma - \log 2 - \log(\sqrt{y}\,|\eta(\tau)|^2)] + O(s-1)$.

■ En effet,

$$\Phi_L(s) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{y^s}{|n\tau+m|^{2s}} = 2y^s \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m^{2s}} + 2y^s \sum_{n\geq 1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{((nx+m)^2+n^2y^2)^s} \quad ;$$

Or $\zeta(2s) = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m^{2s}}$, et la formule sommatoire de Poisson, appliquée à $\varphi(t) = \frac{1}{(t^2+n^2y^2)^s}$ donne : $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi(nx+m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi imnx}\hat{\varphi}(m)$, où

$$\hat{\varphi}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi imu}}{(u^2+n^2y^2)^s}\,du = (ny)^{1-2s} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi imnyv}}{(v^2+1)^s}\,dv \quad \text{(pour } v = u/ny) \ .$$

Remarquons que $\hat{\varphi}(-m) = \hat{\varphi}(m)$, et posons $\Phi_L = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ où

$$\Phi_1(s) = 2y^s\zeta(2s)$$

$$\Phi_2(s) = 2y^{1-s}\zeta(2s-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(v^2+1)^s}$$

$$\Phi_3(s) = 2y^s \sum_{n\geq 1} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} \frac{e^{2\pi imnx}}{(ny)^{2s-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i|m|nyv}}{(v^2+1)^s}\,dv \ .$$

Etudions chacune de ces 3 fonctions lorsque s tend vers 1 :

a) Φ_1 est continue en $s = 1$, et $\Phi_1(1) = 2y\zeta(2) = -2\pi(\frac{2\pi i\tau}{24} + \frac{2\pi i\bar{\tau}}{24})$.

b) $\zeta(2s-1) = \frac{1}{2(s-1)} + \gamma + O(s-1)$,

$$y^{1-s} = 1 - (s-1)\log y + O((s-1)^2) \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^s} = (\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1})(1-(s-1)\log 4 + O((s-1)^2) \ .$$

De ces 3 développements limités, le 1er est connu, le 2e est évident et le 3e expliqué ci-dessous :

Soit $f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^s}$; nous voulons calculer $f'(1) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(u^2+1)}{(u^2+1)}du$.

Utilisons la méthode de Lang [18] . Soit $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(u^2x^2+1)}{u^2+1}\,du$: alors

$g(0) = 0$, $g(1) = -\frac{1}{2}f'(1)$, et $g'(x) = \frac{\pi}{1+x}$. D'où :

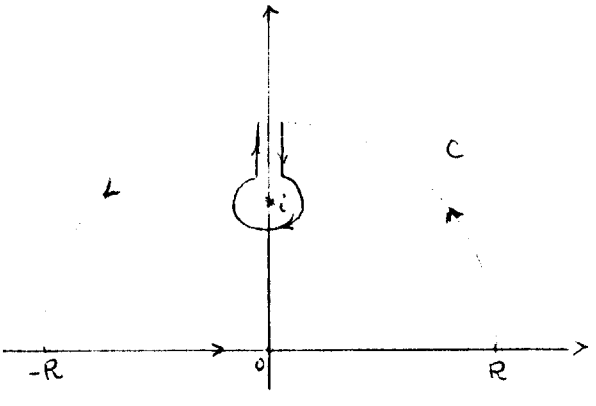
$$f'(1) = -2\int_0^1 \frac{\pi}{1+x}\,dx = -\pi\log 4 \ .$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \pi$.

Ainsi, en multipliant les développements ,

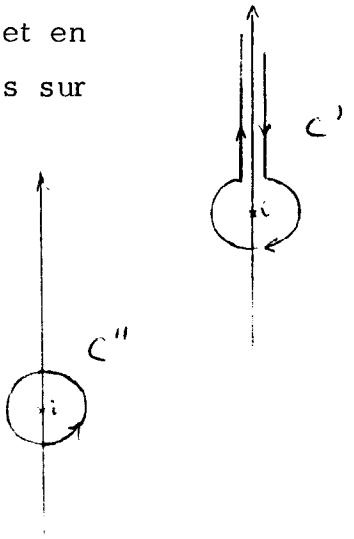
$$\Phi_2(s) = \frac{\pi}{s-1} + \pi(2\gamma - \log 4y) + O(s-1) .$$

c) Calculons d'abord $I_a(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi iau}}{(u^2+1)^s} du$ $(a>0)$ par la méthode des résidus, appliquée au contour C ci-contre, qui est contenu dans un domaine de $\mathbb{C}$ où l'on peut définir $(u^2+1)^s = e^{s \log(u^2+1)}$. Nous obtenons $\oint_C \frac{e^{2\pi iau}}{(u^2+1)^s} du = 0$. Si s est dans un compact du demi-plan $Re(s) > 0$, l'intégrale de $\frac{e^{2\pi iau}}{(u^2+1)^s}$ sur les 2 quarts de cercle de rayon R tend uniformément vers 0 lorsque R tend vers l'infini, et l'intégrale sur le contour C' est uniformément bornée, donc $I_a(s)$ est holomorphe sur tout compact de $\{Re(s)>0\}$ et en particulier, $I_a(1) = \lim_{s\to 1} I_a(s)$. Mais alors les intégrales sur les parties verticales de C' s'annulent, et il reste :



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi iau}}{u^2+1} du = \oint_{C''} \frac{e^{2\pi iau}}{u^2+1} du = \pi \cdot e^{-2\pi a}$$

puisque le résidu en i vaut $e^{-2\pi a}/2i$. D'où



$$\Phi_3(1) = \lim_{s\to 1} \Phi_3(s)$$

$$= 2\pi \sum_{n\geq 1} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 0}} \frac{1}{n} e^{2\pi imnx - 2\pi|m|ny}$$

$$= 2\pi \sum_{m\geq 1} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} (e^{2\pi imn\tau} + e^{-2\pi imn\overline{\tau}}) = -2\pi \log\Big(\prod_{m\geq 1} (1-e^{2\pi im\tau})\overline{(1-e^{2\pi im\tau})}\Big) .$$

d) Regroupons ces résultats : $\Phi_1(1) + \Phi_3(1) = -2\pi \log|\eta(\tau)|^2$, d'où

$$\Phi_L(s) = \frac{\pi}{s-1} + 2\pi(\gamma - \log 2 - \log(\sqrt{y}|\eta(\tau)|^2)) + O(s-1) .$$

2.3.4. *COROLLAIRE 1* . $\eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i}\,\eta(\tau)$ pour tout τ dans $\mathcal{H}$.

■ Soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$; L un réseau de base $\{\omega_1,\omega_2\}$; γL le réseau de base $\{a\omega_1+b\omega_2\ ,\ c\omega_1+d\omega_2\}$; $\tau = \omega_1/\omega_2$ et $\gamma(\tau) = \dfrac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2} = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Alors $\operatorname{Im}\gamma(\tau) = \dfrac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$, et la propriété : $\Phi_L(s) = \Phi_{\gamma L}(s)$ se traduit, grâce à la proposition (2.3.3), par : $\sqrt{\operatorname{Im}\tau}\,|\eta(\tau)|^2 = \sqrt{\operatorname{Im}\gamma(\tau)}\,|\eta(\gamma(\tau))|^2$, c'est-à-dire $\left|\dfrac{\eta(\gamma\tau)}{\sqrt{|c\tau+d|}\,\eta(\tau)}\right| = 1$.

La fonction $\tau \longmapsto \eta(\gamma\tau)/\sqrt{c\tau+d}\,\eta(\tau)$ est analytique dans $\mathcal{H}$, de module 1 . Elle est donc constante ; soit $\varepsilon(\gamma)$ sa valeur. Notons que $\varepsilon(-\gamma) = \varepsilon(\gamma)$ et que ε est multiplicatif, c'est-à-dire $\varepsilon(\gamma\gamma') = \varepsilon(\gamma)\varepsilon(\gamma')$. Calculons $\varepsilon(T)$ et $\varepsilon(S)$: $\eta(\tau+1) = e^{2\pi i/24}\eta(\tau)$, donc $\varepsilon(T) = e^{2\pi i/24} \in \mu_{24}$; on doit avoir $\eta(-1/i) = \varepsilon(S)\sqrt{i}\,\eta(i)$, mais $-1/i = i$, et $\eta(i)$ est non nul, donc $\varepsilon(S) = 1/\sqrt{i}$. Cela prouve que $\eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i}\,\eta(\tau)$, et d'autre part, puisque S et T engendrent $PSL_2(\mathbb{Z})$, que $\varepsilon(\gamma) \in \mu_{24}$ pour tout γ de $SL_2(\mathbb{Z})$.

2.3.5. *COROLLAIRE 2* . $\Delta(q) = q \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^{24}$.

■ La fonction η^{24} est une forme modulaire de poids 12 pour Γ , d'après ce qui précède. Comme elle est nulle à l'infini, elle doit être proportionnelle à Δ d'après (2.2.3) . Le coefficient de q étant le même, on a $\Delta = \eta^{24}$. ■

2.3.6. Par analogie avec la définition des séries $E_{2k}(\tau)$ et $G_{2k}(\tau)$ (pour $k \geq 2$) (cf. 2.1.9), on appelle $E_2(\tau)$ et $G_2(\tau)$ les séries divergentes ci-dessous :

$$\begin{cases} E_2(\tau) = 1 + (-1)^k\, 24 \sum_{n\geq 1} \sigma_1(n) q^n \ ; \\ G_2(\tau) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \dfrac{1}{(m\tau+n)^2} \ . \end{cases}$$

On a alors les résultats suivants :

COROLLAIRE 3 . $E_2(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) \cdot (c\tau+d)^{-2} = E_2(\tau) + \frac{12}{2\pi i} \frac{c}{c\tau+d}$ si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

■ Nous avons : $\frac{24}{2\pi i} \frac{d(\log \eta(\tau))}{d\tau} = 1 - 24 \sum_{n\geq 1} \frac{nq^n}{1-q^n} = 1 - 24 \sum_{n\geq 1} \sigma_1(n) q^n = E_2(\tau)$

et de même $E_2(\gamma\tau) = \frac{24}{2\pi i} \cdot \frac{d(\log \eta(\gamma\tau))}{d\tau} \cdot (c\tau+d)^2$. Mais nous venons de voir que $\eta(\gamma\tau) = \varepsilon(\gamma)\sqrt{c\tau+d} \cdot \eta(\tau)$, d'où

$$\frac{d(\log \eta(\gamma\tau))}{d\tau} = \frac{c}{2(c\tau+d)} + \frac{d(\log \eta(\tau))}{d\tau} \quad . \blacksquare$$

Ainsi, E_2 "ressemble" à une forme modulaire de poids 2 , et en particulier : $E_2(-1/\tau) \cdot \tau^{-2} = E_2(\tau) + 12/2\pi i\tau$.

COROLLAIRE 4 . $1/3(4E_2(2\tau) - E_2(\tau/2))$ est une série convergente, de somme $\theta^4(\tau)$.

■ Soient $H = \theta^4$, $G(\tau) = 1/3(4E_2(2\tau) - E_2(\tau/2))$, et $f = H - G$.

