

P. CAZES

**Problème : analyse d'un tableau invariant
par permutation simultanée de ses lignes
et de ses colonnes**

Les cahiers de l'analyse des données, tome 2, n° 3 (1977),
p. 265-271

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1977__2_3_265_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**PROBLÈME : ANALYSE D'UN TABLEAU INVARIANT
 PAR PERMUTATION SIMULTANÉE
 DE SES LIGNES ET DE SES COLONNES
 [GROUPE]**

Solution par P. Cazes (1)

On considère ici des tableaux de correspondance k_{IJ} invariants pour un groupe Ω opérant sur I et J , en sorte que $\forall (i, j) \in I \times J$: $k_{IJ}(\omega(i), \omega(j)) = k_{IJ}(i, j)$, et l'on étudie les propriétés d'invariance qui en résultent pour les facteurs.

Cette étude qui a été suggérée par l'analyse du tableau issu des résultats d'un sondage sur les qualités de divers candidats à des élections présidentielles (cf § 1.5) est présentée sous la forme d'un problème (*) muni de sa solution détaillée.

1. Enoncé du problème

Dans tout ce problème, on appelle permutation d'un ensemble fini I (ou J etc) une application biunivoque de I sur lui-même ; l'ensemble des permutations de I est noté $I!$; une permutation σ est dite involutive si on a : $\sigma \circ \sigma =$ identité (i.e. si σ est son propre inverse) ; une permutation σ est dite d'ordre 3 si on a : $\sigma \circ \sigma \circ \sigma =$ identité ; plus généralement σ est dite d'ordre p si $\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \dots \circ \sigma}_p =$ identité.
 p fois

Enfin, une permutation particulière σ d'un ensemble I devra être donnée sous le format ci-dessous en précisant l'image par σ de chaque élément de I :

$$\sigma : \{A, B, C\} \rightarrow \{B, C, A\}$$

(i.e. σ est la permutation de l'ensemble à trois éléments $I = \{A, B, C\}$ telle que $\sigma(A) = B$, $\sigma(B) = C$, $\sigma(C) = A$)

1.1 Soit k_{IJ} un tableau de nombres positifs indicés par le produit des deux ensembles finis I et J (i.e. k_{IJ} est un tableau de correspondance sur $I \times J$). On dit que deux permutations ρ et σ de I et J respectivement :

$$\rho \in I! ; \sigma \in J! ,$$

forment un couple conjugué relativement à k_{IJ} si est satisfaite la condition suivante :

$$\forall i \in I , \forall j \in J : k(\rho(i), \sigma(j)) = k(i, j).$$

(*) Ce problème a été proposé aux étudiants du D.E.A. de statistique de l'Université Pierre et Marie Curie, à la session d'Octobre 1974.

(1) Maître-assistant I.S.U.P. - Laboratoire de Statistique - Université Pierre et Marie Curie Paris.

Soient (ρ, σ) et (ρ', σ') deux couples conjugués relativement à k_{IJ} : Trouver $\tau \in J!$ tel que $(\rho \circ \rho', \tau)$ soit un couple conjugué relativement à k_{IJ} .

1.2 Soit (ρ, σ) un couple conjugué relativement à k_{IJ} . Soit $(F_\alpha(i), G_\alpha(j), \lambda_\alpha)$ un couple de facteurs associés et λ_α la valeur propre correspondante. Montrer que la fonction $F_\alpha \circ \rho$ sur l'ensemble I est un facteur ; quel est le facteur associé ? Quelle est la valeur propre ?

1.3 Soit λ une valeur propre issue de l'analyse de la correspondance k_{IJ} ; on désigne par $R^I(\lambda)$ la partie de R^I , ensemble des fonctions sur I qui sont des facteurs relatifs à cette valeur propre, au sens suivant :

$$R^I(\lambda) = \{f^I \mid f^I \in R^I ; f^I \circ f_I^J \circ f_J^I = \lambda f^I\}$$

(il s'agit de facteurs f^I non normalisés, de variance quelconque).

