LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

P. CAZES

Étude de quelques propriétés extrémales des facteurs issus d'un sous-tableau d'un tableau de Burt

Les cahiers de l'analyse des données, tome 2, n° 2 (1977), p. 143-160

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1977__2_2_143_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Volume II 1977 n° 2 p. 143-160

ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES DES FACTEURS ISSUS D'UN SOUS-TABLEAU D'UN TABLEAU DE BURT

[EXTR. FAC]

par P. Cazes [1]

1. *Introduction*

Nous nous proposons ici de donner des propriétés extrémales des facteurs issus d'un tableau de Burt, ou d'un sous-tableau de ce tableau.

Après avoir défini au § 2 les notations et rappelé l'équation des facteurs du tableau de Burt, et d'un sous-tableau quelconque $k_{JJ'}$ de ce tableau, nous donnons au § 3 une propriété extrémale des facteurs de $k_{JJ'}$.

Au § 4, nous donnons une autre caractérisation des facteurs du tableau de Burt, en nous inspirant d'une idée de Carroll reprise par Saporta.

Au § 5, nous considérons le cas particulier du tableau $k_{JJ'}$ où l'on croise les deux ensembles J et J' de questions, les questions à l'intérieur de chacun des deux ensembles J ou J' étant indépendantes. Nous montrons que dans ce cas, l'analyse des correspondances de $k_{JJ'}$ est équivalente à l'étude de la position respective de deux sous-espaces. Nous montrons également que l'analyse de $k_{JJ'}$ est équivalente à celle du tableau $k_{J \cup J', J \cup J'}$, et nous donnons une limitation des valeurs propres.

Enfin au § 6, nous montrons que si J_q désigne l'ensemble des modalités de la question q, I le produit des J_q, et S l'ensemble des sujets ayant répondu au questionnaire, on peut au lieu de raisonner dans R^I, comme on l'a fait, pour trouver les propriétés des facteurs, raisonner dans R^S.

2. *Notations - Equation des facteurs.*

2.1. *Notations*

Nous reprenons ici, à quelques différences près les notations de [Bin. Mult.], CAD, vol. II, n° 1.

Soit $\{J_q | q \in Q\}$ une famille finie d'ensembles finis J_q, indicée par $q \in Q$. On note :

---

(1) *ISUP - Laboratoire de Statistique - Université Pierre et Marie Curie - Paris.*

$$\cup\{J_q | q \in Q\} = L; \qquad \pi\{J_q | q \in Q\} = I \qquad (1)$$

où le symbole $\cup$ correspond à l'union disjointe des J_q (cf [Bin. Mult.] § 1) et où l'on a noté L ce qui était noté J dans [Bin. Mult.].

L'on suppose que l'on a un tableau de contingence k_I sur I (i.e. un tableau multiple); l'on désigne par p_I la loi de probabilité associée sur I ($p_I = k_I/n$ si n est le total des éléments du tableau k_I , i.e. le nombre total de sujets soumis au questionnaire défini par les J_q), et par k_{LL} le tableau de Burt croisant l'ensemble des modalités de tous les $\{J_q | q \in Q\}$ avec lui-même .

Nous désignerons par p_{J_q} , $p_{J_q J_{q'}}$, les lois marginales associées à p_I sur J_q et sur $J_q \times J_{q'}$, et par $p_{J_q}^{J_{q'}}$ la loi conditionnelle de J_q connaissant $j \in J_{q'}$.

Notons que si $q = q'$, $p_{J_q J_q}$ n'est autre que le tableau diagonal des $\{p_{J_q}(j) | j \in J_q\}$ tandis que $p_{J_q}^{J_q}$ n'est autre que la matrice unité.

Nous considèrerons deux parties quelconques K et K' de Q, d'intersection vide ou non, dont la réunion n'est pas en général Q.

Nous poserons :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\ q \in K' : J'_q = J_q \\ J = \cup\{J_q | q \in K\} \\ J' = \cup\{J_q | q \in K'\} = \cup\{J'_q | q \in K'\} \\ C_K = \text{Card } K \\ C_{K'} = \text{Card } K' \\ C_J = \text{Card } J \\ C_{J'} = \text{Card } J' \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Nous allons établir certaines propriétés des facteurs issus du tableau $k_{JJ'}$ sous tableau du tableau de Burt k_{LL}.

2.2. Equation des facteurs

Les lois conditionnelles $p'^{J}_{J'}$ et $p'^{J'}_{J}$ associées au tableau $k_{JJ'}$ s'écrivant :

$$p'^{J}_{J'} = \{p'^{J_q}_{J'_{q'}} | q \in K,\ q' \in K'\}$$

$$p'^{J'}_{J} = \{p'^{J'_{q'}}_{J_q} | q \in K,\ q' \in K'\}$$

avec :

$$p'^{J_q}_{J'_{q'}} = (1/C_{K'})\ p^{J_q}_{J'_{q'}}$$

$$p'^{J'}_{J_q}q' = (1/C_K)\; p^{J'}_{J_q}q'$$

l'équation des facteurs de variance 1 $(\varphi^J\;,\;\varphi^{J'})$ de $k_{JJ'}$ s'écrit, si l'on pose :

$$\left.\begin{array}{l}\varphi^J = \{\varphi^{J_q} \mid q \in K\};\\ \varphi^{J'} = \{\varphi^{J'_q} \mid q \in K'\};\end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1/C_{K'})\; \Sigma\; \{\varphi^{J'_{q'}} \circ p^{J_q}_{J'_{q'}} \mid q' \in K'\} = \sqrt{\lambda}\,\varphi^{J_q}\quad ;\\ (1/C_K)\quad \Sigma\; \{\varphi^{J_q} \circ p^{J'_{q'}}_{J_q} \mid q \in K\} = \sqrt{\lambda}\,\varphi^{J'_{q'}}\quad ;\end{array}\right\} \quad (4)$$

avec :

$$\left.\begin{array}{l}(1/C_K)\; \Sigma\; \{\|\varphi^{J_q}\|^2_{p_{J_q}} \mid q \in K\} = 1 \quad ;\\ (1/C_{K'})\; \Sigma\; \{\|\varphi^{J'_q}\|^2_{p_{J'_q}} \mid q \in K'\} = 1 \quad ;\end{array}\right\} \quad (5)$$

Les deux équations (4) impliquant :

$$\left.\begin{array}{l}(1/C_K C_{K'})\; \Sigma\; \{\varphi^{J_{q''}} \circ p^{J'_{q'}}_{J_{q''}} \circ p^{J_q}_{J'_{q'}} \mid q'' \in K,\; q' \in K'\} = \lambda\varphi^{J_q}\\ (1/C_K C_{K'})\; \Sigma\; \{\varphi^{J'_{q''}} \circ p^{J_q}_{J'_{q''}} \circ p^{J'_{q'}}_{J_q} \mid q \in K,\; q'' \in K'\} = \lambda\varphi^{J'_{q'}}\end{array}\right\} \quad (6)$$

Dans le cas où $K = K' = Q$, $J = J' = L$, $\varphi^J = \varphi^{J'} = \varphi^L$, $C_K = C_{K'} = \mathrm{Card}\ Q$, les équations (4) redonnent l'équation des facteurs du tableau de Burt k_{LL}.

$$(1/C_Q)\; \Sigma\; \{\varphi^{J_{q'}} \circ p^{J_q}_{J_{q'}} \mid q' \in Q\} = \sqrt{\lambda}\,\varphi^{J_q} \qquad (7)$$

avec :

$$(1/C_Q)\; \Sigma\; \{\|\varphi^{J_q}\|^2_{p_{J_q}} \mid q \in Q\} = 1 \qquad (8)$$

où l'on a noté C_Q pour Card Q, comme C_K pour Card K.