Montrons que la série $G(\tau)$ est convergente sur $\mathcal{H}$: par définition, $E_2(\tau)$ est proportionnel à $\sum'_{\lambda \in \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}} 1/\lambda^2 = \sum'_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} 1/(n\tau+m)^2$ (cf. 2.1.9) ; donc $G(\tau)$ est proportionnel à

$$\frac{1}{(\tau/2)^2} + \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{(3\tau/2)^2} + \sum'_{(n,m')\in\mathbb{Z}^2} a_{n,m} \frac{1}{(4n\tau/2+m)^2} \quad ,$$

où

$$a_{n,m} = 3 - \frac{1}{(1+\frac{\tau/2}{4n\tau/2+m})^2} - \frac{1}{(1+\frac{2\tau/2}{4n\tau/2+m})^2} - \frac{1}{(1+\frac{3\tau/2}{4n\tau/2+m})^2} \quad ;$$

ainsi, $|a_{n,m}|$ est équivalent à $\frac{12}{|4n\tau/2+m|}$ lorsque $|4n\tau/2+m|$ tend vers l'infini. Or, nous savons que la série $\sum'_{\lambda\in\mathbb{Z}2\tau\oplus\mathbb{Z}} 1/|\lambda|^\alpha$ converge pour tout réel $\alpha > 2$ (cf.[18] ,1,2) ; donc $\sum'_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} 1/|2n\tau+m|^3$ converge ,et $G(\tau)$ est convergente sur $\mathcal{H}$.

La fonction f s'annule à l'infini, car les développements :

$$H(q) = (\sum q^{n^2/2})^4 \qquad (2.3.2)$$

et

$$G(q) = \frac{1}{3}(4-1-4.24 \sum_{n\geq 1} \sigma_1(n)q^{2n} + 24 \sum_{n\geq 1} \sigma_1(n)q^{n/2} \quad (2.1.6)$$

commencent tous les deux par 1 ; $f|_2 S = -f$ et $f|_2 T^2 = f$ car on a vu les formules analogues pour H (2.3.2) et pour G (appliquer le corollaire 3 ci-dessus en remplaçant τ par $\tau/2$ puis par 2τ) . Donc f^2 est une forme parabolique de poids 4 sur $\widehat{\Gamma_\theta \backslash \mathcal{H}}$ (où Γ_θ est le sous-groupe de Γ engendré par S et T^2 , cf. 2.3.2) avec un zéro d'ordre au moins égal à 2 à l'infini, et f^6/Δ est une fonction sur $\widehat{\Gamma_\theta \backslash \mathcal{H}}$. Si elle n'est pas nulle, le degré de son diviseur des zéros doit être égal au degré de son diviseur des pôles ; f et Δ étant holomorphes, cela signifie : $3 \times \deg(f^2) = \deg(\Delta)$. Considéré comme forme modulaire sur $\widehat{\Gamma \backslash \mathcal{H}}$, Δ a un seul zéro, à l'infini, et c'est un zéro simple. Comme l'infini est ramifié dans le revêtement $\widehat{\Gamma_\theta \backslash \mathcal{H}} \to \widehat{\Gamma \backslash \mathcal{H}}$, l'infini est le seul zéro de Δ dans $\widehat{\Gamma_\theta \backslash \mathcal{H}}$, et c'est un zéro double (cf. 2.3.2). Ainsi, le degré du diviseur de Δ dans $\widehat{\Gamma_\theta \backslash \mathcal{H}}$ est égal à 2 .

En particulier, il n'est pas divisible par 3 ; donc f est identiquement nulle. ■

APPLICATION : Le nombre de manières d'écrire un entier positif n comme somme de au plus 4 carrés d'entiers de signe quelconque est égal à $8 \sum_{\substack{d|n \\ 4\nmid d}} d$.

■ Par définition, $\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2/2}$ si $q = e^{2\pi 2\tau}$ (2.3.2)

donc $\theta^4(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_n q^{n/2}$ si a_n est le nombre de manières d'écrire n comme somme de 4 carrés d'éléments de $\mathbb{Z}$. Or

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n\geq 1} \sigma_1(n)q^n$$

donc

$$G(\tau) = 1 - 8 \sum_{n\geq 1} (4\sigma_1(n/4) - \sigma_1(n))q^{n/2} ,$$

en posant $\sigma_1(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{N}$. D'après le corollaire 4 , nous avons $G = \theta^4$ donc $a_n = 8\ (\sigma_1(n) - 4\sigma_1(n/4))$. Or $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$; et d'

divise $n/4$ si et seulement si d' est de la forme $d/4$ où d divise n et 4 divise d, donc $\sigma_1(n/4) = 1/4 \sum_{\substack{d|n \\ 4|d}} d$; et enfin

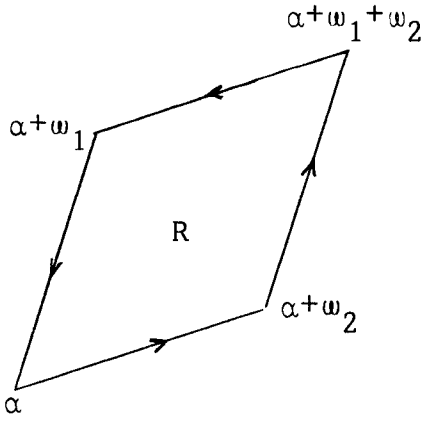
$$\sigma_1(n) - 4\sigma_1(n/4) = \sum_{\substack{d|n \\ 4\nmid d}} d \quad . \blacksquare$$

2.4. THEOREME D'ABEL JACOBI (cf.[18] par exemple).

2.4.1. Condition d'Abel.

THEOREME . Soit L un réseau de $\mathbb{C}$, et $D = \sum_{P\in\mathbb{C}/L} n_P.(P)$ un diviseur donné sur $\mathbb{C}/L$. Il existe une fonction L-elliptique de diviseur D si et seulement si $\deg(D) = 0$ et $\sum n_P P \in L$, et alors cette fonction est unique à une constante multiplicative non nulle près.

■ La condition est nécessaire : appliquons le théorème des résidus aux fonctions méromorphes $\frac{f'(z)}{f(z)}$ et $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ sur le bord ∂R d'un domaine fondamental R pour L (cf. 2.1.2) choisi de sorte que ∂R ne passe par aucun point singulier de ces deux fonctions. Puisque le diviseur de f est $D = \sum_{P\in\mathbb{C}/L} n_P.(P)$, les points singuliers de f sont les représentants de ces points P contenus dans R , avec l'ordre n_P . D'où :



$$\int_{\partial R} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i \sum_P n_P$$

et

$$\int_{\partial R} z\frac{f'(z)}{f(z)} = 2\pi i \sum_P n_P.P \ .$$

D'autre part, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est L-elliptique, donc $\int_{\partial R} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ (c'est le lemme 2.1.2) , et

$$\int_{\partial R} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -\omega_2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt + \omega_1 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_2} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$$

$$= 2\pi i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) \qquad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \ .$$

Réciproquement, pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, définissons une fonction thêta méromorphe sur $\mathbb{C}$ par :

$$\theta(u) = \Theta(z) = \prod_{n\geq 0} (1-q^n z) \prod_{n\geq 1} (1-q^n z^{-1}) ,$$

où $q = e^{2\pi i\tau}$, $z = e^{2\pi iu}$. Le produit infini est convergent car $|q| < 1$ lorsque $\tau \in \mathcal{H}$. Cette fonction vérifie les propriétés suivantes, dont la vérification est immédiate : $\theta(u+1) = \theta(u)$ et $\theta(u+\tau) = -e^{-2\pi iu}\theta(u)$, c'est-à-dire $\Theta(e^{2\pi i}z) = \Theta(z)$ et $\Theta(qz) = -z^{-1}\Theta(z)$; θ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, ses zéros sont simples et leur ensemble est le réseau $L = \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$. Soient R un parallélogramme fondamental pour L, et $D = \sum_{P\in R} n_P(P)$ un diviseur sur $\mathbb{C}/L$. Posons $\theta_D(u) = \prod_{P\in R} (\theta(u-P))^{n_P}$ c'est-à-dire $\Theta_D(z) = \prod_{P\in R} (\Theta(z/a_P))^n$ où $a_P = e^{2\pi iP}$. La fonction θ_D vérifie les propriétés suivantes : elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$, $\theta_D(u+1) = \theta_D(u)$ et $\theta_D(u+\tau) = (-z^{-1})^{\deg(D)} . e^{2\pi i(\sum_{P\in R} n_P . P)} \theta_D(u)$, comme on le vérifie aisément. Si, de plus, $\deg(D) = 0$ et $\sum_{P\in R} n_P . P = s\tau + r$ $(r,s \in \mathbb{Z})$, nous obtenons : $\theta_D(u+\tau) = q^s \theta_D(u)$. Ainsi, la fonction : $\mu \longmapsto e^{-2\pi isu}\theta_D(u)$ est L-elliptique de diviseur D.

Enfin, deux fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ de même diviseur sont proportionnelles, d'après le théorème de Liouville appliqué à leur quotient. ∎

2.4.2. *COROLLAIRE*. Soit $\mathcal{D}(E)$ (resp. $\mathcal{D}_0(E)$, resp. $\mathcal{D}_\ell(E)$) le groupe des diviseurs (resp. des diviseurs de degré 0, resp. des diviseurs de fonctions) sur $E = \mathbb{C}/L$. L'application qui fait correspondre au diviseur $\sum_{P\in\mathbb{C}/L} n_P(P) \in \mathcal{D}(E)$ le point $\sum n_P P \in E$ induit un isomorphisme de groupes de $\mathcal{D}_0(E)/\mathcal{D}_\ell(E)$ sur E.

∎ Le théorème montre que $\mathcal{D}_\ell(E)$ est un sous-groupe $\mathcal{D}_0(E)$ et est le noyau de l'application de $\mathcal{D}(E)$ dans E définie ci-dessus ; d'autre part, cette application est un homomorphisme de groupes ; et enfin, tout point P de $\mathbb{C}$ est l'image du diviseur $(P) - (0) \in \mathcal{D}_0(E)$. ∎

2.5. EQUATION DE TATE.

2.5.1. Le calcul des coefficients de Fourier des fonctions L-elliptiques $\wp$ et $\wp'$ donne le résultat suivant (cf [18], 4,2 et 15,1) où $q = e^{2\pi i\tau}$, $z = e^{2\pi iu/\omega_2}$:

$$\wp(u;L) = \left(\frac{2\pi i}{\omega_2}\right)^2 \left(\frac{1}{12} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^n z}{(1-q^n z)^2} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{nq^n}{1-q^n}\right)$$

$$\wp'(u;L) = \left(\frac{2\pi i}{\omega_2}\right)^3 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^n z(1+q^n z)}{(1-q^n z)^3} \quad .$$

Posons $X(u) = (\omega_2/2\pi i)^2\wp(u;L) - 1/12$ et $Y(u) = 1/2[\,(\omega_2/2\pi i)^3\wp'(u;L) + X(u)\,]$ c'est-à-dire :

$$X(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^n z}{(1-q^n z)^2} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{nq^n}{1-q^n} \quad ,$$

et

$$Y(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^n z}{(1-q^n z)^3} - \sum_{n\geq 1} \frac{nq^n}{1-q^n}$$

(la formule (1γ) de [18], 15,1 contient une erreur).

