

# COURS DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD MALGRANGE

## Chapitre III Problèmes d'équivalence

*Cours de l'institut Fourier*, tome 8 (1971-1972), p. 42-51

[http://www.numdam.org/item?id=CIF\\_1971-1972\\_\\_8\\_\\_42\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CIF_1971-1972__8__42_0)

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CHAPITRE III

### PROBLEMES D'EQUIVALENCE

#### 8. GENERALITES.

Soit  $Y$  une variété de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\dim Y = \dim X = n$ ; soit  $Q^{k,k} = Q_{X,Y}^k$  l'ensemble des jets d'ordre  $k$  inversibles d'applications  $X \rightarrow Y$ ; nous utiliserons dans cette nouvelle situation les mêmes notions que dans le cas  $X = Y$ , sans expliciter les définitions. Soient  $R^k$  une équation de Lie formellement intégrable sur  $X$ , avec  $k \geq 1$ ,  $P^k \subset Q^k$  sa forme finie, et soit  $\underline{P}^{k,k}$  une sous-variété de  $Q^{k,k}$ . Posons  $P^k(.,a) = \{F \in P^k \mid \text{but } F = a\}$ ,  $a \in X$  et définissons de même  $P^k(.,b)$ ,  $b \in Y$ . La définition suivante est classique.

#### Définition (8.1).

Nous dirons que  $\underline{P}^{k,k}$  est une  $P^k$ -structure (ou une  $\tilde{R}^k$ -structure) si les conditions suivantes sont vérifiées

- i) Sur  $\underline{P}^{k,k}$ , les projections "source" et "but" sont des submersions.
- ii)  $P^k$  opère principalement sur  $\underline{P}^{k,k}$ , au sens suivant : soit  $F \in \underline{P}^{k,k}$ , de source  $a$ , et de but  $b$ ; alors un voisinage de  $F$  dans  $\underline{P}^{k,k}(.,b)$  est formé par l'ensemble des  $FG$ ,  $G \in P^k(.,a)$ ,  $G$  voisin de  $I_k(a)$ .

La première condition équivaut à ceci : par tout  $F \in \underline{P}^{k,k}$  passe un germe de section étale de  $\underline{P}^{k,k}$ ; en fait, parmi les  $F_1 \in J^1(\underline{P}^{k,k})$ , de projection  $F^\circ$ , l'ensemble de ceux qui sont inversibles forme un ouvert dense.

Cette condition étant supposée vérifiée, la seconde équivaut à ceci : soit  $P^{k,k} = \{F \in Q_{Y,X}^k \mid F^{-1} \in \underline{P}^{k,k}\}$ ; alors, pour tout  $F \in P^{k,k}$  de source  $b$  et de but  $a$ , on a  $V(P^{k,k})(F) = \tilde{R}^k(a)F$ .

En considérant  $Q^{k,k}$  comme un ensemble de jets de sections du fibré trivial  $XY \rightarrow X$ , on interprète  $\underline{P}^{k,k}$  comme une équation différentielle d'ordre

$k$  dans ce fibré qui est l'analogue d'une équation linéaire avec second membre,  $P^k$  étant l'analogue d'une équation homogène. Donnons quelques mots d'explication, sans entrer dans des définitions "en forme" ; une telle équation intervient lorsqu'on cherche à comparer deux "structures infinitésimales"  $\sigma$  sur  $X$  et  $\sigma'$  sur  $Y$  (par exemple deux tenseurs, deux opérateurs différentiels, etc... ; cf l'exemple (4.2)) :  $R^k$  (resp  $P^k$ ) est alors l'équation des automorphismes infinitésimaux (resp des automorphismes) de  $\sigma$ , et  $P^k$  l'équation des difféomorphismes  $X \rightarrow Y$  qui transforment  $\sigma$  en  $\sigma'$  ; trouver des germes de solutions de  $P^k$  revient à montrer l'équivalence locale  $\sigma$  et  $\sigma'$  ; si  $X = Y$ , trouver une solution inversible de  $P^k$  revient à montrer l'équivalence globale de  $\sigma$  et  $\sigma'$  (mais nous n'aborderons pas ce problème ici).