Remarques :

1) On peut noter que, du fait de la structure particulière du tableau $k_{JJ'}$, si $(\varphi^J\;,\;\varphi^{J'})$ est un couple de facteurs non triviaux, φ^J (resp $\varphi^{J'}$) est de moyenne nulle sur chaque J_q $(q \in K)$ (resp. J'_q $(q \in K')$); en effet on a :

$$\forall\, q \in K : \Sigma\; \{k_{JJ'}(j,\, j') \mid j \in J_q\} = (1/C_K)\; \Sigma\; \{k_{JJ'}(j,\, j') \mid j \in J\}$$

$$\forall\, q \in K' : \Sigma\; \{k_{JJ'}(j,\, j') \mid j' \in J'_q\} = (1/C_{K'})\; \Sigma\; \{k_{JJ'}(j,\, j') \mid j' \in J'\}$$

Il en résulte que le nombre de facteurs non triviaux de $k_{JJ'}$ est au plus égal à min $\{C_J - C_K , C_{J'} - C_{K'}\}$.

Notons que si φ^K est une fonction de moyenne nulle et variance 1, sur K muni de la loi uniforme, i.e. :

$$(1/C_K)\ \Sigma\ \{\varphi^q | q \in K\} = 0$$

$$(1/C_K)\ \Sigma\ \{(\varphi^q)^2 | q \in K\} = 1$$

et si :

$$\varphi^{J_q} = \varphi^q\ \delta^{J_q}$$

$\varphi^J = \{\varphi^{J_q} | q \in K\}$ (fonction prenant sur chaque J_q la valeur constante φ^q) est un facteur de variance 1 de $k_{JJ'}$ associé à la valeur propre 0. Ce facteur peut être dit trivial en ce que sa présence ne nous apporte aucune information quant aux corrélations entre les questions.

Faisant choix d'un système de $C_K - 1$ fonctions sur K de moyenne nulle, de variance 1, et non corrélées, on obtient ainsi $(C_K - 1)$ facteurs sur J de $k_{JJ'}$ associés à la valeur propre 0, facteurs qui joints au facteur trivial δ^J relatif à la valeur propre 1 donnent C_K facteurs triviaux sur J pour $k_{JJ'}$. On construirait de même $C_{K'}$ facteurs triviaux $\varphi^{J'}$ de $k_{JJ'}$ à partir d'un système de $C_{K'}$ fonctions sur K', de variance 1, non corrélées, dont la première est la fonction constante.

2) Pour rechercher les facteurs non triviaux de $k_{JJ'}$, on peut se ramener à diagonaliser une matrice symétrique de dimension r = min $(C_J - C_K , C_{J'} - C_{K'})$. Si par exemple $C_J - C_K < C_{J'} - C_{K'}$, et si H^J désigne l'espace des fonctions sur J de moyenne nulle sur chaque J_q , espace qui est de dimension $C_J - C_K$, il suffit de choisir une base orthonormée de H^J , et d'exprimer les facteurs dans cette base (cf. [Bin. Mult.] § 3.5). Notons que l'on peut choisir chaque fonction de cette base de façon à ce que son support soit un des sous-ensembles J_q de J.

3) Supposons que l'on ait une partition de K (resp. K') en deux classes K_1 et K_2 (resp. K'_1 et K'_2) de telle sorte que :

$$\forall\ (q, q') \in K \times K' - K_1 \times K'_1 : p_{J_q J'_{q'}} = p_{J_q} \otimes p_{J'_{q'}} ,$$

ce qui signifie que toute question q de K_2 (resp. q' de K'_2) est indépendante de toute question q' de K' (resp. q de K).

Posons :

$$J^1 = \cup \{J_q | q \in K_1\}$$

$$J^2 = \cup \{J_q | q \in K_2\}$$

$$J'^1 = \cup \{J'_{q'} | q' \in K'_1\}$$

$$J'^2 = \cup \{J'_{q'} | q' \in K'_2\}$$

Soit $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ un couple de facteurs associés non triviaux (i.e. centrés sur chaque sous ensemble J_q ou $J'_{q'}$) et de variance 1 de $k_{JJ'}$; on a :

$\forall\ (q, q') \in K \times K' - K_1 \times K'_1$:

$$\varphi^{J_q} \circ p_{J_q}^{J'_{q'}} = (\varphi^{J_q} \circ p_{J_q}) \, \delta^{J'_{q'}} = 0$$

$$\varphi^{J'_{q'}} \circ p_{J'_{q'}}^{J_q} = (\varphi^{J'_{q'}} \circ p_{J'_{q'}}) \, \delta^{J_q} = 0;$$

L'on déduit alors de (4) que la restriction de φ^J (resp. $\varphi^{J'}$) à J^2 (resp. J'^2) est nulle, et que si φ^{J^1} (resp. $\varphi^{J'^1}$) est la restriction de φ^J (resp. $\varphi^{J'}$) à J^1 (resp. J'^1), $((C_{K_1}/C_K)^{1/2}\, \varphi^{J^1}, (C_{K'_1}/C_{K'})^{1/2} \varphi^{J'^1})$ est un couple de facteurs associés non triviaux et de variance 1 de la correspondance $k_{J^1J'^1}$ croisant J^1 avec J'^1, C_{K_1} (resp. $C_{K'_1}$) désignant le cardinal de K_1 (resp. K'_1).

L'analyse des correspondances du tableau $k_{JJ'}$ est donc dans ce cas équivalente à l'analyse des correspondancesdu tableau $k_{J^1J'^1}$.

2.3. <u>*Etude d'un cas particulier.*</u>

Supposons qu'il existe deux fonctions $\varphi^J = \{\varphi^{J_q} | q \in K\}$, $\varphi^{J'} = \{\varphi^{J'_{q'}} | q' \in K'\}$ telles que pour tout couple (q, q') de $K \times K'$, $(\varphi^{J_q}, \varphi^{J'_{q'}})$ soit un couple de facteurs de variance 1 de $p_{J_qJ'_{q'}}$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{J_q} \circ p_{J_q}^{J'_{q'}} &= \lambda_{qq'}\, \varphi^{J'_{q'}} \\ \varphi^{J'_{q'}} \circ p_{J'_{q'}}^{J_q} &= \lambda_{qq'}\, \varphi^{J_q} \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{ bis})$$

$\lambda^2_{qq'}$ désignant dans la correspondance $p_{J_qJ'_{q'}}$ la valeur propre associée au couple de facteurs $(\varphi^{J_q}, \varphi^{J'_{q'}})$.