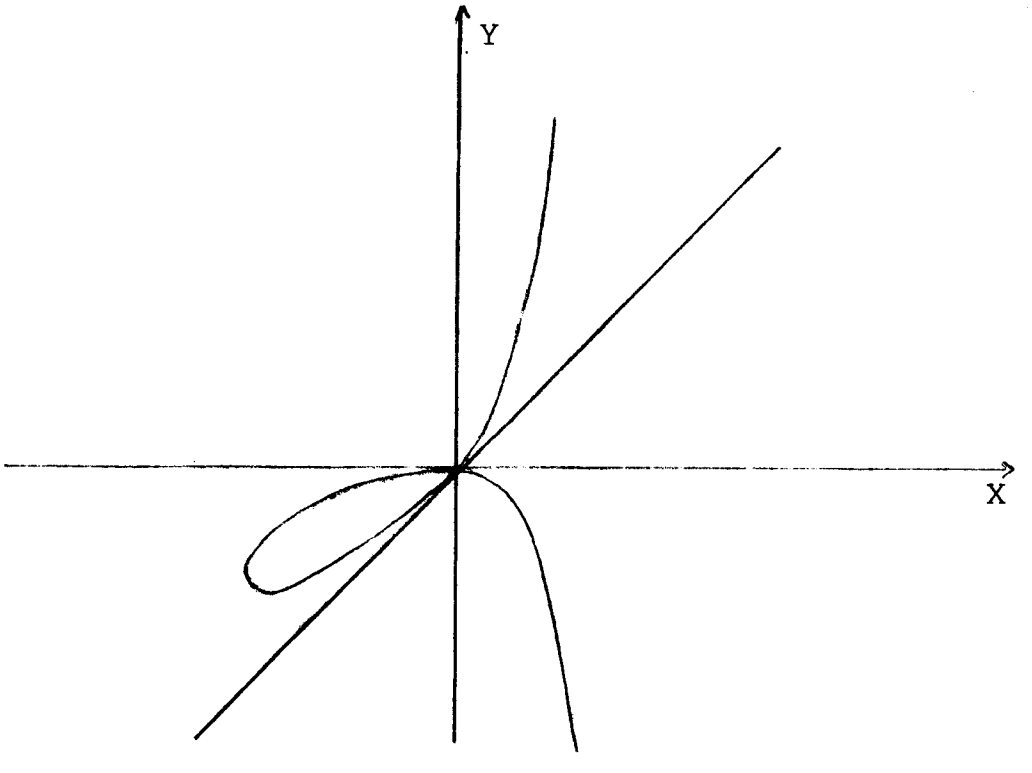
Alors l'équation de Weierstrass qui liait $\wp$ et $\wp'$ se transforme en <u>l'équation de Tate</u> : $Y^2 - XY = X^3 - h_2X - h_3$, où $h_2 = 5\sum_{n\geq 1} n^3 \frac{q^n}{1-q^n}$ et $h_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{5n^3+7n^5}{12} \frac{q^n}{1-q^n}$.

Les coefficients $5n^3$ et $\frac{5n^3+7n^5}{12}$ sont entiers (cf. 2.1.9) et $|q| < 1$, donc les séries définissant h_2 et h_3 convergent. De plus, les coefficients sont définis en toute caractéristique, et nous utiliserons au paragraphe 3 cette équation pour définir les <u>courbes de Tate</u> sur des corps locaux.

2.5.2. Soient $\tau \in \mathcal{H}$, $L = 2\pi i(\tau\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$, et $q = e^{2\pi i\tau}$. Alors l'application $u \longmapsto q^u$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ induit un isomorphisme de $\mathbb{C}/L$ sur $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$, dans lequel les fonctions L-elliptiques sont transformée en les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*/q\mathbb{Z}$, i.e. méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ de <u>période multiplicative</u> q : $f(qz) = f(z)$ pour tout z dans $\mathbb{C}^*$.

En résumé, le groupe $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ peut être muni d'une structure de courbe elliptique E sur $\mathbb{C}$, de corps de fonctions $\mathbb{C}(E)$ égal au corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Et toute courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-isomorphe à une courbe de cette forme (pour $q = e^{2\pi i \omega_1/\omega_2}$).

2.5.3. Nous avons vu (cf.1.2.1) que l'invariant j définit une bijection entre les classes de $\mathbb{C}$-isomorphisme de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ et l'espace affine $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$. Nous pouvons plonger $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et étudier ce qui se passe lorsque j tend vers l'infini grâce à ce qui précède : dans chaque classe de $\mathbb{C}$-isomorphisme, choisissons pour représentant une courbe $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$, d'équation $Y^2 - XY = X^3 - h_2X - h_3$. Lorsque q tend vers 0, h_2 et h_3 tendent vers 0, et l'équation devient : $Y^2 - XY = X^3$. C'est l'équation d'une cubique dégénérée à l'origine, avec deux tangentes distinctes, de pentes 0 et 1.



3. *COURBES ELLIPTIQUES SUR UN CORPS LOCAL* (cf.[32])

3.1. DEFINITIONS.

3.1.1. Fonctions holomorphes et méromorphes. Soit K un corps muni d'une valuation discrète v ; la valeur absolue définie par $|x| = e^{-v(x)}$ est une valeur absolue non archimédienne sur K . Si K est complet pour cette valeurs absolue, nous appellerons K un corps local. La valeur absolue de K se prolonge de manière unique à $\overline{K}$, mais en général $\overline{K}$ n'est pas complet.

Par analogie avec le cas complexe, posons les définitions suivantes :

Une fonction K-holomorphe sur $\overline{K}^*$ est une fonction f de $\overline{K}^*$ dans $\overline{K}$ définie par $f(z) = \sum_{n>>-\infty} a_n z^n$, où la série de Laurent $\sum_{n>>-\infty} a_n X^n$ est à coefficients dans K et converge en tout point z de $\overline{K}^*$. L'ensemble des fonctions K-holomorphes sur $\overline{K}^*$ forme un anneau intègre. Les éléments du corps des fractions sont les fonctions K-méromorphes sur $\overline{K}^*$. Nous appellerons désormais ces fonctions des fonctions holomorphes ou méromorphes (sans référence à K).

3.1.2. Diviseurs. Nous appelons diviseur (défini sur K) tout ensemble d'entiers de la forme $\{n_a , a \in \overline{K}^*\}$, vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) Si r et r' sont deux réels tels que $0 < r < r'$, le nombre d'éléments a de $\overline{K}^*$, tels que $r \leq |a| \leq r'$ et $n_a \neq 0$, est fini ;

(ii) Si a et b sont conjugués sur K , alors $n_a = n_b$.

D'autre part, si f est une fonction holomorphe, non nulle, et si a est un élément de $\overline{K}^*$ de polynôme minimal $\varphi_a(X)$ sur K , nous avons le lemme suivant :

LEMME . La fonction f s'écrit de manière unique sous la forme : $f(X) = \varphi_a(X)^m g(X)$, où $m \in \mathbb{Z}$ et où g est une fonction holomorphe, non nulle en a .

■ La démonstration de ce lemme repose sur le lemme de Hensel. ■

L'entier m est appelé l'ordre de f en a et noté $w_a(f)$. L'application w_a ainsi définie se prolonge de façon unique en une valuation sur le corps des fonctions méromorphes.

L'ensemble $\{w_a(f)\ ,\ a \in \overline{K}^*\}$, pour toute fonction méromorphe f non nulle, est un diviseur. Nous l'appelons le <u>diviseur</u> de f et le notons (f) .

3.1.3. <u>Fonctions de même diviseur</u>.

LEMME . <u>Deux fonctions méromorphes</u> f <u>et</u> g <u>ont même diviseur si et seulement si il existe un entier</u> d <u>et un élément</u> α <u>de</u> K^* <u>tels que</u> $g(X) = \alpha X^d f(X)$.

■ Dire que f et g ont le même diviseur équivaut à dire que leur quotient n'a ni zéro ni pôle dans $\overline{K}^*$. Or les fonctions méromorphes vérifiant cette condition sont les fonction définies par une série de la forme αX^d , car la valeur absolue de K est non-archimédienne (c'est faux sur $\mathbb{C}$: par exemple la fonction définie par $e^{\alpha X^2+\beta X+\gamma}$ a un diviseur nul) : cette propriété est démontrée dans [13] . ■

3.1.4. <u>Diviseurs q-périodiques</u>. Soit $q \in K$, $0 < |q| < 1$; un diviseur $\{n_a, a \in \overline{K}^*\}$ est dit q-<u>périodique</u> si $n_a = n_b$ dès que a et b sont congrus modulo $q^{\mathbb{Z}}$.

Soit f une fonction méromorphe ; supposons que le diviseur D de f est q-périodique. Alors la fonction $f(q^{-1}X)$ a le même diviseur, et d'après le lemme (3.1.3), il existe un entier d et un élément α de K^* tels que $f(q^{-1}X) = \alpha^{-1}(-X)^d f(X)$. En fait, l'entier d et la classe de α modulo $q^{\mathbb{Z}}$ ne dépendent que du diviseur D de f ; on appelle d le <u>degré</u> de D , on le note $\deg(D)$; on note $\Phi(D)$ la classe de α dans $K^*/q^{\mathbb{Z}}$ et on l'appelle l'<u>image de Jacobi</u> de D .

3.1.5. Fonctions q-périodiques. Une fonction méromorphe f telle que $f(q^{-1}X) = f(X)$ est dite q-périodique. Son diviseur (f) est alors q-périodique.

PROPOSITION . Si un diviseur q-périodique D est un diviseur de fonction, alors c'est le diviseur d'une fonction q-périodique si et seulement si $\deg(D) = 0$ et $\Phi(D) = 1$. Cette fonction est unique à un facteur dans K^* près.

■ Par hypothèse, $D = (f)$, et $f(q^{-1}X) = \alpha^{-1}(-X)^d f(X)$ d'après (3.1.4). Si f est q-périodique, $\alpha = 1$ et $d = 0$, d'où : $\deg(D) = 0$ et $\Phi(D) = 1$. Réciproquement si $\deg(D) = 0$ et $\Phi(D) = 1$, cela signifie : $d = 0$ et $\alpha = q^s$ pour un entier s . Mais alors la fonction g définie par $g(X) = X^s f(X)$ est q-périodique de diviseur D .

Enfin, si f et g sont 2 fonctions q-périodiques de diviseur D , d'après le lemme (3.1.3) on a $g(X) = \alpha' X^{d'} f(X)$, et la q-périodicité impose $d' = 0$. ■

3.2. THEOREME D'ABEL-JACOBI.

3.2.1. *THEOREME* . Un diviseur q-périodique est le diviseur d'une fonction q-périodique si et seulement si son degré est nul et son image de Jacobi égale à 1 . Dans ce cas, la fonction correspondante est unique à un facteur dans K^* près.