Soit (ρ, σ) un couple de permutations involutives ($\rho \circ \rho = \text{id}, \sigma \circ \sigma = \text{id}$; cf supra) conjugué relativement à k_{IJ} . Existe-t-il pour certaines valeurs de ϵ , dans $R^I(\lambda)$ des facteurs f^I tels que :

$$\forall i \in I : f^I(\rho(i)) = \epsilon f^I(i) ;$$

pour quelles valeurs de ϵ peut-il en exister ? Ces facteurs particuliers (qu'on peut appeler facteurs propres pour (ρ, σ)) engendrent-ils $R^I(\lambda)$?

1.4 On reprend les hypothèses de la question 1.3 mais on considère maintenant un couple (ρ', σ') de permutations d'ordre 3 ($\rho' \circ \rho' \circ \rho' = \text{id}$;

$\sigma' \circ \sigma' \circ \sigma' = \text{id}$) conjugué relativement à k_{IJ} . Existe-t-il pour certaines valeurs γ , dans $R^I(\lambda)$ des facteurs f^I tels que :

$$\forall i \in I : f^I(\rho'(i)) = \gamma f^I(i) ;$$

pour quelles valeurs de γ peut-il en exister ? Ces facteurs particuliers engendrent-ils $R^I(\lambda)$?

1.5 On considère le tableau de correspondance k_{IJ} sur les deux ensembles suivants :

$$I = \{X, Y, Z\} ; J = \{CO, C1, C2, BO, B1, B2, SO, S1, S2\}$$

	Compétent			Brillant			Sympathique		
	CO	C1	C2	BO	B1	B2	SO	S1	S2
X	80	10	10	80	10	10	50	30	20
Y	30	40	30	30	20	50	30	35	35
Z	30	30	40	30	50	20	30	35	35

(Ce tableau est une schématisation des résultats d'un sondage relatif à trois candidats aux élections présidentielles françaises de Mai 1974). Montrer que ce tableau admet un couple de permutations conjuguées (ρ, σ) que l'on précisera.

1.6 Faire l'analyse du tableau k_{IJ} ci-dessus en recherchant les facteurs propres pour (ρ, σ) (cf 1.3 & 1.4). On précisera les facteurs F_α, G_α et les valeurs propres correspondantes, et on fera un graphique des deux ensembles I et J dans le plan rapporté aux axes 1 et 2.

2. Solution du problème

2.1 On a : $k(\rho(i), \sigma(j)) = k(i, j)$

$$k(\rho'(i), \sigma'(j)) = k(i, j)$$

donc : $k(\rho \circ \rho'(i), \sigma \circ \sigma'(j)) = k(\rho'(i), \sigma'(j)) = k(i, j)$;

$(\rho \circ \rho', \tau = \sigma \circ \sigma')$ est donc un couple conjugué relativement à k_{IJ} .

2.2 Posons $I' = \rho(I)$; $J' = \sigma(J)$

Le tableau $k_{I', J'}$, obtenu en effectuant respectivement les permutations ρ et σ sur I et J, étant identiques à k_{IJ} , puisque (ρ, σ) est conjugué par rapport à k_{IJ} , la transformation ρ laisse invariante les distances distributionnelles entre éléments de I, ainsi que les masses de ces éléments. Il en résulte que si F_α est un facteur issu de l'analyse des correspondances de k_{IJ} , il en est de même de $F_\alpha \circ \rho$, ces deux facteurs étant relatifs à la même valeur propre λ_α .

Notons que l'on aurait pu obtenir ce résultat directement à partir de l'équation des facteurs :

$$F_\alpha^I \circ f_I^J \circ f_J^I = \lambda_\alpha F_\alpha^I$$

la permutation ρ laissant invariante la matrice $c_I^I = f_I^J \circ f_J^I$, comme il est facile de s'en assurer.