Considérons les fonctions $\{\psi^J_q | q \in K\}$, (resp. $\{\psi^{J'}_{q'} | q' \in K'\}$), ψ^J_q (resp. $\psi^{J'}_{q'}$) étant la fonction sur J (resp. J') nulle sur $J - J_q$ (resp. $J' - J'_{q'}$) et dont la restriction à J_q (resp. $J'_{q'}$) est $\varphi^J q$ (resp. $\varphi^{J'} q'$). Les fonctions $\{\psi^J_q | q \in K\}$ (resp. $\{\psi^{J'}_{q'} | q' \in K'\}$) forment dans R^J (resp. $R^{J'}$) un système de fonctions non corrélées. Nous désignerons par H^J (resp. $H^{J'}$) le sous espace de R^J (resp. $R^{J'}$) engendré par les $\{\psi^J_q | q \in K\}$ (resp. $\{\psi^{J'}_{q'} | q' \in K'\}$). De (4) et (8 bis) l'on déduit que :

$$p'^J_{J'}\,(H^{J'}) \subset H^J$$

$$p'^{J'}_J\,(H^J) \subset H^{J'}$$

et donc que l'espace H^J (resp. $H^{J'}$) est stable pour $p'^{J'}_J \circ p'^J_{J'}$ (resp. $p'^J_{J'} \circ p'^{J'}_J$).

Il existe donc une base de H^J (resp. $H^{J'}$) formée de facteurs de $k_{JJ'}$. De façon précise, si $(\psi^J, \psi^{J'})$ où :

$$\psi^J = \Sigma \{u^q \psi^J_q | q \in K\} \subset H^J, \; \psi^{J'} = \Sigma \{v^{q'} \psi^{J'}_{q'} | q' \in K'\} \subset H^{J'}$$

est un couple de facteurs associés de $k_{JJ'}$ relatif à la valeur propre λ, l'on déduit de (4) et (8 bis) que $u^K = \{u^q | q \in K\}$ et $v^{K'} = \{v^{q'} | q' \in K'$ vérifient les équations :

$$(1/C_K)\; u^K \circ L_K^{K'} = \sqrt{\lambda}\; v^{K'}$$

$$(1/C_{K'})\; v^{K'} \circ L_{K'}^{K} = \sqrt{\lambda}\; u^K$$

avec $\forall\, q, q' \in K \times K'$: $L_K^{K'}\binom{q'}{q} = L_{K'}^{K}\binom{q}{q'} = \lambda_{qq'}$

u^K (resp. $v^{K'}$) est donc vecteur propre de la matrice symétrique $L_K^{K'} \circ L_{K'}^{K}$ (resp. $L_{K'}^{K} \circ L_K^{K'}$) relatif à la valeur propre $\lambda C_K\, C_{K'}$.

Prenant $\varphi^J = \delta^J$, $\varphi^{J'} = \delta^{J'}$, on retrouve ainsi à partir des facteurs triviaux constants des correspondances $p_{J_q J'_{q'}}$ les facteurs triviaux (i.e. constants sur chaque sous ensemble J_q ou $J'_{q'}$) de $k_{JJ'}$; dans ce cas les matrices $L_{K'}^{K}$ et $L_K^{K'}$ sont de rang 1, et ont tous leurs éléments égaux à 1.

Si on a un questionnaire binaire, et si l'on désigne par φ^{J_q} (resp. $\varphi^{J'_{q'}}$) la seule fonction (au signe près) centrée sur J_q (resp. $J'_{q'}$) et de variance 1, $(\varphi^{J_q}, \varphi^{J'_{q'}})$ est le seul couple de facteurs non triviaux et de variance 1 de $p_{J_q J'_{q'}}$. Posant $\varphi^J = \{\varphi^{J_q} | q \in K\}$, $\varphi^{J'} = \{\varphi^{J'_{q'}} | q' \in K'$ on se trouve dans le cas particulier étudié ici.

Le terme général $\lambda_{qq'}$ de la matrice $L_{K'}^{K}$ et de sa transposée $L_K^{K'}$ est alors tel que $\lambda^2_{qq'}$ est la trace associée à la correspondance $p_{J_q J'_{q'}}$. De plus les facteurs non triviaux sur J (resp. J') de $k_{JJ'}$ appartiennent à l'espace H^J (resp. $H^{J'}$) puisqu'ils sont centrés sur chaque J_q $(q \in K)$ (resp. $J'_{q'}$ $(q' \in K')$). On est ainsi ramené pour chercher ces facteurs à diagonaliser soit $L_K^{K'} \circ L_{K'}^{K}$ si $C_K < C_{K'}$, soit $L_{K'}^{K} \circ L_K^{K'}$ si $C_{K'} < C_K$, i.e. à diagonaliser une matrice symétrique de dimension $r = \min\,(C_K, C_{K'})$ au lieu de diagonaliser une matrice de dimension 2r.

2.4. *Rappel sur les opérateurs de projection de R^{J_q} dans $R^{J_{q'}}$ considérés comme des sous-espaces de R^I.*

Pour étudier les propriétés extrémales des facteurs, on se placera dans l'espace produit R^I.

Une fonction d'une variable φ^{J_q} pourra être considérée comme une fonction sur I ne dépendant que de J_q et que l'on peut écrire $\varphi^{J_q} \circ \pi^I_{J_q}$ où $\pi^I_{J_q}$ désigne l'application projection de I sur J_q.

Nous poserons :

$$\left.\begin{aligned} W_q &= \{\varphi^{J_q}\circ\pi^I_{J_q} \mid \varphi^{J_q} \in R^{J_q}\} \\ &= \{\varphi^{J_q} \otimes \{\delta^{J_{q'}} \mid q' \in Q - \{q\}\} \mid \varphi^{J_q} \in R^{J_q}\} \subset R^I , \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

(où $\delta^{J_{q'}}$ est la fonction constante et égale à un sur $J_{q'}$); W_q est le sous espace de R^I, isomorphe à R^{J_q}, engendré par les fonctions ne dépendant que de J_q.

Nous supposerons R^I muni de la norme (ou pseudo norme si le support de p_I est différent de I) p_I.

On a alors :

$$< \varphi^{J_q}\circ\pi^I_{J_q} , \varphi^{J_{q'}}\circ\pi^I_{J_{q'}} >_{p_I} = < \varphi^{J_q}\circ\pi^{J_qJ_{q'}}_{J_q} , \varphi^{J_{q'}}\circ\pi^{J_qJ_{q'}}_{J_{q'}} >_{p_{J_qJ_{q'}}} \text{(*)} \quad (10)$$

$$< \varphi^{J_q}\circ\pi^I_{J_q} , \psi^{J_q}\circ\pi^I_{J_q} >_{p_I} = < \varphi^{J_q}, \psi^{J_q} >_{p_{J_q}} \quad (11)$$

Afin de ne pas alourdir les notations, quand il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre, nous omettrons souvent les $\pi^I_{J_q}$. C'est ainsi que l'expression (10) sera notée $< \varphi^{J_q}, \varphi^{J_{q'}} >$ (ou $< \varphi^{J_q}, \varphi^{J_{q'}} >_{p_{J_qJ_{q'}}}$).