■ Vu la proposition (3.1.5), il suffit de montrer que tout diviseur q-périodique est un diviseur de fonction. Pour cela, nous allons considérer la fonction thêta, définie formellement en (2.4.1), comme une fonction de $\overline{K}^*$ à valeurs dans $\overline{K}$: $\Theta(z) = \prod_{n\geq 0} (1-q^n z) \prod_{n\geq 1} (1-q^n z^{-1})$. Le produit infini converge car $|q| < 1$, Θ est holomorphe sur $\overline{K}^*$, ses zéros sont simples, leur ensemble est $q^{\mathbb{Z}}$, et enfin $\Theta(q^{-1}z) = -z\,\Theta(z)$. Soit $D = \{n_a , a \in \overline{K}^*\}$, un diviseur q-périodique, et posons

$$\Theta_D(z) = \prod_{|q|<|a|\leq 1} (\Theta(a^{-1}z))^{n_a e_a}$$

où e_a est le degré d'inséparabilité de $K(a)/K$. Alors la fonction Θ_D est méromorphe et de diviseur D , d'où le théorème. ∎

3.2.2. Expression du degré et de l'image de Jacobi.

PROPOSITION . Si D est un diviseur q-périodique, $D = \{n_a , a\in\overline{K}^*\}$, alors : $\deg(D) = \sum'_{|q|<|a|\leq 1} [K(a):K] . n_a$ et $\Phi(D) \equiv \prod_{|q|<|a|\leq 1} N_{K(a)/K}(a)^{n_a}$ $(\mathrm{mod}.q^{\mathbb{Z}})$.

L'accent indique que a parcourt un système de représentants de classes de K-conjugaison. En remarquant que deux éléments K-conjugués ont même valeur absolue, on voit que ces formules s'écrivent aussi ; $\deg(D) = \sum_{|q|<|a|\leq 1} e_a n_a$ et $\Phi(D) \equiv \prod_{|q|<|a|\leq 1} a^{e_a n_a}$ $(\mathrm{mod}.q^{\mathbb{Z}})$.

∎ Pour les démontrer, utilisons à nouveau la fonction Θ_D définie en (3.2.1) : Θ_D a pour diviseur D , donc $\Theta_D(q^{-1}z) = \alpha^{-1}(-z)^d\Theta_D(z)$ avec $d = \deg(D)$ et $\alpha \equiv \Phi(D)$ $(\mathrm{mod}.q^{\mathbb{Z}})$. Mais d'autre part, la formule $\Theta(q^{-1}z) = -z\,\Theta(z)$ implique :

$$\Theta_D(q^{-1}z) = \prod_{|q|<|a|\leq 1} a^{-e_a n_a} (-z)^{\sum_{|q|<|a|\leq 1} e_a n_a} \Theta_D(z) ,$$

d'où la proposition. ∎

3.2.3. Notons $\mathcal{D}(K^*/q^{\mathbb{Z}})$ (resp. $\mathcal{D}_o(K^*/q^{\mathbb{Z}})$, $\mathcal{D}_\ell(K^*/q^{\mathbb{Z}})$) le groupe des diviseurs q-périodiques définis sur K (resp. le sous-groupe des diviseurs de degré 0 , des diviseurs de fonctions). Nous avons alors l'analogue du corollaire (2.4.2) :

COROLLAIRE . L'application qui fait correspondre au diviseur q-périodique $\{n_a , a\in\overline{K}^*\}$ le point $\prod_{|q|<|a|\leq 1} a^{n_a}$ induit un isomorphisme de groupes de $\mathcal{D}_o(K^*/q^{\mathbb{Z}})/\mathcal{D}_\ell(K^*/q^{\mathbb{Z}})$ sur $K^*/q^{\mathbb{Z}}$.

3.3. COURBES DE TATE.

3.3.1. *THEOREME*. Soit $q \in K^*$ tel que $|q| < 1$. Il existe une courbe elliptique $E(q)$ sur K d'équation $Y^2 - XY = X^3 - h_2X - h_3$, où $h_2 = 5 \sum_{n\geq 1} n^3 \frac{q^n}{1-q^n}$ et $h_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{5n^3+7n^5}{12} \cdot \frac{q^n}{1-q^n}$. L'invariant de $E(q)$ est $j(q) = \frac{1}{q} + 744 + \sum c(n)q^n$ où $c(n) \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, si $j \in K^*$ est tel que $|j| > 1$, il existe une courbe $E(q)$ d'invariant j, unique à $\overline{K}$-isomorphisme près ; $E(q)$ est isomorphe à $K^*/q^{\mathbb{Z}}$ et a pour discriminant $\Delta(q) = \sum_{n\geq 1} \tau(n)q^n = q \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^{24}$, où la fonction τ est la fonction de Ramanujan définie en (2.1.9).

La dernière assertion signifie que les groupes $E(q)$ et $K^*/q^{\mathbb{Z}}$ sont isomorphes, et que le corps des fonctions de $E(q)$ sur K est isomorphe au corps des fonctions K-méromorphes q-périodiques.

Ce théorème est analogue aux théorèmes (2.1.1 et 2.2.6) sur $\mathbb{C}$; ne pouvant pas définir la notion de réseau de K, on utilise la remarque (2.5.2) : $\mathbb{C}/L \simeq \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ si $L = \omega_2(\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z})$ et $q = e^{2\pi i\tau}$. La principale différence entre ces 2 cas est qu'on obtient toutes les classes de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$, alors que sur K on n'obtient que les classes de courbes telles que $|j| > 1$.

Remarquons que les coefficients $5n^3$ et $\frac{5n^3+7n^5}{12}$ qui interviennent dans la définition de h_2 et h_3 sont entiers (2.5.1), donc définis en caractéristique quelconque et de valeur absolue ≤ 1 ; ainsi les séries définissant h_2 et h_3 convergent dans K pour $|q| < 1$.

■ Pour montrer que l'équation de Tate définit une courbe elliptique sur K, il suffit de vérifier que la cubique d'équation $Y^2 - XY = X^3 - h_2X - h_3$ a un discriminant non nul. Or les formules (2) de (1.1.2) donnent ici $\Delta(q) = h_3 + h_2^2 + 72h_2h_3 - 432h_3^2 + 64h_2^3$, et nous retrouvons ainsi $\Delta(q) = \sum_{n\geq 1} \tau(n)\, q^n$ et $j(q) = \frac{(1+48\, h_2)^3}{\Delta(q)} = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n\geq 1} c(n)q^n$, où $\tau(n)$

et $c(n)$ sont entiers, $\tau(1) = 1$ (cf.2.1.9) . La formule

$$\sum_{n\geq 1} \tau(n)q^n = q \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^{24}$$

démontrée sur $\mathbb{C}$ en (2.3) ne fait intervenir que des coefficients entiers, elle est donc valable formellement (i.e. en remplaçant q par un indéterminée X) en caractéristique quelconque. En particulier sur K , si $|q| < 1$ les deux membres convergent et on a encore $\Delta(q) = q.\prod_{n\geq 1} (1-q^n)^{24}$. Ainsi, $|\Delta| = |q| < 1$, donc $\Delta \neq 0$ et $E(q)$ est bien une courbe elliptique sur K ; et $|j(q)| = \frac{1}{|q|} > 1$.

Réciproquement, soit $j \in K^*$, $|j| > 1$. La série formelle

$$\frac{1}{j} = \frac{q}{1 + 744q + \sum_{n\geq 1} c(n)q^{n+1}} = q - 744q^2 + \ldots$$

est à coefficients entiers. La série formelle réciproque est donc aussi à coefficients entiers (cf.[3] prop.7.1 et formule 7.5). Donc elle est convergente dans le domaine $|\frac{1}{j}| < 1$ et les fonctions : $q \longmapsto \frac{1}{j(q)}$, et $q \longmapsto j(q)$, admettent des fonctions réciproques dans le domaine $|j| > 1$. Enfin, l'application de K^* dans $\mathbb{P}^2(K)$ définie par :
$\omega \longmapsto (\omega^3 X(\omega), \omega^3 Y(\omega), \omega^3)$ où

$$X(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^n\omega}{(1-q^n\omega)^2} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{nq^n}{1-q^n}$$

$$Y(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(q^n\omega)}{(1-q^n\omega)^3} - \sum_{n\geq 1} \frac{nq^n}{1-q^n} \quad \text{(cf.(2.5.1) et [18] ,15.1)}$$

induit un isomorphisme de $K^*/q^{\mathbb{Z}}$ sur $E(q)$. ∎

3.3.2. *COROLLAIRE*. <u>L'ensemble des classes de $\overline{K}$-isomorphisme de courbes elliptiques sur</u> K <u>d'invariant</u> j <u>tel que</u> $|j| > 1$ <u>est en bijection avec l'ensemble des éléments</u> q <u>de</u> K^* <u>tels que</u> $|q| < 1$.

∎ C'est le théorème (3.3.1) joint au théorème (1.2.1). ∎

3.3.3. <u>Réduction de la courbe de Tate</u>. L'équation de $E(q)$ étant à coefficients entiers sur K , on peut considérer l'équation obtenue en ré-

duisant les coefficients modulo l'idéal maximal $\wp = \{z \in K/|z| < 1\}$ de K. Comme $q \in \wp$, cela revient à remplacer q par 0. Ainsi, quelle que soit la caractéristique de K, la courbe obtenue est la cubique dégénérée d'équation $Y^2 - XY = X^3$ (cf. 2.5.3).

Les calculs de (2.5.3) sont valables et montrent que la cubique a un point double en $(0,0)$ à tangentes distinctes rationnelles sur K. On dit que $E(q)$ est à <u>réduction multiplicative</u> (mod.$\wp$) (cf.III,1).

4. *POINTS D'ORDRE FINI ET ISOGENIES*

4.1. <u>POINTS D'ORDRE FINI</u>.

<u>Soient</u> K <u>un corps de caractéristique</u> p, E <u>une courbe elliptique sur</u> K, N <u>un entier strictement positif</u>, $E_N = \{P \in E(\overline{K})/N.P = 0\}$ <u>le groupe des points de</u> E <u>définis sur</u> K <u>dont l'ordre divise</u> N.

4.1. *PROPOSITION*. <u>Si</u> $p = 0$ <u>ou si</u> p <u>ne divise pas</u> N, <u>alors</u> $E_N \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. <u>Si</u> $p \mid N$, <u>il existe une injection de</u> E_N <u>dans</u> $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$.

Nous démontrons cette proposition lorsque $p = 0$. Pour $p > 0$, nous donnons une idée de la démonstration en (4.3.2), et renvoyons le lecteur à ([31],3,4 ou [5],7).

▪ Si K/Q est fini, on peut plonger K et $\overline{K}$ dans $\mathbb{C}$, et alors E_N est un sous-groupe de $E_N(\mathbb{C})$ (on note $E_N(\mathbb{C})$ le groupe des points de E, définis sur $\mathbb{C}$, dont l'ordre divise N). Comme $E(\mathbb{C}) = \mathbb{C}/L$ pour un réseau L, $E_N(\mathbb{C}) = N^{-1}L/L$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. Or $E_N(\mathbb{C})$ est stable par tout K-automorphisme de $\mathbb{C}$; ainsi, un point quelconque de $E_N(\mathbb{C})$ n'a qu'un nombre fini de conjugués sur K, donc ce point est algébrique sur K. En conclusion, tout point de $E_N(\mathbb{C})$ est dans $E(\overline{K})$,

donc $E_N = E_N(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$.

Si $K/\mathbb{Q}$ n'est pas fini, on ne peut pas toujours plonger K dans $\mathbb{C}$. Soient : $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + y$ l'équation de E ; P un point de E_N ; (x_p, y_p) les coordonnées de P . Notons K' le corps $\mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3, a_4\ a_6, x_p, y_p)$: c'est une extension finie de $\mathbb{Q}$ et $P \in E(K')$. Ainsi, d'après ce qui précède, P est dans $E_N(\mathbb{C})$. Là encore, $E_N \simeq E_N(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. ∎

4.1.2. Sous-groupes cycliques d'ordre fini. Soit C un sous-groupe fini cyclique d'ordre N de E . Nous dirons que C est défini sur K s'il est globalement invariant par tout automorphisme de $\overline{K}/K$.