Soit  $F \in P^k$ , de source  $a$ , et soit  $G \in \tilde{P}_a^k$  ; avec  $G(a) = F$  ; l'application  $\xi \mapsto G\xi$  ( $\xi \in R^k(a)$ ,  $\xi = v^{-1}\zeta$ ) permet, en raisonnant comme en (6.14) et (6.15), de définir un isomorphisme du complexe (6.12) <sub>$k+\ell$</sub>  ( $\ell \geq 0$ ) sur le complexe de  $\delta$ -cohomologie de  $P^k$  en  $F$ . D'autre part, on a le résultat suivant

Proposition (8.2).

Soit  $F \in P^k$  ; les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) Il existe  $F_1 \in (P^k)^{(1)}$ , avec  $\pi_k F_1 = F$  ;
- ii) Pour un (ou, pour tout)  $F_2 \in \tilde{J}^1(P^k)$ , avec  $\pi_1 F_2 = F$ , on a  $p_1(\hat{\theta})F_2 \in C^{k,1}$ .

Supposons qu'il existe un  $F_2 \in \tilde{J}^1(P^k)$ , qui vérifie ii) ; on a en fait  $p_1(\hat{\theta})F_2 \in \hat{C}^{k,1}$  ; d'après (7.10), il existe  $G \in \tilde{J}_o^1(P^k)(a)$ , avec  $p^1(\hat{\theta})F_2 = p^1(\hat{\theta})G$  ; on a alors  $G^{-1}F_2 \in \tilde{J}^1(P^k)$  et  $p_1(\hat{\theta})(G^{-1}F_2) = 0$ , donc par (7.5),  $G^{-1}F_2 \in \lambda^1 Q^{k+1} \cap \tilde{J}^1(P^k)$  et par conséquent  $(\lambda^1)^{-1}G^{-1}F_2 \in (P^k)^{(1)}$ . L'implication i)  $\Rightarrow$  ii) se démontre en renversant le calcul.

De là, en raisonnant comme en (6.16), on déduit le théorème suivant :

Théorème (8.3) ("2e théorème fondamental").

Supposons que  $R^k$  soit 2-acyclique et que, en tout point  $F \in P^k$ , la condition d'intégrabilité (8.2.ii) soit satisfaite. Alors  $P^k$  est formellement intégrable.

Dans le cas analytique (i.e. si  $X, Y, P^k$  et  $P'^k$  sont analytiques), on en déduit, par le théorème de Cartan-Kähler-Kuranishi l'existence, pour tout  $F \in P'^k$ , d'une solution  $f$  de  $P'^k$  au voisinage de  $a = \text{source } F$  vérifiant  $j^k f(a) = F$  (voir, par exemple Kuranishi [1] ou l'appendice du présent article).

Définition (8.4).

Nous dirons que  $P'^k$  est intégrable s'il est formellement intégrable et si, pour tout  $F \in P'^k$ , il existe  $f \in \text{Diff}(X, Y)$  (= le faisceau des germes de difféomorphismes de  $X$  dans  $Y$ ) vérifiant  $j^k f \in \tilde{P}'^k$  et  $j^k f(a) = F$  ( $a = \text{source } F$ ).

Etudier l'intégrabilité de  $P'^k$  revient à étudier la 1-cohomologie du complexe (7.9) ; pour le voir, il est commode de travailler dans les germes en un point fixé (ce qui revient à étudier les problèmes d'équivalence locaux "avec points marqués"). Le germe de variété  $(P'^k, F)$ , avec  $a = \text{source } F$  sera appelé un "germe de  $P^k$ -structure en  $a$  ; deux tels germes  $(P'^k, F)$  et  $(P''^k, G)$ , avec  $P''^k \subset Q_{X, Z}^k$  ( $Z$  une variété de dimension  $n$ ) sont dits "équivalents" si la condition suivante est satisfaite : notons  $b$  (resp  $c$ ) le but de  $F$  (resp  $G$ ) ; alors il existe un germe de difféomorphisme  $\varphi : (Y, b) \rightarrow (Z, c)$  vérifiant  $j^k \varphi(P'^k, F) = (P''^k, G)$ . Soit  $H^1(\underline{P}_a^k)$  l'ensemble des classes d'équivalences de germes en  $a$  de  $P^k$ -structures formellement intégrables ; pour qu'un germe  $(P'^k, F)$  soit équivalent à  $(P^k, I_k(a))$  il faut et il suffit que  $P'^k$  soit "intégrable en  $F$ ", i.e. qu'il existe  $f \in \text{Diff}(X, Y)_a$ , avec  $j^k f(a) = F$ ,  $j^k f \in \tilde{P}'^k$ .