De même l'on notera $\| \varphi^{J_q} - \varphi^{J_{q'}} \|^2$ (ou $\| \varphi^{J_q} - \varphi^{J_{q'}} \|^2_{p_{J_qJ_{q'}}}$) pour :

$$\| \varphi^{J_q}\circ\pi^I_{J_q} - \varphi^{J_{q'}}\circ\pi^I_{J_{q'}} \|^2_{p_I} = \| \varphi^{J_q}\circ\pi^{J_qJ_{q'}}_{J_q} - \varphi^{J_{q'}}\circ\pi^{J_qJ_{q'}}_{J_{q'}} \|^2_{p_{J_qJ_{q'}}}$$

Dans ces conditions l'opérateur de projection de W_q sur $W_{q'}$ est l'opérateur défini par la transition $p^{J_{q'}}_{J_q}$ qui à φ^{J_q} associe $\varphi^{J_q}\circ p^{J_{q'}}_{J_q}$ (i.e. qui à $\varphi^{J_q}\circ\pi^I_{J_q}$ associe $\varphi^{J_q}\circ p^{J_{q'}}_{J_q}\circ\pi^I_{J_{q'}}$).

Nous noterons $(A_{q'})^I_I$ l'opérateur de projection de R^I sur le sous-espace $W_{q'}$, opérateur dont la restriction à W_q est $p^{J_{q'}}_{J_q}$.

Nous poserons enfin :

(*) *où* $\pi^{J_qJ_{q'}}_{J_q}$ *et* $\pi^{J_qJ_{q'}}_{J_{q'}}$ *désignent respectivement les projections de* $J_q \times J_{q'}$ *sur* J_q *et* $J_{q'}$.

$$\left.\begin{aligned} R^{J_q} &= R^{J_q -} \oplus \{\lambda\delta^{J_q} \mid \lambda \in R\} ;\\ W_{q-} &= \{\varphi^{J_q} \circ \pi^{I}_{J_q} \mid \varphi^{J_q} \in R^{J_q -}\}\\ &= \{\varphi^{J_q} \otimes \{\delta^{J_{q'}} \mid q' \in Q - \{q\}\} \mid \varphi^{J_q} \in R^{J_q -}\} \subset R^{I} ;\\ W_q &= \{\lambda\delta^{I} \mid \lambda \in R\} \oplus W_{q-} ; \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

où $R^{J_q -}$ (resp. W_{q-}) désigne l'ensemble desfonctions de moyenne nulle de R^{J_q} (resp. W_q), i.e. des fonctions de R^{J_q}(resp. W_q) orthogonales à la fonction constante δ^{J_q} (resp. δ^I).

3. *Propriétés extrémales des facteurs issus du sous tableau $k_{JJ'}$.*

3.1. *Enoncé* :

A) Les facteurs issus du sous tableau $k_{JJ'}$ rendent extrémales (minimisent) la quantité suivante :

$$R = (1/C_K C_{K'}) \; \Sigma \; \{\|\varphi^{J_q} \circ \pi^{I}_{J_q} - \varphi^{J'_{q'}} \circ \pi^{I}_{J'_{q'}}\|^2 \mid q \in K,\ q' \in K'\} \quad (13)$$

sous l'une des quatre conditions suivantes :

1) $$(1/2\ C_K)\Sigma\{\|\varphi^{J_q}\|^2_{P_{J_q}} \mid q \in K\} + (1/2\ C_{K'})\Sigma\{\|\varphi^{J'_q}\|^2_{P_{J'_q}} \mid q \in K'\} = 1 \quad (14)$$

2) $$(1/C_K)\Sigma\{\|\varphi^{J_q}\|^2_{P_{J_q}} \mid q \in K\} = (1/C_{K'})\ \Sigma\{\|\varphi^{J'_q}\|^2_{P_{J'_q}} \mid q \in K'\} = 1 \quad (15)$$

3) $$(1/C_K)\ \Sigma\ \{\|\varphi^{J_q}\|^2_{P_{J_q}} \mid q \in K\} = 1 \quad (16)$$

4) $$(1/C_{K'})\ \Sigma\ \{\|\varphi^{J'_q}\|^2_{P_{J'_q}} \mid q \in K'\} = 1 \quad (17)$$

Soit $(\varphi^J = \{\varphi^{J_q} \mid q \in K\},\ \varphi^{J'} = \{\varphi^{J'_{q'}} \mid q' \in K'\})$ le couple de fonctions assurant le minimum de R.

Alors sous les conditions (14) ou (15), $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ constitue un couple de facteurs de variance 1 de $k_{JJ'}$. Sous la condition (16) (resp.(17) φ^J (resp. $\varphi^{J'}$) est de variance 1, tandis que $\varphi^{J'}$ (resp. φ^J) a pour variance la valeur propre à laquelle est relative le facteur.

B) Sous la condition (14) (ou sous la condition (15)), les facteurs issus du sous tableau $k_{JJ'}$ rendent extrémales (maximisent) la quantité suivante :

$$\left.\begin{aligned} T &= (1/C_K C_{K'})\ \Sigma\{<\varphi^{J_q} \circ \pi^{I}_{J_q} , \varphi^{J'_{q'}} \circ \pi^{I}_{J'_{q'}} > \mid q \in K,\ q' \in K'\}\\ &= < \Sigma\{\varphi^{J_q} \circ \pi^{I}_{J_q} \mid q \in K\}/C_K ,\ \Sigma\ \{\varphi^{J'_{q'}} \circ \pi^{I}_{J'_{q'}} \mid q' \in K'\}/C_{K'} > \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Le couple de fonctions $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ assurant le maximum de T étant un couple de facteurs de variance 1 de $k_{JJ'}$.

Remarques :

1) Dans le cas où $K = K' = Q$, $J_q = J'_q$, $\varphi^{J_q} = \varphi^{J'_q}$; les conditions (14), (15), (16), (17) sont équivalentes; la quantité T s'écrit alors :

$$T = (1/C_Q^2) \| \Sigma \{\varphi^{J_q} \circ \pi^I_{J_q} | q \in Q\} \|^2 \tag{19}$$

et l'on retrouve la propriété extrémale donnée dans [Bin. Mult.] § 4 que les facteurs issus du tableau de Burt maximisent T, sous la condition de normalisation :

$$(1/C_Q) \; \Sigma \{ \|\varphi^{J_q}\|^2_{p_{J_q}} | q \in Q\} = 1 \tag{20}$$

2) Dans le cas où $C_K = C_Q - 1$, $C_{K'} = 1$, et où $\{K, K'\}$ constitue une partition de Q, le tableau $k_{JJ'}$ peut être considéré comme un tableau de régression, croisant l'ensemble J' des modalités de la variable à expliquer, avec l'ensemble J des modalités des autres variables que l'on peut considérer comme des variables explicatives. Les facteurs $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ minimisent donc :

$$(1/C_K) \; \Sigma \{ \|\varphi^{J'} \circ \pi^I_{J'} - \varphi^{J_q} \circ \pi^I_{J_q}\|^2 | q \in K\}$$

sous la condition de normalisation :

$$\|\varphi^{J'}\|^2_{p_{J'}} = 1$$

3) Sous les conditions (14) ou (15), $R = 2\,(1 - T)$, et si λ est la valeur propre associée au couple de facteurs $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ rendant extremum R ou T, on a $R = 2\,(1 - \sqrt{\lambda})$ et $T = \sqrt{\lambda}$. Sous les conditions (16) ou (17) l'extremum de R vaut $1 - \lambda$.