4.1.3. Problèmes. Etant donné K , pour quelles valeurs de N existe-t-il une courbe elliptique E sur K contenant un point P (resp. un sous-groupe cyclique C) d'ordre N défini sur K ? Nous étudierons surtout le second de ces problèmes. Deux couples (E,C) et (E',C') définis sur K sont dits $\overline{K}$-isomorphes s'il existe un $\overline{K}$ isomorphisme ψ de E sur E' tel que $\psi(C) = C'$. L'ensemble des classes de $\overline{K}$-isomorphisme de couples (E,C) définis sur K est noté $Y_o(N)(K)$.

4.2. EXEMPLE $K = \mathbb{C}$.

Alors E s'identifie à $\mathbb{C}/L$, et il est possible de choisir une base $\{\omega_1, \omega_2\}$ de L telle que $C = \frac{1}{N}.\mathbb{Z}\omega_2/L$. De même, $E' = \mathbb{C}/L'$ où $L' = \mathbb{Z}\omega'_1 \oplus \mathbb{Z}\omega'_2$ et $C' = \frac{1}{N}\mathbb{Z}\omega'_2/L'$.

4.2.1. *PROPOSITION* . Soit $\Gamma_o(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,/\, c \equiv 0 \pmod N\}$. Alors $Y_o(N)(\mathbb{C}) \simeq \overline{\Gamma}_o(N)\backslash\mathcal{H}$.

∎ Les courbes E et E' sont $\mathbb{C}$ isomorphes si et seulement si il existe un complexe α tel que $\alpha L = L'$. Mais alors $\{\alpha\omega_1, \alpha\omega_2\}$ et $\{\omega'_1, \omega'_2\}$ sont deux bases de L' , donc (cf. lemme 2.1.8) il existe une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ telle que $\begin{pmatrix} \alpha\ \omega_1 \\ \alpha\ \omega_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}$. Ceci étant réalisé,

l'image de C est égale à C', si et seulement si les sous-groupes de E' engendrés par $\alpha\dfrac{\omega_2}{N} = \dfrac{c\omega_1'+d\omega_2'}{N}$ et $\dfrac{\omega_2'}{N}$ sont les mêmes. Ceci équivaut à : $c \equiv 0 \pmod N$. ∎

4.2.2. Posons $X_o(N)(\mathbb{C}) = \overline{\Gamma}_o(N)\backslash\mathcal{H}$; autrement dit (cf. 2.2.1) $X_o(N)(\mathbb{C})$ est la réunion de $Y_o(N)(\mathbb{C})$ et des pointes ; c'est une surface de Riemann compacte, et le revêtement $X_o(N)(\mathbb{C}) \longrightarrow \overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$ est de degré $[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}_o(N)]$. La formule de Riemann-Hurwitz permet de calculer le <u>genre</u> $g_o(N)$ de $X_o(N)(\mathbb{C})$, sachant que le genre de $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$ est nul.

PROPOSITION . <u>Le genre de</u> $X_o(N)(\mathbb{C})$ <u>est égal à</u> :

$$g_o(N) = 1 + \mu/12 - \mu_2/4 - \mu_3/3 - \sigma_o/2 \quad ,$$

<u>où</u> $\mu = N \prod_{p|N} (1 + \frac{1}{p})$; $\mu_2 = \begin{cases} \prod_{p|N} (1+(\frac{-1}{p})) & \text{si } 4 \nmid N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$;

$$\mu_3 = \begin{cases} \prod_{p|N} (1 + (\frac{-3}{p})) & \text{si } 9 \nmid N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad \sigma_o = \sum_{d|N} \varphi((d, \tfrac{N}{d})) \quad .$$

Dans cet énoncé, p désigne un nombre premier, φ la fonction indicatrice d'Euler, et $(\frac{\cdot}{p})$ le symbole de Legendre ; on trouve dans [33], par exemple, la définition et le calcul de ces expressions. En particulier, on a : $(\frac{-1}{p}) = 0$ si $p=2$, $(\frac{-1}{p})=1$ si $p \equiv 1 \pmod 4$, $(\frac{-1}{p})=-1$ si $p \equiv 3 \pmod 4$; et $(\frac{-3}{p}) = 0$ si $p=3$, $(\frac{-3}{p}) = 1$ si $p \equiv 1 \pmod 3$, $(\frac{-3}{p}) = -1$ si $p \equiv 2 \pmod 3$.

∎ La proposition se démontre en 2 temps :

D'abord, si G est un sous-groupe de Γ d'indice fini, notons μ l'indice de $\overline{G}$ dans $\overline{\Gamma}$, μ_2 (resp. μ_3) le nombre de points au-dessus de i (resp. de ρ) dans le revêtement $\overline{G}\backslash\mathcal{H} \longrightarrow \overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$, et σ_o le nombre des pointes de $\overline{G}\backslash\mathcal{H}$. La formule de Riemann-Hurwitz donne alors le genre g

de $\overline{G\backslash\mathcal{H}}$ par : $g = 1 + \mu/12 - \mu_2/4 - \mu_3/3 - \sigma_o/2$.

Ensuite, on calcule μ , μ_2 , μ_3 , σ_o , lorsque $G = \Gamma_o(N)$. Pour une démonstration détaillée, voir ([43] , propositions 1.40 et 1.43). ∎

4.2.3. Lorsque N est premier, la formule donnant $g_o(N)$ est particulièrement simple.

COROLLAIRE. Si N est premier, le genre de $X_o(N)(\mathbb{C})$ est égal à :

$$g_o(N) = \begin{cases} [\frac{N+1}{12}] & \text{si } 12 \nmid N-1 \\ [\frac{N+1}{12}] - 1 = \frac{N-1}{12} - 1 & \text{si } 12 \mid N-1 \ . \end{cases}$$

∎ En effet, $\mu = N+1$ et $\sigma_o = 2$, d'où

$$g_o(N) = \frac{N+1}{12} - \frac{\mu_2}{4} - \frac{\mu_3}{4} \ ;$$

on vérifie que $g_o(2) = g_o(3) = 0$, puis on suppose $N \neq 2$, 3 ; alors μ_2 et μ_3 ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 2 , ce qui donne pour $g_o(N)$ les valeurs : $\frac{N+1}{12}$, $\frac{N+1}{12} - \frac{1}{3}$, $\frac{N+1}{12} - \frac{1}{2}$, $\frac{N+1}{12} -$. Or $g_o(N)$ est entier, et les 3 premières valeurs, lorsqu'elles sont entières, valent $[\frac{N+1}{12}]$. Enfin la quatrième valeur correspond à $\mu_2 = \mu_3 = 2$ c'est-à-dire $N-1 \equiv 0 \pmod{3 \text{ et } 4}$, et alors $[\frac{N+1}{12}] = \frac{N-1}{12}$ alors que $\frac{N+1}{12} - \frac{7}{6} = \frac{N-1}{12} - 1$. ∎

4.3. ISOGENIES.

Soient E et E' deux courbes elliptiques sur K , λ un homomorphisme de E dans E' .

4.3.1. *PROPOSITION*. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(I) $\lambda \neq 0$;

(II) $\mathrm{Ker}\,\lambda$ est fini ;

(III) λ est surjectif.

Un homomorphisme λ vérifiant ces trois propriétés est appelé une isogénie de E dans E' .

■ La proposition vient du fait que toute courbe elliptique est une variété abélienne de dimension 1. ■

Soient un homomorphisme de E dans E' , $K(E)$ (resp. $K(E')$) les corps de fonctions de E (resp. E') . Alors f induit un homomorphisme f^* de $K(E')$ dans $K(E)$. Appelons degré de f le degré de l'extension $K(E)/f^*(K(E'))$, et disons que f est séparable (resp. inséparable) si cette extension est séparable (resp. inséparable). Définissons de même les degrés de séparabilité et d'inséparabilité de f , notés respectivement $(\deg f)_i$ et $(\deg f)_s$ et égaux respectivement au degré de séparabilité et d'inséparabilité de $K(E)/f^*(K(E'))$. Alors, l'image réciproque par f de chaque point de E' contient $(\deg f)_s$ points, chacun étant affecté d'une multiplicité égale à $(\deg f)_i$ (la structure de groupe de E' empêche qu'il y ait des points de ramification). En particulier, l'ordre de $\operatorname{Ker} f$ est égal à $(\deg f)_s$.

4.3.2. Exemples : Multiplication par N . Notons N l'endomorphisme "multiplication par N" sur E .

PROPOSITION. La multiplication par N est une isogénie de E de degré N^2 .

■ Si E est définie sur un corps K de caractéristique nulle, nous avons vu en (4.1.1) que E_N (c'est-à-dire le noyau de N) est isomorphe à $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$; donc N est de degré N^2 .

Si E est définie sur un corps K de caractéristique p non nulle, il faut écrire explicitement les formules de multiplication par N en caractéristique nulle, voir qu'elles se réduisent bien (modulo p) et calculer le degré de l'extension $K(E)/N^*(K(E))$ (cf.[31] 3.4 et [4]). ■

COROLLAIRE. (On retrouve la proposition (4.1.1)). Si $p \nmid N$, le groupe E_N est isomorphe à $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$; si $p \mid N$, c'est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$.

■ En effet, $E_N = \mathrm{Ker}(N)$, et l'ordre de E_N est égal à $(\deg N)_s$. ■

4.3.3. Isogénies et sous-groupes.

PROPOSITION. Soient E , E' , deux courbes elliptiques sur K . Il y a une bijection entre les isogénies λ de E dans E' définies sur K séparables de degré m , et les sous-groupes F de E , rationnels sur K d'ordre m , cette bijection étant définie par : $F = \mathrm{Ker}\,\lambda$.

■ Soit $\lambda : E \to E'$ une isogénie définie sur K (cela signifie que E , E' et λ , sont définis sur K) . Supposons λ séparable. Alors $\mathrm{Ker}\,\lambda$ est un sous-groupe de E d'ordre $\deg \lambda$. Le groupe de Galois de $\bar{K}/K$ agit sur $\lambda(E)$ par : $(\lambda(p))^\sigma = \lambda^\sigma(p^\sigma)$. Mais $\lambda^\sigma = \lambda$ puisque λ est défini sur K , donc $(\mathrm{Ker}\,\lambda)^\sigma = \mathrm{Ker}\,\lambda$ est un sous-groupe de E rationnel sur K .

Réciproquement, soit F un sous-groupe de E rationnel sur K . Montrons qu'alors $E' = E/F$ est une courbe elliptique sur K , et que la projection canonique $\lambda : E \longrightarrow E'$ est une isogénie définie sur K de noyau F . Le sous-groupe F de E agit sur $\bar{K}(E)$ par translation : si $a \in F$, $f \in \bar{K}(E)$, posons $af(x) = f(x-a)$ pour tout $x \in E$. Définissons les fonctions X et Y de $\bar{K}(E)$ par : $X(M) = \sum_{a \in F} x(M-a)$, $Y(M) = \sum_{a \in F} y(M-a)$, pour tout $M \in E$. En fait, X et Y sont dans $\bar{K}(E)^F$, et X (resp. Y) a un pôle d'ordre 2 (resp.3) en tout point de F , donc $\deg(X) = 2d$ et $\deg(Y) = 3d$, si $d = \#F$; on en déduit : $[\bar{K}(E) : \bar{K}(X)] = 2d$, $[\bar{K}(E) : \bar{K}(Y)] = 3d$, $[\bar{K}(E) : \bar{K}(X,Y)] = d$. Or $[\bar{K}(E) : \bar{K}(E)^F] = \#F = d$, d'où $\bar{K}(E)^F = \bar{K}(X,Y)$.