Soit  $\tilde{P}_{a,0}^k$  l'ensemble des  $F \in \tilde{P}_a^k$ , avec  $F(a) = I_k(a)$  ; c'est un groupe qui, d'après (7.14) et (7.15) opère à droite dans l'ensemble  $\hat{Z}_a^{k,1}$  des  $u \in \hat{C}_a^{k,1}$  vérifiant  $\hat{J}_1 u = 0$  ; posons  $\hat{H}^1(\underline{P}_a^k) = \hat{Z}_a^{k,1} / \tilde{P}_{a,0}^k$ .

Supposons  $R^k$  2-acyclique, et soit  $(P'^k, F)$  un germe de  $P^k$ -structure formellement intégrable (ou, ce qui revient au même, vérifiant (8.2.ii) en tout point  $G$  voisin de  $F$ ). Soit  $H \in \tilde{P}_a^k$ , avec  $H(a) = F$ , et soit  $u$  la classe de  $\hat{J}H$  dans  $\hat{H}^1(\underline{P}_a^k)$  ; cette classe ne dépend pas de  $H$  choisi ; en effet, si l'on en prend un autre, soit  $H'$ , on aura  $H' = HG$ , avec  $G \in \tilde{P}_{a,0}^k$  ; d'où, par (7.13)  $\hat{J}H' = (\hat{J}H)^G$  ; si l'on prend  $\varphi \in \text{Diff}(Y, Z)_b$ ,

b = but  $F$ , de  $\hat{\mathcal{D}}(j^k \varphi.H) = \hat{\mathcal{D}}H$ , on déduit que l'image du germe  $j^k \varphi(P^k, F)$  dans  $\hat{H}^1(\underline{P}_a^k)$  est la même que celle de  $(P^k, F)$ . On obtient ainsi une application  $H^1(\underline{P}_a^k) \rightarrow \hat{H}^1(\underline{P}_a^k)$ , dont on voit qu'elle est injective en renversant les calculs précédents ; la proposition (7.6) montre qu'elle est surjective. En résumé, on a le théorème suivant :

Théorème (8.5).

Si  $R^k$  est 2-acyclique, l'application précédente  $H^1(\underline{P}_a^k) \rightarrow \hat{H}^1(\underline{P}_a^k)$  est un isomorphisme.

Si l'on se place dans la catégorie des variétés et morphismes analytiques, ou formels, ce résultat, joint au théorème (8.3) montre qu'on a  $\hat{H}^1(\underline{P}_a^k) = 0$ . Ce résultat aurait d'ailleurs pu être obtenu directement, par une étude de l'équation  $\hat{\mathcal{D}}F = u$  analogue à celle faite par Goldschmidt [1] dans le cas linéaire.

## 9. GENERALISATION DU THEOREME DE NEWLANDER-NIRENBERG.

Nous nous plaçons ici dans la "catégorie  $C^\infty$ " ; l'équation  $R^k$  sera dite analytique si elle provient d'une équation analytique sur  $X$  (supposé analytique-réel) par "oubli de la structure analytique".

Théorème (9.1).

Soit  $R^k$  une équation de Lie 2-acyclique, analytique, et elliptique. En tout point  $a \in X$ , on a  $H^1(\underline{P}_a^k) = 0$ .

Autrement dit : dans les hypothèses précédentes, soit  $P^k \subset Q^k(X, Y)$  une  $P^k$ -structure de classe  $C^\infty$ , vérifiant la condition d'intégrabilité (8.2.ii) ; alors  $P^k$  est intégrable. Ce résultat avait été conjecturé par Spencer [1].