4) Il est évident que la fonction constante : $\varphi^J = \delta^J$, $\varphi^{J'} = \delta^{J'}$ est solution des problèmes d'extrema énoncés ci-dessus. En particulier, elle assure le minimum absolu de R qui vaut zéro, et le maximum absolu de T qui vaut 1. Une fois enlevée cette solution triviale, on trouvera les facteurs non triviaux de $k_{JJ'}$.

5) En bref on peut dire que la propriété A) exprime que les fonctions φ^J et $\varphi^{J'}$ (fonctions sur les ensembles de modalités J et J') considérées comme fonctions sur l'ensemble pondéré I des individus sont aussi proches que possible l'une de l'autre (R minimum), tandis que la propriété B) exprime que φ^J et $\varphi^{J'}$ ont sur I corrélation maxima (T maximum).

3.2. Démonstration

3.2.1. Minimum de R et maximum de T, sous les conditions (14) et (15).

La condition (15) impliquant (14) il suffit de faire la démonstration dans ce dernier cas; il sera alors évident que la solution vérifie bien également la condition (15). Par ailleurs nous démontrerons en même temps B), puisqu'en fait on va voir que rendre minimum R sous la condition (14) équivaut à maximiser T sous cette même condition. En effet, développant R, et compte tenu de (14), on a, en omettant les $\pi^I_{J_q}$ pour alléger l'écriture :

$$R = (1/C_K C_{K'}) (C_{K'} \sum_{q\in K} \|\varphi^{J_q}\|^2 + C_K \sum_{q'\in K'} \|\varphi^{J'_{q'}}\|^2 - 2\Sigma\{<\varphi^{J_q}, \varphi^{J'_{q'}}>\ldots$$

$$\ldots | q \in K,\ q' \in K'\})$$

soit :

$$R = 2\ (1 - T) \tag{21}$$

Minimiser R sous la condition (14) est donc bien équivalent à maximiser T sous cette même condition.

Notons : $\varphi^M = (\varphi^J, \varphi^{J'})$: la quantité à maximiser peut s'écrire :

$$T = (1/C_K C_{K'})\ \Sigma\{< \varphi^{J_q}, \varphi^{J'_{q'}}> | q \in K,\ q' \in K'\} = \sigma(\varphi^M, \varphi^M); \tag{22}$$

avec pour la condition de normalisation :

$$(1/2C_K)\Sigma\{\|\varphi^{J_q}\|^2 | q\in K\} + (1/2C_{K'})\Sigma\{\|\varphi^{J'_q}\|^2 | q\in K'\} = n(\varphi^M, \varphi^M) = 1; \tag{23}$$

φ^M est donc vecteur propre de la transition $\omega^M_M = (n^{-1} \circ \sigma)^M_M$. (24)

Or l'on a :

$$\left.\begin{array}{l}
\sigma_{JJ} = 0; \quad \sigma_{J'J'} = 0 \\
\forall\ q \in K,\ \ q' \in K' : \sigma_{J_q J'_{q'}} = (1/2\ C_K C_{K'})\ p_{J_q J'_{q'}} \\
\text{soit :} \\
\sigma_{JJ'} = p'_{JJ'}/2
\end{array}\right\} \tag{25}$$

où $p'_{JJ'}$ est le tableau de correspondance associée à $k_{JJ'}$ et dont la somme des éléments vaut 1.

On a de même, si q(j) désigne la question dont j est une modalité :

$$\left.\begin{array}{l}
\forall\ j,\ j' \in J : n_{jj'} = p_{J_{q(j)}}(j)\ \delta^{j'}_j / 2C_k\ , \\
\forall\ j,\ j' \in J' : n_{jj'} = p_{J'_{q(j)}}(j)\ \delta^{j'}_j / 2C_{K'} \\
\forall\ j \in J,\ \forall\ j' \in J' : n_{jj'} = 0.
\end{array}\right\} \tag{26}$$

On en déduit que :

$$\left.\begin{array}{l}
\omega^J_J = 0\ ; \quad \omega^{J'}_{J'} = 0\ ; \\
\forall\ q \in K,\ \forall\ q' \in K' : \\
\omega^{J_q}_{J'_{q'}} = (1/C_{K'})\ p^{J_q}_{J'_{q'}}\ ; \quad \omega^{J'_{q'}}_{J_q} = (1/C_K)\ p^{J'_{q'}}_{J_q}
\end{array}\right\} \tag{27}$$

L'équation :

$$\varphi^M \circ \omega^M_M = \mu\varphi^M \tag{28}$$

se décompose alors en :

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{J'} \circ \omega^{J}_{J'} &= \mu\varphi^{J} \\ \varphi^{J} \circ \omega^{J'}_{J} &= \mu\varphi^{J'} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

soit, $\forall\, q \in K$, $q' \in K'$:

$$\left.\begin{aligned} (1/C_{K'})\ \Sigma\ \{\varphi^{J'q'} \circ p^{J_q}_{J'_{q'}} \mid q' \in K'\} &= \mu\varphi^{J_q} \\ (1/C_K)\ \Sigma\ \{\varphi^{J_q} \circ p^{J'q'}_{J_q} \mid q \in K\} &= \mu\varphi^{J'q'} \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

On retrouve ainsi les équations de transition (4) associées au tableau $k_{JJ'}$, la valeur propre λ étant égale à μ^2.

Des relations (4) vérifiées par φ^J et $\varphi'^{J'}$ l'on déduit que ces facteurs ont même variance, or ces variances s'écrivent respectivement :

$$\left.\begin{aligned} \|\varphi^{J}\|^2 &= (1/C_K)\ \Sigma\ \{\|\varphi^{J_q}\|^2 \mid q \in K\} \\ \|\varphi^{J'}\|^2 &= (1/C_{K'})\ \Sigma\ \{\|\varphi^{J'q}\|^2 \mid q \in K'\} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

et comme d'après la condition (14) :

$$(\|\varphi^J\|^2 + \|\varphi^{J'}\|^2)/2 = 1 \quad (32)$$

on en déduit :

$$\|\varphi^J\|^2 = \|\varphi^{J'}\|^2 = 1 \quad (33)$$

les conditions (15) sont donc bien réalisées.

Notons que la valeur extrémale de T étant μ, i.e. $\sqrt{\lambda}$, la valeur extrémale de R est $2(1 - \sqrt{\lambda})$.

3.2.2. *Minimum de R sous la condition (16)*

Supposons que l'on veuille minimiser R sous la condition de normalisation (16).

$$(1/C_K)\ \Sigma\ \{\|\varphi^{J_q}\|^2 \mid q \in K\} = 1 \quad (16)$$

qui signifie simplement que φ^J est de variance 1.