Si G'_α désigne le facteur associé à $F_\alpha \circ \rho$, on a d'après la formule de transition, et en désignant par $k(j)$ le total de la colonne j du tableau k_{IJ} , total encore égal à $k(\sigma(j))$ puisque

$$k(j) = \sum\{k(i, j) | i \in I\} = \sum\{k(\rho(i), \sigma(j)) | i \in I\} = \sum\{k(i', \sigma(j)) | i' \in I'\} :$$

$$\begin{aligned} G'_\alpha(j) &= \sum\{F_\alpha(\rho(i)) k(i, j) / (k(j)\sqrt{\lambda_\alpha}) | i \in I\} \\ &= \sum\{F_\alpha(\rho(i)) k(\rho(i), \sigma(j)) / (k(\sigma(j))\sqrt{\lambda_\alpha}) | i \in I\} \\ &= \sum\{F_\alpha(i') k(i', \sigma(j)) / (k(\sigma(j))\sqrt{\lambda_\alpha}) | i' \in I'\} = G_\alpha(\sigma(j)). \end{aligned}$$

$G_\alpha \circ \sigma$ est donc le facteur associé à $F_\alpha \circ \rho$.

Remarque : On aurait pu donner directement les résultats précédents par application simultanée des deux formules de transition $F_\alpha^I = (1/\sqrt{\lambda_\alpha}) G_\alpha^J \circ f_J^I$; $G_\alpha^J = (1/\sqrt{\lambda_\alpha}) F_\alpha^I \circ f_I^J$, et en effectuant respectivement sur I et J les permutations ρ et σ , ces permutations simultanées laissant invariante les transitions f_I^I et f_J^J .

2.3 SI f^I est un facteur de k_{IJ} vérifiant :

$$\forall i \in I : f^I(\rho(i)) = \epsilon f^I(i) \tag{1}$$

on a : $f^I(\rho^2(i)) = \epsilon f^I(\rho(i)) = \epsilon^2 f^I(i)$

soit puisque ρ est involutive ($\rho^2 = \text{id}$) :

$$f^I(i) = \epsilon^2 f^I(i)$$

ce qui exige que ϵ soit égal à 1 ou à -1.

Nous allons montrer que l'espace $R^I(\lambda)$ des facteurs sur I de k_{IJ} relatif à la valeur propre λ peut être engendré par des facteurs vérifiant (1).

En effet, si φ^I est un élément de $R^I(\lambda)$, il en est de même d'après 2.2 de $(\varphi \circ \rho)^I$, et donc de $f_\epsilon^I = (\varphi \circ \rho)^I + \epsilon \varphi^I$ (où $\epsilon = \pm 1$), et il est immédiat de vérifier puisque $\rho^2 = \text{id}$, que f_ϵ^I satisfait (1). A tout facteur φ^I de $R^I(\lambda)$, on sait donc associer deux facteurs (dont l'un éventuellement identiquement nul) vérifiant (1) l'un avec $\epsilon = 1$, l'autre avec $\epsilon = -1$.

Posons :

$$S^I(\lambda) = \{\varphi^I \in R^I(\lambda) : (\varphi \circ \rho)^I = \varphi^I\}$$

et désignons par $T^I(\lambda)$ le supplémentaire orthogonal (pour la métrique du χ^2 induite dans R^I par k_{IJ}) de $S^I(\lambda)$ dans $R^I(\lambda)$. Il est facile de voir que si φ^I appartient à $T^I(\lambda)$, il en est de même de $(\varphi \circ \rho)^I$. Pour montrer que $R^I(\lambda)$ est engendré par des facteurs vérifiant (1), il suffit de montrer que $T^I(\lambda)$ est engendré par des facteurs vérifiant (1) avec $\epsilon = -1$, ce qui revient encore à montrer que les $\{f_{-\alpha}^I = (\varphi_\alpha \circ \rho)^I - \varphi_\alpha^I \mid \alpha \in A\}$ construits à partir d'une base $\{\varphi_\alpha^I \mid \alpha \in A\}$ de $T^I(\lambda)$ engendrent $T^I(\lambda)$, i.e. sont linéairement indépendants. En effet si l'on a une relation de la forme :

$$\sum \{c_\alpha f_{-\alpha}^I \mid \alpha \in A\} = 0$$

on a, compte tenu de la définition de $f_{-\alpha}^I$, et en posant :

$$\psi_\alpha^I = \sum \{c_\alpha \varphi_\alpha^I \mid \alpha \in A\}$$

qui est un élément de $T^I(\lambda)$:

$$\psi_\alpha^I = (\psi_\alpha \circ \rho)^I$$

ce qui entraîne que ψ_α^I appartient à $S^I(\lambda)$ et donc à $S^I(\lambda) \cap T^I(\lambda) = \{0\}$; ψ_α^I est donc nul. Il en résulte, puisque les $\{\varphi_\alpha^I \mid \alpha \in A\}$ forment une base de $T^I(\lambda)$ que : $\forall \alpha \in A, c_\alpha = 0$. Les fonctions $\{f_{-\alpha}^I \mid \alpha \in A\}$ qui vérifient (1) avec $\epsilon = -1$ sont donc linéairement indépendantes, et constituent une base de $T^I(\lambda)$, c.q.f.d.

2.4 Soit (ρ', σ') un couple de permutations d'ordre 3 conjugué relativement à k_{IJ} , et f^I un facteur appartenant à $R^I(\lambda)$ et tel que :

$$\forall i \in I : f^I(\rho'(i)) = \gamma f^I(i) \tag{2}$$

On a alors :

$$f^I(i) = f^I(\rho'^3(i)) = \gamma f^I(\rho'^2(i)) = \gamma^2 f^I(\rho'(i)) = \gamma^3 f^I(i)$$

ce qui implique que $\gamma^3 = 1$, soit $\gamma = 1$.

Si φ^I est un élément de $R^I(\lambda)$, $(\varphi \circ \rho')^I$ et $(\varphi \circ \rho'^2)^I$ sont encore des éléments de $R^I(\lambda)$, et donc

$$f^I = \varphi^I + (\varphi \circ \rho')^I + (\varphi \circ \rho'^2)^I \quad (3)$$

est encore un élément de $R^I(\lambda)$, i.e., si $f^I \neq 0$ un facteur associé à la valeur propre λ , ce facteur vérifiant la relation (2) où $\gamma = 1$.

En général les facteurs f^I vérifiant (2) et relatifs à la valeur propre λ n'engendrent pas $R^I(\lambda)$ (l'élément f^I déduit par (3) d'un facteur φ^I de $R^I(\lambda)$, pouvant être nul) comme on peut le vérifier sur le contre exemple suivant où $I = \{1, 2, 3\}$, $\rho' : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}$, le seul facteur vérifiant (2) étant le facteur trivial constant.

Remarque

Si l'on considère les espaces vectoriels non sur le corps R des réels, mais sur le corps C des complexes, la relation $\gamma^3 = 1$ implique que γ est l'une des racines cubiques de 1, à savoir 1, j ou j^2 .

Si φ^I est un facteur relatif à la valeur propre λ , (i.e. un élément de $R^I(\lambda)$), et si γ est une racine cubique de 1,

$$f_{\gamma}^I = \varphi^I + (1/\gamma)(\varphi \circ \rho')^I + (1/\gamma^2)(\varphi \circ \rho'^2)^I = \varphi^I + \gamma^2(\varphi \circ \rho')^I + \gamma(\varphi \circ \rho'^2)^I \quad (4)$$

est encore un facteur (si $f_{\gamma}^I \neq 0$) relatif à la même valeur propre λ et qui vérifie (2) puisque $\rho'^3 = \text{id}$

On peut noter qu'à partir de f_j^I (*) et $f_{j^2}^I$ qui sont imaginaires conjugués, on peut construire, si $f_j^I \neq 0$, deux facteurs réels (associés à la même valeur propre λ qui est donc de multiplicité supérieure ou égale à 2) correspondant à la partie réelle et à la partie imaginaire de f_j^I , et l'on peut montrer que ces deux facteurs sont orthogonaux et de même variance.