En vertu du théorème (8.5), il suffit pour cela de démontrer le résultat suivant : soit  $u \in \hat{C}_a^{k,1}$ , vérifiant  $\hat{\mathcal{D}}_1 u = 0$  ; il existe  $F \in \hat{P}_{a,0}^k$  vérifiant  $\hat{\mathcal{D}}F = u$ . Nous allons démontrer ce résultat par une généralisation de la méthode employée dans Malgrange [2] pour démontrer le théorème de Newlander-Nirenberg [1] (qui en est le cas particulier suivant :  $X = \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ ,

$k = 1$  ,  $P^1$  est l'équation des germes d'automorphismes holomorphes de  $\mathbb{C}^n$  , considérés comme germes de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^{2n}$  , et  $R^1$  est donc l'équation des automorphismes infinitésimaux de  $\mathbb{C}^n$  , en tant que variété analytique-complexe. Alors,  $P^1$  est une structure presque-complexe et (8.2.ii) sa condition d'intégrabilité).

Le théorème étant local, on peut supposer que  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  , et qu'on a  $a = 0$  ; on peut aussi, en restreignant au besoin  $X$  , choisir une trivialisations analytique  $X \times L \simeq \tilde{R}^k$  (resp  $X \times M \simeq C^{k,1}$  , resp  $X \times N \simeq C^{k,2}$ ) du fibré vectoriel  $R^k$  (resp  $C^{k,1}$  , resp  $C^{k,2}$  , voir remarque (7.11)) sur  $X$  , où  $L$  ,  $M$  et  $N$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie ; dans la suite, nous identifierons  $\tilde{R}^k$  etc... à leurs trivialisations, on peut alors choisir des adjoints à coefficients analytiques des opérateurs différentiels  $\hat{D} : \tilde{R}^k \rightarrow \underline{C}^{k,1}$  et  $\underline{C}^{k,1} \rightarrow \underline{C}^{k,2}$  , adjoints qui sont respectivement un  $(M,L)$  et un  $(N,M)$  opérateur différentiel linéaire sur  $X$  d'ordre 1 , et seront tous deux notés  $D^*$  .

Soit  $z = (z_1, \dots, z_\ell)$  un système linéaire de coordonnées dans  $L$  ; soit d'autre part  $\alpha$  la projection "source" :  $P^k \rightarrow X$  ; comme  $\alpha$  est une submersion, et compte-tenu des isomorphismes  $X \times L \simeq \tilde{R}^k \simeq V(P^k)(I_k)$  , on peut, pour tout ouvert  $U \subset\subset X$  , avec  $0 \in U$  , trouver un ouvert  $W \subset L$  , avec  $0 \in W$  et un isomorphisme analytique de fibrés sur  $U$  ,  $\varphi : U \times W \rightarrow$  (un voisinage de  $I_k$  dans)  $\alpha^{-1}(U)$  possédant les propriétés suivantes :

1)  $\varphi(U \times \{0\}) = I_k$  ;

2) pour tout  $x \in U$  , l'isomorphisme  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, 0) : L \rightarrow V(P^k)(I_k(x))$  coïncide avec l'isomorphisme ci-dessus.

Les sections de  $P^k$  au-dessus de  $U$  (et assez voisines de  $I_k$ ) s'identifient donc aux applications  $x \mapsto Z(x)$  de  $U$  dans  $W$  , ceci dans le cas analytique comme dans le cas  $C^\infty$  ; en restreignant au besoin  $W$  , on peut supposer que les sections qui vérifient, pour tout  $x \in U$  et pour  $i = 1, \dots, n$  :  $\frac{\partial Z}{\partial x_i}(x) \in W$  sont étales (puisque toute section de  $P^k$  ,  $C^1$ -voisine de  $I_k$  est étale).

Cela posé, revenons à notre problème ; comme l'équation  $\hat{A}F = u$ ,  $F(0) = I_k(0)$  admet une solution formelle en 0, on peut par une transformation préliminaire se ramener au cas où  $j^1 u(0) = 0$  (on pourrait même supposer que  $u$  s'annule en 0 à un ordre arbitrairement grand, voire infini, en 0, mais peu importe). En restreignant au besoin  $X$ ,  $U$ , etc..., on peut supposer que  $u$  est défini sur  $X$  entier et  $y$  vérifie  $\hat{A}_1 u = 0$ ; enfin, en remplaçant  $F$  par  $F^{-1}$ , on remplace l'équation  $\hat{A}F = u$  par  $u^F = 0$ . Nous allons démontrer d'abord le résultat suivant, en apparence plus faible :

Proposition (9.2).