Remarquons que R peut s'écrire sous la forme :

$$R = (1/C_K C_{K'})\ \Sigma\ \{a_{q'} \mid q' \in K'\}\ ; \quad (34)$$

avec :

$$\left.\begin{aligned} a_{q'} &= \Sigma\ \{\|\varphi^{J_q} - \varphi^{J'q'}\|^2 \mid q \in K\} \\ &= \Sigma\ \{\|\varphi^{J_q} - (1/C_K)\ \Sigma\{\varphi^{J_{q''}} \mid q'' \in K\}\|^2 \mid q \in K\} + \\ &\quad C_K \|(1/C_K)\ \Sigma\ \{\varphi^{J_{q''}} \mid q'' \in K\} - \varphi^{J'q'}\|^2. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

En bref, d'après le théorème de Huyghens, l'inertie du nuage de points $\{\varphi^{J_q} \circ \pi^{I}_{J_q} \mid q \in K\}$ ($\varphi^{J_q} \circ \pi^{I}_{J_q}$ étant affecté de la masse unité) par rapport au point $\varphi^{J'q'} \circ \pi^{I}_{J'_{q'}}$ est égale à l'inertie de ce nuage par rapport à son centre de gravité, augmenté du carré (pondéré par la masse totale C_K de ce nuage) de la distance de :

$\varphi^{J'_{q'}} \circ \pi^{I}_{J'_{q'}}$ à ce centre de gravité.

De (35) l'on déduit que $a_{q'}$ et donc R sera minimum si $\varphi^{J'_{q'}}$ est la projection de $(1/C_K)\ \Sigma\ \{\varphi^{J_q} | q \in K\}$ sur l'espace des fonctions ne dépendans que de $J'_{q'}$, i.e. :

$$\varphi^{J'_{q'}} = (1/C_K)\ \Sigma\ \{\varphi^{J_q} \circ p_{J_q}^{J'_{q'}} | q \in K\} \tag{36}$$

Dans ces conditions, on est ramené à minimiser :

$$R = (C_K C_{K'})^{-1}\ \Sigma\ \{\| \varphi^{J_q} - C_K^{-1}\ \Sigma\ \{\varphi^{J_{q''}} \circ p_{J_{q''}}^{J'_{q'}} | q'' \in K\}\|^2 | q \in K,\ q' \in K'\} \tag{37}$$

Développant R, l'on obtient :

$$\left.\begin{aligned} C_K C_{K'} R = \Sigma\{ (\|\varphi^{J_q}\|^2 + (1/C_K)^2 \|\Sigma\{\varphi^{J_{q''}} \circ p_{J_{q''}}^{J'_{q'}} | q'' \in K\}\|^2 \\ -(2/C_K) < \varphi^{J_q},\ \Sigma\{\varphi^{J_{q''}} \circ p_{J_{q''}}^{J'_{q'}} | q'' \in K\}>) | q \in K,\ q' \in k'\} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

En tenant compte du fait que :

$$<\varphi^{J_q},\ \varphi^{J_{q''}} \circ p_{J_{q''}}^{J'_{q'}}> = <\varphi^{J_q} \circ p_{J_q}^{J'_{q'}},\ \varphi^{J_{q''}} \circ p_{J_{q''}}^{J'_{q'}}> \tag{39}$$

puisque $\varphi^{J_q} - \varphi^{J_q} \circ p_{J_q}^{J'_{q'}}$ est orthogonal à l'espace des fonctions ne dépendant que de $J'_{q'}$, donc à $\varphi^{J_{q''}} \circ p_{J_{q''}}^{J'_{q'}}$, il vient d'après (16) :

$$R = 1 - (1/C_K^2 C_{K'})\ \Sigma\{\|\Sigma\{\varphi^{J_q} \circ p_{J_q}^{J'_{q'}} | q \in K\}\|^2 | q' \in K'\} \tag{40}$$

Minimiser R sous la condition (16) est donc équivalent à maximiser la quantité :

$$R_1 = (1/C_K^2 C_{K'})\ \Sigma\{\|\Sigma\{\varphi^{J_q} \circ p_{J_q}^{J'_{q'}} | q \in K\}\|^2 | q' \in K'\} = \sigma(\varphi^J,\ \varphi^J) \tag{41}$$

sous la condition :

$$(1/C_K)\ \Sigma\ \{\|\varphi^{J_q}\|^2 | q \in K\} = n(\varphi^J,\ \varphi^J) = 1 \tag{42}$$

φ^J est donc vecteur propre de la transition :

$$\omega_J^J = (n^{-1} \circ \sigma)_J^J$$

Or l'on a, $\forall q,\ q' \in K$:

$$\sigma_{J_q J_{q'}} = \Sigma\ \{p_{J_q}^{J'_{q''}} \times p_{J_{q'}}^{J'_{q''}} \circ p_{J'_{q''}} | q'' \in K'\}/C_K^2 C_{K'} \tag{43}$$

$$n_{jj'} = (1/C_K)\ p_{J_{q(j)}}(j)\ \delta_j^{j'} \tag{44}$$

d'où l'on déduit :

$$\omega_{J_q}^{J_{q'}} = \Sigma\ \{p_{J_q}^{J'_{q''}} \circ p_{J'_{q''}}^{J_{q'}} | q'' \in K'\}/C_K C_{K'} \tag{45}$$

d'où l'on déduit :

$$(1/C_K C_{K'})\ \Sigma\ \{\varphi^{J_q} \circ p_{J_q}^{J'q''} \circ p_{J'q''}^{J_{q'}} | q \in K,\ q'' \in K'\} = \mu \varphi^{J_{q'}} \qquad (46)$$

On retrouve bien la première équation (6) avec $\mu = \lambda$, ce qui prouve que φ^J est bien facteur de $k_{JJ'}$, ce facteur étant de variance 1 d'après (16). La comparaison de (36) qui fournit $\varphi^{J'}$ et de (4) montre bien que $\varphi^{J'}$ est le facteur de variance la valeur propre, associé à φ^J.

n.b. Si φ^J est associé à la valeur propre λ, R_1 vaut λ, et donc la quantité R minimisée vaut $1 - \lambda$.

4. *Propriétés extrémales du tableau de Burt.*

Nous avons déjà vu que les facteurs $\varphi^L = \{\varphi^{J_q} | q \in Q\}$ du tableau de Burt rendent extrémales, sous la condition de normalisation (20), la quantité T définie par (19), et la quantité R qui s'écrit dans ce cas particulier.

$$R = (1/C_Q^2)\ \Sigma\ \{\|\varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I - \varphi^{J_{q'}} \circ \pi_{J_{q'}}^I\|^2 | q,\ q' \in Q\} \qquad (47)$$

Nous inspirant d'une idée de Caroll, reprise par Saporta (*), nous allons donner une autre caractérisation des facteurs.