Posons : $S^I(\lambda) = \{\varphi^I \in R^I(\lambda) : (\varphi \circ \rho')^I = \varphi^I\}$
et désignons comme au § 2.3 par $T^I(\lambda)$ l'espace orthogonal à $S^I(\lambda)$ dans $R^I(\lambda)$. Il est immédiat de vérifier que :

$$\begin{aligned} \forall \varphi^I \in S^I(\lambda) : f_1^I &= 3\varphi^I ; f_j^I = f_{j^2}^I = 0 \\ \forall \varphi^I \in T^I(\lambda) : f_1^I &= \varphi^I + (\varphi \circ \rho')^I + (\varphi \circ \rho'^2)^I = 0 \\ f_j^I &\in T^I(\lambda) ; f_{j^2}^I \in T^I(\lambda) \\ f_j^I &\neq 0 ; f_{j^2}^I \neq 0 \text{ si } \varphi^I \neq 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout facteur réel φ^I appartenant à $T^I(\lambda)$, φ^I , $(\varphi \circ \rho')^I$, $(\varphi \circ \rho'^2)^I$ engendrent un sous espace $E(\varphi^I)$ de $T^I(\lambda)$ de dimension 2, espace que l'on peut caractériser par les facteurs imaginaires conjugués f_j^I et $f_{j^2}^I$ déduits de φ^I par la relation (4) et vérifiant

(*) On note ici f_j^I la fonction f_{γ}^I associée à $\gamma = j$, aucune confusion n'étant à craindre dans le contexte avec la fonction f_j^I associée à la transition f_J^I .

(2), ou par les facteurs réels et orthogonaux $(f_j^I + f_{j2}^I)/2$ et $(f_j^I - f_{j2}^I)/2i$ (*). Caractérisant $E(\varphi^I)$ par f_j^I et f_{j2}^I , puis recommençant le processus avec un facteur réel φ^I de $T^I(\lambda)$ orthogonal à $E(\varphi^I)$ on construit de proche en proche une série de facteurs engendrant $T^I(\lambda)$ et vérifiant (2). Il en résulte que $R^I(\lambda)$ peut être engendré par des facteurs (dont certains sont complexes sauf si $T^I(\lambda) = \{0\}$) vérifiant (2).

2.5 Le couple de permutations conjuguées (ρ, σ) de k_{IJ} s'écrit :

$$\rho : \{X, Y, Z\} \rightarrow \{X, Z, Y\}$$

$$\sigma : \{C_0, C_1, C_2, B_0, B_1, B_2, S_0, S_1, S_2\} \rightarrow \{C_0, C_2, C_1, B_0, B_2, B_1, S_0, S_1, S_2\}.$$

Ces permutations sont d'ordre 2 : $\rho \circ \rho = id$; $\sigma \circ \sigma = id$.

2.6 Soit $f^I = \{f^X, f^Y, f^Z\}$ un facteur non trivial de k_{IJ} .

$(f \circ \rho)^I = \{f^X, f^Z, f^Y\}$ est encore un facteur associé à la même valeur propre.

De plus ces deux facteurs sont de moyenne nulle. Comme les totaux $k(X)$, $k(Y)$, $k(Z)$ des lignes X, Y, Z sont égaux, on a :

$$f^X + f^Y + f^Z = 0$$

$f^I + (f \circ \rho)^I$ et $f^I - (f \circ \rho)^I$ étant encore facteurs (cf § 2.3) l'on en déduit que les deux facteurs non triviaux de variance 1 de k_{IJ} s'écrivent :

$$\varphi_1^I = (1/\sqrt{2}) (-2 ; 1 ; 1) \quad ; \quad \varphi_2^I = \sqrt{3/2} (0 ; 1 ; -1)$$

avec $(\varphi_1 \circ \rho)^I = \varphi_1^I$; $(\varphi_2 \circ \rho)^I = -\varphi_2^I$.

Ces deux facteurs sont donc propres pour (ρ, σ) .