On peut montrer que $\bar{K}(E)^F$ est un corps de fonctions algébriques sur $\bar{K}$ de genre 1 , et que l'équation liant X et Y est celle d'une courbe elliptique (cf.[49] et [50]). ■

COROLLAIRE. L'ensemble $Y_0(N)(K)$ peut être considéré comme l'ensemble des classes de $\bar{K}$-isomorphisme de triplets $(E, E', \lambda : E \to E')$ d'isogénies définies sur K à noyau cyclique d'ordre N .

4.4. ACCOUPLEMENT DE WEIL.

Soit K un corps égal à $\mathbb{C}$ ou à un corps local. Supposons N premier à la caractéristique de K.

4.4.1. *THEOREME*. Il existe une fonction $e_N : E_N \times E_N \longrightarrow \mu_N$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) e_N est bilinéaire ;

(ii) e_N est alternée, c'est-à-dire $e_N(s,t) = e_N(t,s)^{-1}$;

(iii) e_N établit une dualité, c'est-à-dire $e_N(s,t) = 1$ pour tout s si et seulement si $t = 0$;

(iv) $e_N(s,t)^\sigma = e_N(s^\sigma, t^\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

(cf. [43], proposition 4.2).

■ Définissons e_N : soient $t \in E_N$ et $t' \in E_{N^2}$ tel que $Nt' = t$ (la multiplication par N est surjective), et soient les diviseurs $D = N(t) - N(0)$ et $D' = \sum_{u \in E_N} (t'+u) - \sum_{u \in E_N} (u)$. D'après le critère d'Abel (2.4 et 3.2) il existe deux fonctions f_t et g_t dans $K(E)$ de diviseurs $(f_t) = D$ et $(g_t) = D'$. La fonction $f_t \circ N$ définie par $f_t \circ N(x) = f_t(Nx)$ a pour zéros les points x tels que $Nx = t$ et pour pôles les points x tels que $Nx = 0$, ces zéros et pôles étant d'ordre N, donc son diviseur est $(f_t \circ N) = N \sum_{u \in E_N} (t'+u) - N \sum_{u \in E_N} u = ND' = (g_t^N)$. Quitte à multiplier g_t par une constante, nous obtenons : $f_t(Nx) = g_t(x)^N$ pour tout x de E. Soit $s \in E_N$; alors $g_t(x+s)^N = f_t(N(x+s)) = f_t(Nx) = g_t(x)^N$, donc il existe $e_N(s,t) \in \mu_N$ tel que $g_t(x+s) = e_N(s,t) g_t(x)$ quel que soit $x \in E$.

Montrons que e_N vérifie les propriétés du théorème :

(i) $g_t(x+s_1+s_2) = e_N(s_1+s_2,t) g_t(x) = e_N(s_2,t) g_t(x+s_1) = e_N(s_2,t) e_N(s_1,t) g_t(x)$ pour tout x, donc e_N est linéaire par rapport à la 1ère variable.

$$\begin{aligned}(f_{t_1+t_2}) &= N(t_1+t_2) - N(0) \\ &= (N(t_1)-N(0)) + (N(t_2)-N(0)) + N((t_1+t_2)-(t_1)-(t_2)+(0)) \\ &= (f_{t_1}) + (f_{t_2}) + N(h)\end{aligned}$$

d'après le critère d'Abel, donc, quitte à multiplier h par une constante, nous avons $f_{t_1+t_2} = f_{t_1}.f_{t_2}.h^N$, d'où $g_{t_1+t_2}(x)^N = g_{t_1}(x)^N.g_{t_2}(x)^N.h(Nx)^N$. Appliquant ceci à $x+s$, comme $h(N(x+s)) = h(Nx)$, nous voyons que $e_N(s,t_1+t_2) = e_N(s,t_1) + e_N(s,t_2)$. Ainsi e_N est bilinéaire.

(ii) Comme e_N est bilinéaire, il suffit de montrer que $e_N(t,t) = 1$ pour tout $t \in E_N$ et d'utiliser : $e_N(s+t,s+t) = e_N(s,s).e_N(t,t).e_N(s,t).e_N(t,s)$ pour montrer (ii) . Considérons la fonction :

$$y \longmapsto f_t(y).f_t(y-t) \ \ldots \ f_t(y-(N-1)t) \ .$$

Elle a pour diviseur $N((t)-(0) + (2t) - (t) +\ldots+ (Nt) - ((N-1)t)) = 0$, donc elle est constante. Posons $t = Nt'$, $y = Nx$, et considérons la racine $N^{\text{ème}}$ de la fonction, en utilisant : $g_t(x)^N = f_t(y)$: la fonction continue $x \longmapsto g_t(x).g_t(x-t')\ldots g_t(x-(N-1)t')$ est constante. En particulier, elle a la même valeur en x et en $x-t'$, ce qui mène à : $g_t(x) = g_t(x-Nt') = g_t(x-t)$ c'est-à-dire $e_N(t,t) = 1$.

(iii) Si $e_N(s,t) = 1$ pour tout s , c'est-à-dire $g_t(x+s) = g_t(x)$ cela signifie que $g_t \in K(E)^{E_N} = K(E/E_N) = K(NE)$ (cf. 4.3.3). Autrement dit, il existe $h \in K(E)$ tel que $g_t(x) = h(Nx)$, d'où $f_t(Nx) = h(Nx)^N$, et le diviseur de h est donné par : $(h) = \frac{1}{N}(f_t) = (t) - (0)$, ce qui n'est possible que si $t = 0$ (critère d'Abel).

(iv) provient de la définition de e_N et de la propriété :

$$(g_t(x))^\sigma = g_{t^\sigma}(x^\sigma) \ . \quad \blacksquare$$

4.4.2. *COROLLAIRE*. Le corps $K(\mu_N)$ est contenu dans $K(E_N)$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(K(E_N)/K) & \xrightarrow{\text{restriction}} & \mathrm{Gal}(K(\mu_N)/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Aut}(E_N) & \xrightarrow{\text{déterminant}} & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \end{array}$$

■ L'application e_N est surjective, d'après (iii) ; or $e_N(s,t)^\sigma = e_N(s,t)$ si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K(E_N))$; ainsi $\mu_N \subset K(E_N)$. En fait, e_N définit un isomorphisme de $\Lambda^2 E_N$ sur μ_N , donc e_N correspond au déterminant. ■

4.4.3. Application.

PROPOSITION. Le groupe des points de torsion définis sur $\mathbb{Q}$ une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est ou bien cyclique, ou bien égal au produit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par un groupe cyclique.

■ En effet, le groupe de torsion de $E(K)$ est égal à : $E(K)^{tor} = \prod_p E(K)_p$ où p parcourt l'ensemble des nombres premiers ; et d'autre part $E(\mathbb{Q})_p \subset E(\overline{\mathbb{Q}})_p \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Supposons que $E(\mathbb{Q})_p \simeq E(\overline{\mathbb{Q}})_p$. D'après le corollaire (4.4.2), $\mathbb{Q}(\mu_p) \subset \mathbb{Q}(E_p)$; or $E_p = E(\overline{\mathbb{Q}})_p$ par définition, donc notre hypothèse implique : $\mathbb{Q}(\mu_p) \subset \mathbb{Q}(E(\mathbb{Q})_p)$ c'est-à-dire $\mathbb{Q}(\mu_p) \subset \mathbb{Q}$: ce n'est possible que si $p = 2$. Ainsi $E(\mathbb{Q})_p$ est trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si $p \neq 2$, et peut être isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ si $p = 2$. ■

5. *COURBES MODULAIRES*

5.1. $X_o(N)$ ET $X(N)$.

5.1.1. Rappelons que $Y_o(N)(K)$ est l'ensemble des classes de $\overline{K}$-isomorphisme de couples (E,C) où E est une courbe elliptique sur K et C un sous-groupe cyclique d'ordre N de E défini sur K .

Si $\Gamma_o(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \ / \ c \equiv 0 \pmod N\}$ nous avons vu que $Y_o(N)(\mathbb{C}) \simeq \overline{\Gamma_o(N)}\backslash\mathcal{H}$, et qu'en ajoutant les pointes nous obtenons une surface de Riemann compacte $\widehat{\Gamma_o(N)\backslash\mathcal{H}}$ notée $X_o(N)(\mathbb{C})$.

5.1.2. Fixons une racine $N^{\text{ème}}$ de l'unité ζ_N dans $K(\mu_N)$. Définissons $Y(N)(K)$ comme l'ensemble des triplets (E,P,Q) où E est une courbe elliptique sur K , P et Q deux points de E tels que $Q \in E(K)$, $P \in E(K(\mu_N))$ et $e_N(P,Q) = \zeta_N$.

Soit $\Gamma(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv 1 \pmod N\}$ (où $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'identité dans Γ) . Il est facile de vérifier (comme en (4.2.2)) que $Y(N)(\mathbb{C}) \simeq \overline{\Gamma}(N)\backslash\mathcal{H}$, et de même $\overline{\overline{\Gamma}(N)\backslash\mathcal{H}}$ est une surface de Riemann compacte, notée $X(N)(\mathbb{C})$.

5.2. FONCTIONS DE WEBER (cf. [43] ,4.5).

5.2.1. *DEFINITION* . Soient K un corps de caractéristique p différente de 2 ou 3 . N un entier ≥ 2 et premier à p , E une courbe elliptique sur K donnée par son équation de Weierstrass :

$$y^2 = x^3 - \frac{c_4}{48}x - \frac{c_6}{864} \quad \text{(cf. 1.1.3)} .$$

Rappelons que le discriminant de E est $\Delta = \frac{c_4^3 - c_6^2}{12^3} \neq 0$ et que l'invariant de E est $j = \frac{c_4^3}{\Delta}$. Enfin, la proposition (1.2.2) détermine $\mathrm{Aut}(E)$: nous avons $\mathrm{Aut}(E) \simeq \mu_{2i}$ où $i = 1$ si $j \neq 0$, 12^3 , $i = 2$ si $j = 12^3$, $i = 3$ si $j = 0$. Posons, pour tout P de E :

$$f^{(1)}(P) = \frac{x(P)c_4c_6}{\Delta} \quad , \quad f^{(2)}(P) = \frac{x(P)^2c_4^2}{\Delta}$$

$$f^{(3)}(P) = \frac{x(P)^3c_6}{\Delta} .$$

La fonction $f^{(i)}$ appartient à $K(E)$. On l'appelle la $i^{\text{ème}}$ fonction de Weber de E , et on la note parfois $f_E^{(i)}$. Elle est paire car x est paire .

5.2.2. Propriétés.

(i) Lorsque $\mathrm{Aut}(E) \simeq \mu_{2i}$, on a $f^{(i)}(P) = f^{(i)}(P')$ si et seulement si $P = \alpha P'$ pour un $\alpha \in \mathrm{Aut}(E)$.