Nous allons chercher les fonctions φ^I, $\{\varphi^{J_q} | q \in Q\}$ telles que soit minimale la quantité :

$$U = \Sigma\ \{a_q \|\varphi^I - \varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I\|^2 | q \in Q\} \qquad (48)$$

(où les a_q sont des coefficients de pondération positifs connus), sous la condition de normalisation :

$$\|\varphi^I\|^2 = 1 \qquad (49)$$

$\varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I$ doit donc être la projection de φ^I sur l'espace W_q des fonctions ne dépendant que de J_q :

$$\varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I = \varphi^I \circ (A_q)_I^I \qquad (50)$$

$(A_q)_I^I$ désignant l'opérateur de projection sur W_q. (48) s'écrit compte tenu du théorème de Pythagore et de (49) :

$$\left.\begin{aligned} U &= \Sigma\ \{a_q | q \in Q\} - \Sigma\ \{a_q \|\varphi^I \circ (A_q)_I^I\|^2 | q \in Q\} \\ &= \Sigma\ \{a_q | q \in Q\} - \Sigma\ \{a_q < \varphi^I,\ \varphi^I \circ (A_q)_I^I > | q \in Q\} \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Minimiser (51) sous la condition (49) est donc équivalent à maximiser :

$$V = \Sigma\ \{a_q < \varphi^I,\ \varphi^I \circ (A_q)_I^I > | q \in Q\}$$

(*) *Saporta se place dans un espace à* $\Sigma\ \{card\ J_q | q \in Q\}$ *dimensions, alors que nous nous plaçons dans un espace à* $\pi\ \{card\ J_q | q \in Q\}$ *dimensions.*

avec $\|\varphi^I\|^2 = 1$ (52)

d'où l'on déduit immédiatement que φ^I est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $\Sigma\ \{a_q (A_q)_I^I | q \in Q\}$:

$$\Sigma\ \{a_q\ \varphi^I \circ (A_q)_I^I | q \in Q\} = \mu\varphi^I \tag{53}$$

soit d'après (50) :

$$\Sigma\ \{a_q\ \varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I\ | q \in Q\} = \mu\varphi^I \tag{54}$$

d'où l'on déduit en projetant la relation (54) sur W_q , et compte tenu de (50) :

$$\Sigma\ \{a_{q'}\ \varphi^{J_{q'}} \circ p_{J_{q'}}^{J_q}\ | q' \in Q\} = \mu\varphi^{J_q} \tag{55}$$

L'on retrouve si les a_q sont égaux et de somme 1, ($a_q = 1/C_Q$) l'équation (7) des facteurs du tableau de Burt k_{LL} avec $\mu = \sqrt{\lambda}$.

5. *Etude du cas où il y a indépendance dans chacun des deux groupes K et K'.*

Dans ce cas, on a :

$$\forall q,\ q' \in K : p_{J_q J_{q'}} = p_{J_q} \otimes p_{J_{q'}}\ ; \tag{56}$$

Les espaces $\{W_q | q \in K\}$ se coupent orthogonalement suivant la droite des constantes, ce qui revient à dire que les sous-espaces W_{q-} orthogonaux à la droite des constantes sont orthogonaux entre eux.

$$\left.\begin{aligned} \text{Posons } W- &= \oplus\ \{W_{q-} | q \in K\} \\ W &= W- \oplus\ \{\lambda\delta^I | \lambda \in R\} \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

W est l'espace engendré par les $\{W_q | q \in K\}$.

Posons également :

$$\varphi^I = \Sigma\ \{\varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I\ | q \in K\} \tag{58}$$

où $\varphi^J = \{\varphi^{J_q} | q \in K\}$ est une fonction sur J.

Si on se limite aux fonctions de moyenne nulle φ^I est un élément de W- dont la composante sur W_{q-} est $\varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I$.

On a de même :

$$\forall\ (q,\ q') \in K' : p_{J'_q J'_{q'}} = p_{J'_q} \otimes p_{J'_{q'}} \tag{59}$$

Les espaces $\{W'_q | q \in K'\}$, (W'_q étant l'espace des fonctions sur I ne dépendant que de J'_q), se coupent orthogonalement suivant la droite des constantes.

On posera de même :

$$\left.\begin{aligned} W^{-\prime} &= \bigoplus \{W'_{q^-} \mid q \in K'\} \\ W' &= W^{-\prime} \oplus \{\lambda\delta^I \mid \lambda \in R\} \\ \varphi'^I &= \Sigma \{\varphi^{J'_q} \circ \pi^I_{J'_q} \mid q \in K'\} \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

où $\varphi^{J'} = \{\varphi^{J'_q} \mid q \in K'\}$ est une fonction sur J'. Se limitant aux fonctions de moyenne nulle, φ'^I est un élément de $W^{-\prime}$ dont la composante sur W'_{q^-} est $\varphi^{J'_q} \circ \pi^I_{J'_q}$.

Si ces fonctions φ^J et $\varphi^{J'}$ sont des facteurs non triviaux (i.e. des facteurs non constants de moyenne nulle) du sous tableau $k_{JJ'}$, ils vérifient les équations (4), et l'on a, en posant :

$$\left.\begin{aligned} A^I_I &= \Sigma \{(A_q)^I_I \mid q \in K\} \\ A'^I_I &= \Sigma \{(A_q)^I_I \mid q \in K'\} \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

$$\left.\begin{aligned} (1/C_{K'})\ \varphi'^I \circ A^I_I &= \sqrt{\lambda}\ \varphi^I \\ (1/C_K)\ \varphi^I \circ A'^I_I &= \sqrt{\lambda}\ \varphi'^I \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Se limitant aux fonctions de moyenne nulle, A^I_I (resp. A'^I_I) est d'après (57) (resp. (60)) l'opérateur de projection sur W^- (resp. W'^-)(*).

L'on déduit alors de (62) que l'analyse de correspondance du tableau $k_{JJ'}$ est équivalente à l'étude de la figure formée par les deux sous espaces W^- et $W^{-\prime}$ (ou $W^\cdot$ et W').

De (62) l'on déduit que :

$$\left.\begin{aligned} \varphi^I \circ A'^I_I \circ A^I_I &= \lambda\ C_K C_{K'}\ \varphi^I \\ \varphi'^I \circ A^I_I \circ A'^I_I &= \lambda\ C_K C_{K'}\ \varphi'^I \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

On a donc :

$$\lambda \leqslant 1/C_K C_{K'} \ (**) \quad (64)$$

puisque $\lambda\ C_K C_{K'}$ n'est autre que le carré du cosinus entre φ^I et φ'^I.

(*) *L'opérateur de projection sur W s'écrit :*

$$\Sigma \{(A_q)^I_I \mid q \in K\} - (C_K - 1)\ \delta^I \otimes p_I$$

sa restriction aux fonctions de moyenne nulle étant :

$A^I_I = \Sigma \{(A_q)^I_I \mid q \in K\}$; *On a, bien sûr, une propriété analogue pour l'opérateur de projection sur W'.*

(**) *Cette inégalité peut s'établir directement sans passer par l'étude de W et W', par des considérations de norme.*

5.1. *Lien avec l'analyse du tableau de Burt total* k_{LL}

On suppose ici que (K, K') est une partition de Q et donc (J, J') une partition de L.

L'on sait que l'étude de la position de deux sous espaces vectoriels peut se ramener à la diagonalisation de la somme des deux projecteurs sur les sous espaces considérés. Cela revient en fait à remplacer deux directions canoniques associées par leurs bissectrices intérieure et extérieure.