Si  $U$  est assez petit, il existe  $F \in \Gamma(U, \tilde{P}^k)$ , avec  $j^1 F(0) = j^1 I_k(0)$ , tel qu'on ait  $D^*(u^F) = 0$ .

Dans notre système de coordonnées, l'application  $F \mapsto u^F$  s'écrit

$$Z \mapsto \left\{ x \mapsto \Phi(x, Z(x), \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x)) \right\},$$

où  $\Phi$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $U \times W^{n+1}$ , à valeurs dans  $M$ , la condition  $j^1 F(0) = j^1 I_k(0)$  s'écrit  $Z(0) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0) = 0$ . Posons

$$(9.3) \quad D^* \Phi(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_i}) = \sum_{i \leq j} A_{ij}(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k}) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + B(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k}).$$

Lemme (9.4).

L'opérateur différentiel (linéaire, de  $L$  dans  $L$ )

$$Z \mapsto \sum_{i \leq j} A_{ij}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j}$$

est elliptique.

Considérons l'opérateur linéarisé de  $F \mapsto D^*(u^F)$  le long de  $I_k$ , i.e. prenons une famille à un paramètre  $F_t$  avec  $F_0 = I_k$ ,  $\frac{d}{dt} F_t|_{t=0} = \xi \in \Gamma(U, \tilde{R}^k)$  et considérons l'application  $\xi \mapsto \frac{d}{dt} D^*(u^{F_t})|_{t=0}$ ; on trouve immédiatement que cette application vaut  $\xi \mapsto D^* \hat{D} \xi + D^* \theta(\xi) u$ ; comme  $j^1 u(0) = 0$ , son symbole en  $x = 0$  coïncide avec celui de  $D^* \hat{D}$ , qui est elliptique puisque  $\hat{D}$  est elliptique (cf Quillen [1] ou Goldschmidt [1]).

D'autre part, en calculant cet opérateur linéarisé en coordonnées, à partir de (9.3), on trouve que son symbole en  $x = 0$  coïncide avec celui de (9.4). D'où le lemme.

La démonstration de la proposition (9.2) est alors une application usuelle de la théorie des équations elliptiques ; il suffit même de recopier, avec des modifications mineures, un raisonnement de Agmon-Douglis-Nirenberg ([1], Théorème 12.6). Pour la commodité du lecteur, nous allons détailler un peu.

Soit  $s \in ]0,1[$ , fixé une fois pour toutes. Soit  $B$  une boule fermée de  $\mathbb{R}^n$  (pour la norme euclidienne, notée  $|\cdot|$ ) ; pour  $k \in \mathbb{N}$ , désignons par  $C^{s+k}(B)$  l'ensemble des fonctions sur  $B$ , à valeurs réelles, continues ainsi que leurs dérivées d'ordre  $\leq k$ , les dérivées d'ordre  $k$  vérifiant une condition de Hölder d'ordre  $s$  ; muni de la norme

$$\|f\|_{s+k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in B} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x, y \in B \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^s},$$

cet espace est complet. On trouve de même l'espace  $C^{s+k}(B) \otimes L$ , qu'on notera  $C^{s+k}(B, L)$  ; dans la suite, nous supposons  $B$  centrée en 0, et nous désignerons par  $C_o^{s+k}(B, L)$  le sous-espace du précédent formé des  $Z$  vérifiant  $Z(0) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0) = 0$ .

Lemme (9.5).

L'opérateur différentiel (9.4) est surjectif direct (i.e. admet un inverse à droite linéaire continu) de  $C_o^{s+2}(B, L)$  dans  $C^s(B, L)$ .

Soit  $\varphi$  une fonction  $\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , à support compact dans  $\overset{\circ}{2}B$ , avec  $\varphi = 1$  au voisinage de  $B$ . Etant donné  $f \in C^s(B, L)$ , soit  $\bar{f}$  le prolongement de  $f$  défini, pour  $x \notin B$ , par  $\bar{f}(x) = \varphi(x) f(x \frac{r^2}{|x|^2})$ ,  $r =$  rayon de  $B$  ; il est facile de vérifier que l'application  $f \rightarrow \bar{f}$  est continue de  $C^s(B, L)$  dans  $C^s(2B, L)$  ; de plus,  $\bar{f}$  est évidemment à support compact dans  $\overset{\circ}{2}B$ .