■ Notons x,y,x',y' les coordonnées $x(P)$, $y(P)$, $x(P')$, $y(P')$, de P et P' , qui sont liées par :

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - \frac{c_4}{48}x - \frac{c_6}{864} \\ y'^2 = x'^3 - \frac{c_4}{48}x' - \frac{c_6}{864} \end{cases} .$$

Alors $f^{(i)}(P) = f^{(i)}(P')$ si et seulement si $x^i = x'^i$, ce qui donne : $\begin{cases} x = x' \\ y^2 = y'^2 \end{cases}$ si $i = 1$, $\begin{cases} x^2 = x'^2 \\ y^4 = y'^4 \end{cases}$ si $i = 2$, $\begin{cases} x^3 = x'^3 \\ y^2 = y'^2 \end{cases}$ si $i = 4$. ■

(ii) Soient E et E' deux courbes elliptiques sur K , et λ un $\bar{K}$-isomorphisme de E sur E' . Alors $f^{(i)}_{E'} \circ \lambda = f^{(i)}_{E}$ pour $i = 1,2,3$.

■ Soit $y^2 = x^3 - \frac{c'_4}{48}x - \frac{c'_6}{864}$ l'équation de E' . D'après (1.2.1) l'isomorphisme λ est de la forme : $\lambda(x) = u^2x$, $\lambda(y) = u^3y$, pour un u dans $\bar{K}^*$ (les nombres r , s , t de la formule (4) sont nuls puisque les 2 courbes sont définies par leur équation de Weierstrass). Alors $c'_4 = u^4c_4$, $c'_6 = u^6c_6$, $\Delta' = u^{12}\Delta$, et la propriété (ii) se déduit de la définition des $f^{(i)}$. ■

5.3. INTERPRETATION GEOMETRIQUE.

5.3.1. *DEFINITION*. Jusqu'à la fin de ce paragraphe, N est un entier ≥ 2 , K est égal à $\mathbb{C}$ et E à $\mathbb{C}/L$, où $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ et $\tau = \omega_1/\omega_2 \in \mathfrak{H}$; ainsi $L = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid (a,b) \in \mathbb{Z}\}$, $NL = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid (a,b) \in N\mathbb{Z}^2\}$, et $E_N \simeq L/NL \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$.

Pour tout $(a,b) \in \{0,1,\ldots,N-1\}^2 - \{(0,0)\}$, posons

$$f^{(i)}_{(a,b)}(\tau) = f^{(i)}\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{N}\right) \quad (i = 1,2,3) ;$$

$f^{(i)}_{(a,b)}$ est bien fonction de τ , grâce aux propriétés d'homogénéité des $f^{(i)}$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) $f^{(i)}_{(a,b)}|_o\gamma = f^{(i)}_{(a,b)\gamma}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ si $(a,b)\gamma$ désigne le produit matriciel de (ab) par γ .

(ii) $f^{(i)}_{(a,b)} = f^{(i)}_{(a',b')}$ si $(a,b) \equiv \pm(a',b') \pmod{N\mathbb{Z}^2}$.

5.3.2. *PROPOSITION.* La fonction $f^{(i)}_{(a,b)}$ est une fonction modulaire de poids zéro pour le groupe $\Gamma(N)$, et son développement de Fourier est à coefficients dans $\mathbb{Q}(\zeta_N)$.

■ C'est une fonction holomorphe dans $\mathcal{H}$ d'après sa définition (rappelons que $\Delta \neq 0$ dans $\mathcal{H}$) . Si $\gamma \in \Gamma(N)$, i.e. $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma \equiv \pm 1 \pmod N$ (cf. 5 1.2), on a $f^{(i)}_{(a,b)}|_o\gamma = f^{(i)}_{(a,b)\gamma}$ et $(a,b)\gamma \equiv \pm(a,b) \pmod{N\mathbb{Z}^2}$, donc $f^{(i)}_{(a,b)}|_o\gamma = f^{(i)}_{(a,b)}$. Enfin, le développement de Fourier de $x = \wp$ (cf.2.5.1) donne celui de $f^{(i)}_{(a,b)}$. Par exemple pour $i = 1$:

$$f^{(1)}_{(a,b)}(\tau) = \wp\left(\frac{a\tau+b}{N} ; \mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z}\right) . \frac{E_4(\tau).E_6(\tau)}{\Delta(\tau)}$$

$$= \left[\frac{1}{12} + \frac{q}{(1-q)^2} + \sum_{n,m\geq 1} nq^{mn}(\zeta_N^{nb}q^{na/N} + \zeta_N^{-nb}q^{-na/N} - 2)\right]\left(\frac{1}{q}+R(q)\right)$$

où $R(q) \in \mathbb{Z}[q]$ et $a < N$. Donc $f^{(1)}_{(a,b)}(\tau) \in \mathbb{Q}(\zeta_N)((q^{1/N}))$. Or la variable locale en ∞ pour $\overline{\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}}$ est $q^{1/m}$ où m est l'indice de ramification de $\overline{\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}}$ sur $\overline{\Gamma\backslash\mathcal{H}}$ en ∞ , c'est-à-dire le plus petit entier tel que $\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \Gamma(N)$: donc $m = N$ et $f^{(1)}_{(a,b)}$ est méromorphe à l'infini ; par conjugaison, et d'après la formule (i) $f^{(1)}_{(a,b)}$ est méromorphe aux autres pointes de $\overline{\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}}$. Un raisonnement analogue permet de conclure pour $i = 2$ et 3 . ■

Remarque : le développement de Fourier de $\frac{f^{(i)}_{(a,b)}(\tau)}{j(\tau)}$ est dans $\mathbb{Q}(\zeta_N)[[q^{1/N}]]$.

5.3.3. *DEFINITION.* Cherchons des fonctions analogues pour $\Gamma_o(N)$: (a,b) et (a',b') étant dits équivalents si les sous-groupes

$$\left\langle \frac{a\omega_1+b\omega_2}{N} \right\rangle \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{a'\omega_1+b'\omega_2}{N} \right\rangle$$

d'ordre N de E sont égaux, notons $g^{(i)}_k$ les fonctions symétriques élémentaires des $f^{(i)}_{(a,b)}$ regroupées selon les classes d'équivalence de (a,b).

L'indice k parcourt un certain ensemble $\mathcal{K}$ lorsque (a,b) parcourt un système de représentation de $\mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2$.

5.3.4. *PROPOSITION.* La fonction $g_k^{(i)}$ est une fonction modulaire de poids zéro pour le groupe $\Gamma_o(N)$, et son développement de Fourier est à coefficients dans $\mathbb{Q}$

■ C'est une conséquence de la proposition analogue pour les $f_{(a,b)}^{(i)}$ (cf. 5.3.3) et de la définition des $g_k^{(i)}$. ■

5.3.5. Nous pouvons maintenant définir deux applications : Φ de $\overline{\Gamma}(N)\backslash\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}^{M+1}$ telle que $\Phi(\tau) = (j(\tau), f_{(a,b)}^{(i)}(\tau))$, $i \in \{1,2,3\}$, $(a,b) \in \{0,1,\ldots,N-1\}^2 - \{(0,0)\}$; et ψ de $\overline{\Gamma}_o(N)\backslash\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}^{M'+1}$ telle que $\psi(\tau) = (j(\tau), g_k^{(i)}(\tau))$, $i \in \{1,2,3\}$, $k \in \mathcal{K}$ (M et M' étant 2 entiers convenables).

Aux pointes, posons $\Phi(\tau) = (1, \frac{f_{(a,b)}^{(i)}(\tau)}{j(\tau)})$, et $\psi(\tau) = (1, \frac{g_k^{(i)}(\tau)}{j(\tau)})$ (en remplaçant les fonctions par leurs développements de Fourier). Cela permet de prolonger Φ (resp. ψ) en une fonction de $\widehat{\overline{\Gamma}(N)\backslash\mathcal{H}}$ (resp. $\widehat{\overline{\Gamma}_o(N)\backslash\mathcal{H}}$) dans $\mathbb{P}^M$ (resp. $\mathbb{P}^{M'}$) (espaces projectifs sur $\mathbb{C}$) .

5.3.6. *PROPOSITION.* Φ (resp. ψ) est un plongement biholomorphe de la surface de Riemann $\widehat{\overline{\Gamma}(N)\backslash\mathcal{H}}$ (resp. $\widehat{\overline{\Gamma}_o(N)\backslash\mathcal{H}}$) dans l'espace projectif $\mathbb{P}^M$ (resp. $\mathbb{P}^{M'}$) .

■ D'après ce qui précède, Φ et ψ sont holomorphes, y compris aux pointes.

Injectivité de Φ : soient τ et τ' dans $\mathcal{H}$ tels que leurs classes modulo $\overline{\Gamma_o(N)}$ aient la même image par Φ ; cela signifie : $j(\tau) = j(\tau')$, et $f_{(a,b)}^{(i)}(\tau) = f_{(a,b)}^{(i)}(\tau')$ pour tous i,a,b . Supposons d'abord que $j(\tau) \in \mathbb{C}^M$, c'est-à-dire que τ et τ' ne sont pas des pointes. D'après (2.1.8) , il existe une matrice $\gamma \in \Gamma$ telle que $\gamma\tau = \tau'$, d'où $f_{(a,b)}^{(i)}(\tau') = f_{(a,b)\gamma}^{(i)}(\tau)$ (cf. 5.2.1). Ainsi $f^{(i)}(\frac{a\tau+b}{N}) = f^{(i)}(\frac{a'\tau+b'}{N})$ si $(a',b') = (a,b)\gamma$; d'après (5.1.2(i)) , il existe un automorphisme $\alpha_{a,b}$ de $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau\oplus\mathbb{Z}$ tel que $(a\ b) = (a\ b)\gamma\alpha_{a,b}$ (écriture matricielle). Montrons que $\alpha_{a,b}$ est en fait

indépendant de (a,b) . Soient les couples (a,b) , (a',b') et $(a'',b'') = (a,b) + (a',b')$. Nous devons avoir les égalités de matrices suivantes :

$$(a''b'') = \alpha_{a'',b''}(a''b'')\gamma = [\alpha_{a,b}(ab) + \alpha_{a',b'}(a'b')]\gamma$$

c'est-à-dire : $\alpha_{a'',b''}(a''b'') = \alpha_{a,b}(ab) + \alpha_{a',b'}(a'b')$ ou encore : $(\alpha_{a'',b''} - \alpha_{a,b})(a''b'') = (\alpha_{a',b'} - \alpha_{a,b})(a'b')$. Lorsque $\mathrm{Aut}\, E \simeq \mu_2$ $(\tau \neq i, \rho)$, la différence entre 2 automorphismes de E ne peut prendre que les valeurs ± 2 ou 0 . Donc, ou bien $\alpha_{a,b} = \alpha_{a',b'} = \alpha_{a'',b''}$, ou bien $(a''b'') = \pm(a'b')$ et le nombre des couples (a,b) est égal à 2 . Or le nombre des couples (a,b) est égal au cardinal de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 - \{(0,0)\}$, c'est-à-dire à $N^2 - 1$ et ce nombre est ≥ 3 dès que $N \geq 2$. Donc $\alpha_{a,b} = \alpha$ est indépendant de (a,b) . Lorsque $\mathrm{Aut}\, E \simeq \mu_4$ ou μ_6 , la démonstration est plus lourde mais le résultat est encore vrai. Alors, l'égalité $(a\ b) = (a\ b)\gamma\alpha$, valable pour tout $(a\ b)$, donne $\gamma\alpha = 1$; ainsi γ est dans $\mathrm{Aut}\, E$, qui est isomorphe au groupe d'isotropie de τ dans $\widehat{\Gamma\backslash\mathcal{H}}$: donc $\tau' = \gamma\tau = \tau$.