On a en effet d'après (62), en remarquant que si φ^J et $\varphi^{J'}$ sont des facteurs de variance 1, les fonctions φ^I et φ'^I respectivement définies par (58) et (60) sont de variance C_K et $C_{K'}$:

$$\left(\frac{\varphi^I}{\sqrt{C_K}} + \frac{\varepsilon\varphi'^I}{\sqrt{C_{K'}}}\right) \circ (A_I^I + A'^I_I) = \left(\frac{\varphi^I}{\sqrt{C_K}} + \frac{\varepsilon\varphi'^I}{\sqrt{C_{K'}}}\right) \quad (1 + \varepsilon\sqrt{\lambda C_K C_{K'}})$$

où ε peut prendre les valeurs 1 ou - 1.

On est donc ramené en se limitant aux fonctions de moyenne nulle à diagonaliser :

$$A_I^I + A'^I_I = \Sigma\{(A_q)_I^I | q \in K \cup K'\} = \Sigma\{(A_q)_I^I | q \in Q\};$$

Or c'est justement ce que l'on faisait dans l'analyse du tableau de Burt total k_{LL} (cf. § 4).

Donc, si les questions dans chaque groupe sont indépendantes, l'analyse des correspondances du tableau $k_{JJ'}$ est équivalente à l'analyse du tableau de Burt total $k_{J \cup J', J \cup J'} = k_{LL}$.

n.b. Si (K, K') ne constitue pas une partition de Q, et si M désigne l'union disjointe de J et J', l'analyse des correspondances de $k_{JJ'}$ est équivalente à l'analyse des correspondances du tableau de Burt k_{MM}. Notons que l'on aurait pu obtenir directement ce résultat, sans passer par l'analyse canonique de W et W', à partir des formules (4), (7) (cette dernière étant écrite pour le tableau k_{MM}), (56) et (59), et compte tenu du fait que les facteurs non triviaux sont de moyenne nulle sur chaque ensemble J_q ou J'_q.

5.2. *Etude d'un cas particulier (categorical conjoint Measurement)*.

On suppose que $C_{K'} = 1$, et que l'on a un modèle d'analyse de variance à C_K facteurs, additif et sans interaction, où tout C_K uple de modalités $(j_1, j_2, \ldots, j_q, \ldots, j_{C_K})$ $(j_q \in J_q)$ est obtenu une fois et une seule. A chacun de ces C_K uples est associé le résultat d'une variable qualitative dont les modalités constituent l'ensemble J', et l'on désire expliquer cette variable à partir des C_K facteurs précédents.

Pour expliquer cette variable, J. D. CARROLL propose de faire l'étude simultanée de la position des deux sous espaces W- et W'$^-$.

Chaque C_K uple étant obtenu une fois et une seule, on est dans le cas où :

$$\forall q, q' \in K, q \neq q' : p_{J_q J_{q'}} = p_{J_q} \otimes p_{J_{q'}}$$

puisque si C_q désigne le cardinal de J_q , on a :

$$p_{J_q}(j) \qquad = 1/C_q \quad \text{si } j \in J_q$$

$$p_{J_qJ_{q'}}(j, j') = 1/C_qC_{q'} \text{ si } j \in J_q, j' \in J_{q'}, (q \neq q')$$

L'analyse canonique précédente est donc équivalente (puisque $C_{K'} = 1$) à l'analyse des correspondances du tableau $k_{JJ'}$, ou du tableau de Burt k_{LL}.

Ayant $C_{K'} = 1$, les valeurs propres non triviales de l'analyse factorielle des correspondances sont donc inférieures ou égales à $1/C_K$, les valeurs propres obtenues lors de l'étude simultanée de W^- et W'^- étant C_K fois les valeurs propres obtenues par l'analyse factorielle des correspondances.

6. Etude dans R^S espace des sujets (*)

Dans l'espace des sujets ayant répondu au questionnaire, nous désignerons par x_j^S la fonction indicatrice de la modalité j de q(j) :

$$\forall s \in S : x_j^s = 1 \text{ si le sujet s a répondu j à la question } q(j),$$

sinon $x_j^s = 0$.

On a alors :

$$\forall q \in Q : \Sigma \{x_j^S | j \in J_q\} = \delta^S$$

où δ^S est la fonction constante et égale à 1.

Nous désignerons par W_q l'espace engendré par les $\{x_j^S | j \in J_q\}$.

Nous supposerons S muni de la mesure uniforme p_S :

$$\forall s \in S : p_s = 1/\text{Card } S$$

R^S est alors muni de la norme p_S :

$$\|\varphi^S\|^2_{p_S} = \Sigma \{p_s(\varphi^s)^2 | s \in S\} = (1/\text{Card } S) \; \Sigma \{(\varphi^s)^2 | s \in S\}$$

Les espaces W_q se coupant suivant la droite des constantes, nous désignerons par W_{q-} le sous espace des fonctions de W_q de moyenne nulle.

Une fonction $\varphi^{J_q} = \{\varphi^j | j \in J_q\}$ peut alors être considérée comme un élément de W_q. Il suffit de poser :

$$\varphi_q^S = \Sigma \{\varphi^j \, x_j^S | j \in J_q\} = \varphi^{J_q} \circ x_{J_q}^S$$

On a alors :

$$< \varphi_q^S , \varphi_{q'}^S >_{p_S} = \Sigma \{\varphi^j \varphi^{j'} <x_j^S, x_{j'}^S>_{p_S} | j \in J_q , j' \in J_{q'}\}$$

or :

$$<x_j^S , x_{j'}^S>_{p_S} = \Sigma\{x_j^s \, x_{j'}^s | s \in S\}/\text{Card } S = p_{J_qJ_{q'}}(j,j'), \text{ si } j \in J_q , j' \in J_{q'}.$$

(*) *Nous désignerons par S l'ensemble des sujets ayant répondu au questionnaire.*

On en déduit que :

$$< \varphi_q^S , \varphi_{q'}^S > _{p_S} = < \varphi^{J_q} \circ \pi^{J_q J_{q'}}_{J_q} , \varphi^{J_{q'}} \circ \pi^{J_q J_{q'}}_{J_{q'}} > _{p_{J_q J_{q'}}}$$

où si $q = q'$, $P_{J_q J_q}$ n'est autre que la mesure p_{J_q} portée sur la diagonale de $J_q \times J_q$.

D'après (10) et (11), on obtient comme produit scalaire $<\varphi_q^S , \varphi_{q'}^S>_{p_S}$ la même quantité que lorsqu'on se plaçait dans R^I, et que φ^{J_q} était considéré comme une fonction $\varphi^{J_q} \circ \pi^I_{J_q}$ sur I.

Il en résulte que toutes les propriétés extrémales trouvées dans R^I, se transposent immédiatement dans R^S.

Bibliographie.

J.P. Benzécri : Sur l'analyse des tableaux binaires associés à une correspondance multiple ([Bin. Mult.]). *Cahiers de l'analyse des données*, Vol. II, n° 1, 1977.

Carroll, J.D. : Generalisation of canonical correlation analysis to three or more sets of variables. *Procedings*, 76 th *Annual Convention Amer, Psych.* Assoc. 1968.

Carroll, J.D. : "Categorical conjoint Measurement" *Ann Arbor, Michigan; Meeting of Mathematical Psychology*, Août 1969.

G. Saporta : Liaison entre plusieurs ensembles de variables et codage de données qualitatives. Thèse 3° cycle, Paris 1975.