Soit alors  $E$  une solution élémentaire à droite de (9.4), i.e. une



distribution sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\text{Hom}(L,L)$ , vérifiant

$$\sum A_{ij}(0,0,0) \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} = \delta \cdot \text{id} ,$$

$\delta$  la masse +1 en 0, et soit  $Z$  la restriction de  $E*\bar{f}$  à  $B$ . Si l'on choisit convenablement  $E$ , il est connu qu'on a, avec  $K > 0$  convenable :  $Z \in C^{2+s}(B,L)$  et  $\|Z\|_{2+s} \leq K\|\bar{f}\|_s$  (voir Douglis-Nirenberg [1], démonstration du théorème 2; en fait, a posteriori, le choix de  $E$  est inutile, puisque deux telles solutions élémentaires diffèrent par une fonction  $C^\infty$ , et même analytique, mais peu importe ici); comme on a

$$\sum A_{ij}(0,0,0) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (E*\bar{f}) = \bar{f} ,$$

$Z$  est un relèvement linéaire continu de (9.4) de  $C^{s+2}(B,L)$  dans  $C^s(B,L)$ ; pour ramener  $Z$  dans  $C_0^{s+2}(B,L)$ , il suffit alors de le remplacer par  $Z - Z(0) - \sum \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0)x_i$ , puisque les polynômes de degré 1 sont annulés par (7.4); d'où le lemme.

Fixons  $B$  une fois pour toutes, avec  $B \subset U$ , et soit  $\mathcal{B}$  une boule de  $C^{s+2}(B,L)$ , centrée en 0, et telle qu'on ait, pour  $Z \in \mathcal{B}$ ,  $x \in B$  :  $Z(x) \in W_1$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial x_i} \in W_1$ , avec  $W_1 \subset\subset W$ . Considérons l'application

$$\Psi : [0,1] \times \mathcal{B} \rightarrow C^s(B,L)$$

définie par

$$\Psi(t,Z)(x) = \sum A_{ij}(tx, t^2 Z, t \frac{\partial Z}{\partial x_k}) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + B(tx, t^2 Z, t \frac{\partial Z}{\partial x_k}) .$$

Cette application possède les propriétés suivantes :

1) Elle est de classe  $C^1$  (et même  $C^\infty$ ) : ceci est un exercice de calcul différentiel banachique qui peut être laissé au lecteur.

2) On a  $\Psi(0,0) = 0$ . En effet, on a par définition de  $\Phi$  :  $\Phi(x,0,0) = u(x)$ , donc, puisque  $j^1 u(0) = 0$ ,  $\Phi(0,0,0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0,0,0) = 0$ .

D'autre part, si l'on pose  $D^* = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0$  (les  $a_i$  étant des fonctions analytiques à valeurs dans  $\text{Hom}(M,L)$ ), on a :

$$B(x,Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k}) = \sum_i a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x,Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k}) + \sum_i a_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k}) \frac{\partial Z}{\partial x_i} + a_0 \Phi(x,Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k})$$

d'où

$$B(0,0,0) = \sum_i a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0,0,0) + a_0 \Phi(0,0,0) = 0 .$$

3) La dérivée partielle  $\frac{\partial \Psi}{\partial Z}(0,0)$  est surjective directe, d'après (9.5).

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe, pour  $t$  voisin de 0, un  $Z_t \in \mathfrak{B}$  vérifiant  $\Psi(t, Z_t) = 0$ . Alors la fonction  $Z$  définie au voisinage de 0 par  $Z(x) = t^2 Z_t(\frac{x}{t})$  satisfait (7.3), de plus, elle vérifie bien  $Z(0) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0) = 0$ .