Supposons maintenant que $j(\tau)$ est infini, c'est-à-dire que τ et τ' sont des pointes. Le développement de Fourier donne

$$\frac{f^{(i)}_{(a,b)}(\tau)}{j(\tau)} = \frac{1}{12} + \frac{q^{a/N}\zeta_N^b}{(1-q^{a/N}\zeta_N^b)^2} + O(q^{2/N}) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{12} + \dfrac{\zeta_N^b}{(1-\zeta_N^b)^2} & \text{si } a = 0 \\ \dfrac{1}{12} & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \quad (\mathrm{mod}.\, q^{2/N}) .$$

Ainsi, les différentes valeurs de (a,b) telles que $a = 0$ correspondent à des valeurs distinctes de $\dfrac{f^{(i)}_{(a,b)}(\tau)}{j(\tau)}$. Par conjugaison, il en est de même pour toutes les valeurs de (a,b) . Ainsi Φ est injectif ; la démonstration est analogue pour Ψ .

Enfin, on vérifie que Φ et Ψ sont biholomorphes. ∎

Remarque : Cette proposition généralise ce qu'on a vu en (2.2) : il existe une représentation conforme de $\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$ sur $\mathbb{C}$, définie par $\tau \mapsto j(\tau)$, qui est prolongée par : $\infty \mapsto \infty$ en une bijection biholomorphe de $\widehat{\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}}$ sur $\mathbb{P}$.

.../...

5.4. COURBES MODULAIRES.

5.4.1. *THEOREME.* ($N \geq 1$) Sur $\overline{\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}}$ (resp. $\overline{\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}}$) existe une structure de courbe algébrique non singulière définie sur $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ (resp. sur $\mathbb{Q}$) et "compatible" avec la notion de triplet (resp. de paire).

Cette courbe algébrique $X(N)(\mathbb{C})$ (resp. $X_0(N)(\mathbb{C})$) est appelée une courbe modulaire.

La 2e assertion signifie : si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors la classe de K-isomorphisme de (E,C) (resp. de (E,P,Q)) contient un couple (resp. un triplet) défini sur K si et seulement si son image par ψ (resp. par Φ) est dans K^M.

Démontrons d'abord un lemme :

5.4.2. Soit Ω un corps algébriquement clos, contenant K, de degré de transcendance infini sur K (par exemple, $\Omega = \mathbb{C}$ si $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}(\zeta_N)$).

LEMME. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_r$ des séries formelles à coefficients dans K, et I l'idéal des polynômes F de $\Omega[X_1, X_2, \ldots, X_r]$ tels que $F(f_1, f_2, \ldots, f_r) = 0$. Alors I a un système générateur dans $K[X_1, X_2, \ldots, X_r]$.

▪ Soit $\{c_i\}_i$ une base de Ω sur K ; alors $F = \sum_i c_i F_i$ où $F_i \in K[X_1, X_2, \ldots, X_r]$ et $F_i(f_1, f_2, \ldots, f_r) = 0$ pour tout i. Il suffit donc de considérer les composantes d'un système générateur de I dans $\Omega[X_1, X_2, \ldots, X_r]$ pour obtenir un système générateur de I dans $K[X_1, X_2, \ldots, X_r]$. ▪

5.4.3. Démonstration du théorème : ▪ Comme j et $f^{(i)}_{(a,b)}$ (resp. j et $g^{(i)}_k$) sont développables en série entière de $q^{1/N}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ (resp. dans $\mathbb{Q}$), le plongement dans un espace projectif, joint au lemme (5.4.2) ci-dessus, montre la 1ère assertion.

Si (E,C) (resp. (E,P,Q)) est défini sur K, alors $\psi((E,C))$

.../...

(resp. $\Phi(E,P,Q)$) est dans K^m . Montrons la réciproque pour ψ (la démonstration pour Φ est analogue). Supposons que $\psi((E,C)) \in K^M$, et soit σ un K - automorphisme de $\mathbb{C}$. Alors $\psi((E,C))^\sigma = \psi((E,C))$; or ψ est défini sur K , comme j et les $g_k^{(i)}$, donc $\psi((E,C))^\sigma = \psi((E,C)^\sigma)$. L'injectivité de ψ prouve alors que (E,C) et $(E,C)^\sigma$ sont isomorphes sur $\mathbb{C}$. Notons φ_σ ce $\mathbb{C}$-isomorphisme de E sur E^σ tel que $\varphi_\sigma(C) = \sigma(C)$. Montrons que l'on peut supposer E , puis C , définis sur K .

Pour E : par hypothèse, $j(E) \in K$. Donc il existe une courbe E' définie sur K telle que $j(E) = j(E')$; soit ψ_1 le $\mathbb{C}$-isomorphisme qui existe alors de E sur E' , et $C' = \psi_1(C)$. Ainsi, quitte à remplacer (E,C) et $(E^\sigma,\sigma(C))$ par (E',C') et $(E',\sigma(C'))$, on peut supposer E défini sur K et $\varphi_\sigma \in \mathrm{Aut}(E)$.

Pour C , c'est une conséquence du lemme (5.4.4) ci-dessous. Enfin, $X(N)$ (resp. $X_o(N)$) étant muni d'une structure de groupe, si un point était singulier, tous les points le seraient, ce qui est impossible. ∎

5.4.4. *LEMME.* (Serre) Soit K un corps de caractéristique quelconque. Tout élément de $X(N)(K)$ (resp. de $X_o(N)(K)$) possède un représentant (E,P,Q) (resp. (E,C)) défini sur K .

Montrons le lemme pour $X_o(N)$.

∎ Si $j \neq 0$, 12^3 , $\mathrm{Aut}(E) \simeq \mu_2$, donc $\varphi_\sigma = \pm 1$, et $\sigma(C) = \pm C = C$.

Si $j = 0$ (resp. 12^3) , $\mathrm{Aut}(E) \simeq \mu_{2i}$, où $i = 3$ (resp. $i = 2$) . Montrons que $\varphi : \sigma \mapsto \varphi_\sigma$ définit, par passage au quotient, un 1-cocycle de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ à coefficients dans $\mathrm{Aut}(E)/\mathrm{Aut}((E,C))$: en effet, $\varphi_{\rho_\sigma}(C) = \rho_\sigma(C) = (\rho\varphi_\sigma)(\rho C) = (\rho\varphi_\sigma)(\varphi_\rho(C))$ donc $\varphi_{\rho_\sigma}^{-1}(\rho\varphi_\sigma)\varphi_\rho \in \mathrm{Aut}((E,C))$. Or $\mathrm{Aut}(E) \simeq \mu_{2i}$, et $\mathrm{Aut}((E,C))$ contient μ_2 . Donc ou bien $\mathrm{Aut}((E,C)) = \mathrm{Aut}(E)$ et C est invariant par tout σ de $\mathrm{Aut}(E)$, ou bien $\mathrm{Aut}((E,C)) \simeq \mu_2$, et alors φ se remonte en un 1-cocycle de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ à coefficients dans $\mathrm{Aut}(E)$ grâce à la surjection : $H^1(G,\mu_{2i}) \to H^1(G,\mu_{2i}/\mu_2) \to 0$ qui est en réalité la surjection canonique : $K^*/K^{*2i} \to K^*/K^{*i} \to 1$. Mais d'après (1.3),

$H^1(G,Aut(E))$ classifie les courbes elliptiques sur K, K-isomorphes à E, à K-isomorphisme près. Donc il existe une courbe elliptique E' sur K, et un K-isomorphisme de E sur E' tel que $\varphi_\sigma = \sigma(f)^{-1}f$. Alors le couple $(E',f(C))$ est K-isomorphe à (E,C) et défini sur K, puisque $\sigma(f(C)) = \sigma(f)(\sigma(C)) = \sigma(f)\varphi_\sigma(C) = f(C)$. ∎

5.4.5. La courbe modulaire $X_1(N)$. Notons $\Gamma_1(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod N\}$. La surface de Riemann $\overline{\Gamma}_1(N)\backslash\mathcal{H}$, notée $Y_1(N)$, classifie les classes de $\mathbb{C}$-isomorphisme de couples $(E,\pm P)$, où E est une courbe elliptique sur $\mathbb{C}$, et P un point d'ordre N de E. La compactifiée $X_1(N) = \widehat{\overline{\Gamma}_1(N)\backslash\mathcal{H}}$ de $Y_1(N)$ peut être munie d'une structure de courbe algébrique non singulière définie sur $\mathbb{Q}$, et "compatible" avec la notion de couple (E,P).

Ces propriétés se démontrent de manière analogue aux cas de $X(N)$ et de $X_0(N)$. Correspondant aux inclusions : $\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset \Gamma$, nous avons les revêtements :

$$\hat{\mathcal{H}} \longrightarrow X(N) \longrightarrow X_1(N) \longrightarrow X_0(N) \longrightarrow \widehat{\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) .$$

5.4.6. Interprétation des pointes. Nous avons vu en (2.5.3) que les courbes de Tate $E(q) = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ (pour $|q| < 1$) permettent d'étudier la pointe ∞ de $\widehat{\overline{\Gamma}\backslash\mathcal{H}}$, en faisant tendre q vers 0.

De même, les courbes de Tate permettent d'étudier les pointes de $X_0(N) = \widehat{\overline{\Gamma}_0(N)\backslash\mathcal{H}}$ et de $X_1(N) = \widehat{\overline{\Gamma}_1(N)\backslash\mathcal{H}}$. Nous supposons maintenant N premier pour simplifier cette étude.

Fixons dans $\mathbb{C}$ une racine primitive $N^{\text{ème}}$ de l'unité, notée ζ, et une racine $N^{\text{ème}}$ de q, notée $q^{1/N}$. Les N^2 points d'ordre N de $E(q) = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ sont alors les images (mod. $q^{\mathbb{Z}}$) des points $\zeta^a q^{b/N}$, pour $(a,b) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$; et les $(N+1)$ sous-groupes cycliques d'ordre N de $E(q)$ sont les groupes $\mu_N = \langle\zeta\rangle$ et $\langle\zeta^a q^{1/N}\rangle/q^{\mathbb{Z}}$, pour $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Lorsque q tend vers 0, la courbe de Tate $E(q)$ "tend vers" la cubique dégénérée d'équation $Y^2 - XY = X^3 - h_2X - h_3$ (cf.2.6.3) ;

cette cubique a seulement N points d'ordre N, correspondant aux "limites" des points ζ^a $(a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, et un sous-groupe d'ordre N, correspondant à la "limite" de μ_N : ceci permet d'étudier la pointe ∞ de $X_o(N)$, et les pointes de $X_1(N)$ dont l'image dans le revêtement $X_o(N) \longrightarrow X_1(N)$ est la pointe ∞.

En faisant agir l'involution W_N, qui sera définie en (II.3.2), et qui transforme ∞ en 0 sur $X_o(N)$, on est amené à étudier : la courbe de Tate $E(q^N)$, le sous-groupe d'ordre N : $\langle q \rangle / q^{N\mathbb{Z}}$, et les N points d'ordre N de la forme : $q^a \pmod{q^{N\mathbb{Z}}}$.