Les facteurs associés G_α ($\alpha = 1, 2$) de variance la valeur propre λ_α s'obtiennent par la formule de transition :

$$G_\alpha(j) = \varphi_\alpha^I \circ f_I^j = \Sigma \{k(i, j) \varphi_\alpha^i \mid i \in I\} / k(j)$$

d'où l'on déduit :

$$G_1 = (1/\sqrt{2}) (-10/14 ; 5/8 ; 5/8 ; -10/14 ; 5/8 ; 5/8 ; -4/11 ; 1/10 ; 3/9) \\ = (-0,505 ; 0,442 ; 0,442 ; -0,505 ; 0,442 ; 0,442 ; -0,256 ; 0,707 ; 0,236)$$

$$G_2 = (\sqrt{3/2}) (0 ; 1/8 ; -1/8 ; 0 ; -3/8 ; 3/8 ; 0 ; 0 ; 0) \\ = (0 ; 0,153 ; -0,153 ; 0 ; -0,46 ; 0,46 ; 0 ; 0 ; 0)$$

Calcul des valeurs propres λ_α

Pour calculer λ_α , il suffit d'écrire que G_α est de variance λ_α :

$$\lambda_1 = (1/180) (100/14 + 25/8 + 25/8 + 100/14 + 25/8 + 25/8 + 16/11 + 1/10 + 1) \\ = 11296/69300 \approx 0,163$$

$$\lambda_2 = (3/180) (1/8 + 1/8 + 9/8 + 9/8) = 1/24 \approx 0,0417$$

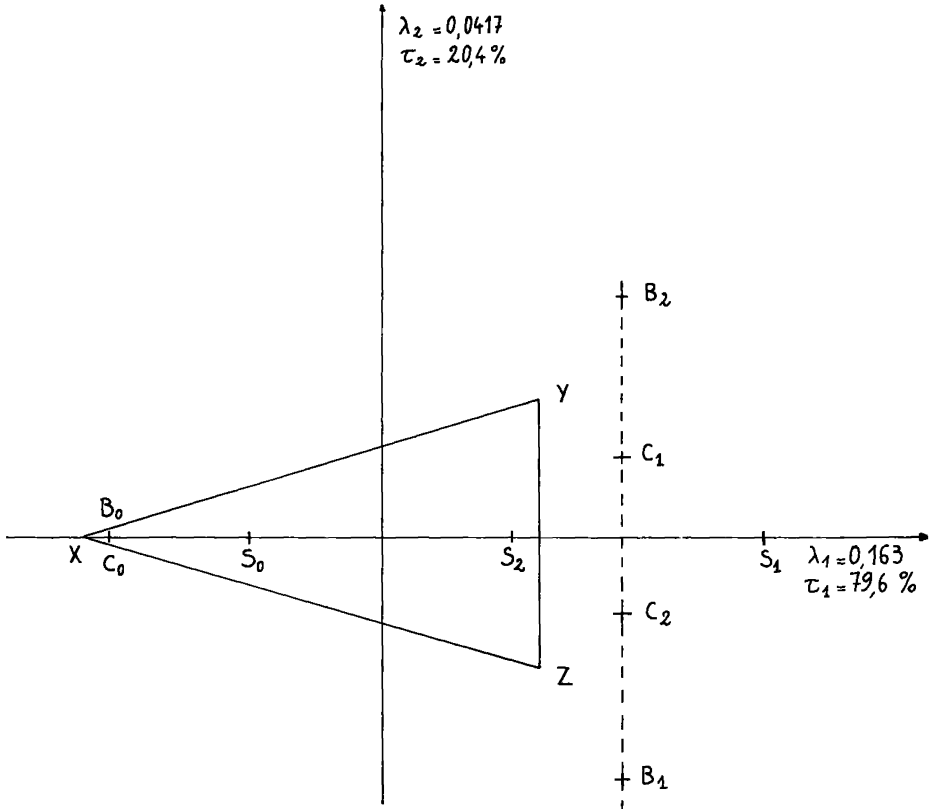
(*) i étant le symbole des imaginaires.

Pour avoir les facteurs F_{α}^I de variance λ_{α} , il suffit de multiplier φ_{α}^I par $\sqrt{\lambda_{\alpha}}$:

$$F_1^I = \sqrt{0,163/2} (-2 ; 1 ; 1) = (-0,572 ; 0,286 ; 0,286)$$

$$F_2^I = (1/4) (0 ; 1 ; -1) = (0 ; 0,25 ; -0,25)$$

d'où la représentation graphique donnée ci-après.



*Représentation de I et J;
on a donné aux demi-axes positifs longueur 1.*