Reste à voir que  $Z$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0 ; cela se voit par un raisonnement classique sur les équations quasi-linéaires que nous allons répéter ; posons  $a_{ij}(x) = A_{ij}(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x})$ ,  $b(x) = B(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x})$  ; alors  $Z$  vérifie l'équation linéaire

$$\sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + b(x) = 0$$

comme  $Z$  est de classe  $C^{s+2}$  dans un voisinage  $U_1$  de  $a$ , les  $a_{ij}$  et  $b$  y sont de classe  $C^{s+1}$  ; en particulier notre équation, étant elliptique en 0, est elliptique dans un voisinage  $U_2$  de 0 ; on peut supposer  $U_1 = U_2$  ; appliquant Douglis-Nirenberg [1], théorème 4, on trouve que  $Z$  est de classe  $C^{s+4}$  dans  $U_1$ , donc  $a_{ij}$  et  $b$  de classe  $C^{s+3}$ , et ainsi de suite. Ceci achève la démonstration de la proposition (9.2).

Pour démontrer le théorème (9.1), posons maintenant  $v = u^F$  ; on a  $v(0) = 0$  puisque  $u(0) = 0$ ,  $j^1 F(0) = j^1 I_k(0)$  ; d'autre part, on a  $D^*v = 0$  d'après (9.2) et  $\hat{D}_1 v = \hat{D}v - \frac{1}{2}[v, v] = 0$  d'après (6.16) ; par suite, on a

$$(9.6) \quad \hat{D}D^*v + D^*\hat{D}v - \frac{1}{2}D^*[v, v] = 0.$$

Cette dernière équation est visiblement à coefficients analytiques en  $x, v, v'_i, v''_{ij}$  [elle est même polynomiale du second degré par rapport à  $(v, v'_i, v''_{ij})$ ]. Montrons que, au voisinage de 0,  $v$  est une solution elliptique de cette équation, i.e. que l'opérateur linéarisé de (9.6) le long de  $v$  est elliptique ; ce dernier s'écrit en effet :

$$w \rightarrow \hat{D}D^*w + D^*\hat{D}w - D^*[w, v].$$

Il suffit de vérifier l'ellipticité en 0 ; or, du fait qu'on a  $v(0) = 0$ , on voit facilement que cet opérateur a même symbole en 0 que  $w \rightarrow \hat{D}D^*w + D^*\hat{D}w$  ;

on sait par ailleurs (Quillen [1] ou Goldschmidt [1]) que ce dernier est elliptique ; d'où le résultat. Il est alors connu que  $v$  est analytique au voisinage de  $0$  (voir par exemple Friedman [1]) ; d'après (6.19) et (6.21), il existe  $G$ , germe de section analytique  $\tilde{P}_{a,0}^k$ , vérifiant  $v^G = u^FG = 0$ , d'où  $\hat{D}(G^{-1}F^{-1}) = u$ , ce qui démontre le théorème.

Remarque (9.7).

Si l'on cherche à démontrer le même résultat avec un minimum d'hypothèse de régularité sur  $u$ , la démonstration précédente doit être un peu modifiée, du fait que l'application  $F \rightarrow F^{-1}(u)$  ne possèdera pas de bonnes propriétés de différentiabilité dans les espaces  $C^{s+k}$  ; on obtiendra une meilleure équation en travaillant avec  $H = F^{-1}$  au lieu de  $F$  et en étudiant l'équation  $H^{-1}(D^*(u^F)) = H^{-1}(D^*)(u - \hat{D}H) = 0$  au lieu de  $D^*(u^F) = 0$  ; nous n'entrerons pas dans les détails (voir Malgrange [2], pour le cas des structures presque complexes).

Signalons pour terminer deux conséquences du théorème (9.1) que nous ne développerons pas :

1) La théorie des déformations des  $P^k$ -structures intégrables, lorsque  $R^k$  est une équation de Lie 2-acyclique, analytique et elliptique sur une variété compacte, notamment la construction de "l'espace de Kuranishi" des  $P^k$ -structures intégrables voisines d'une  $P^k$ -structure donnée. Nous renvoyons pour cela à Quê [1], où la question est traitée dans le cas transitif (le cas général est analogue).

2) L'existence de coordonnées analytiques pour une équation de Lie de classe  $C^\infty$  elliptique et formellement transitive, i.e.  $R^k \rightarrow T$  surjectif (d'où résulte que, dans le cas formellement transitif, le théorème (9.1) est vrai sans faire a priori d'hypothèse d'analyticité). Ce résultat s'obtient en combinant (9.1) et le "troisième théorème fondamental" de E. Cartan; voir Goldschmidt [3].