

CAHIERS DU BURO

G. KREWERAS

Aires des chemins surdiagonaux et application à un problème économique

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.
Série Recherche*, tome 24 (1976), p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__24__1_0

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1976,
tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AIRES DES CHEMINS SURDIAGONAUX ET APPLICATION A UN PROBLÈME ÉCONOMIQUE

G. KREWERAS

I — LE PROBLEME COMBINATOIRE

Dans cet article nous considérons les points à coordonnées entières (x, y) , c'est-à-dire les points de $\mathbb{Z}^2$, comme les sommets d'un graphe dont les arcs joignent chacun des sommets (x, y) aux deux sommets $(x + 1, y)$ et $(x, y + 1)$ (arcs respectivement "horizontal" et "vertical"). Nous entendons le mot *chemin* au sens usuel de la théorie des graphes (cf. [1]) ; pour leur représentation, nous pouvons imaginer les chemins comme tracés dans un plan $\mathbb{R}^2$ dans lequel $\mathbb{Z}^2$ est "plongé".

Si $0 \leq a < b$, on appelle *chemin strictement surdiagonal* de $(0, 0)$ à (a, b) tout chemin dont tous les arcs autres que le premier partent de points (x, y) tels que $x < y$, et l'on appelle *pont strict de portée n* tout chemin de $(0, 0)$ à (n, n) dont les $2n - 1$ premiers arcs forment un chemin strictement surdiagonal.

Il est bien connu que le nombre de chemins strictement surdiagonaux de $(0, 0)$ à (a, b) est égal à la différence de binomiaux

$$C_{a+b-1}^a - C_{a+b-1}^{a-1} = \frac{(a+b-1)! (b-a)}{a! b!}$$

et que le nombre de ponts stricts de portée n est le nombre de Catalan

$$u_{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)! n!} ;$$

cf. par exemple [2].

(*) Le présent travail a pu être réalisé grâce à l'appui de la Sous-commission franco-québécoise de coopération scientifique et technologique.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, tout pont strict P de portée n définit avec le segment de diagonale allant de $(0, 0)$ à (n, n) un polygone ayant une aire $S(P)$, toujours multiple de $1/2$. Nous allons établir que la somme $\sum S(P)$ de toutes ces aires pour les u_{n-1} ponts stricts P est égale à 2^{2n-3} .

Pour cela nous décomposerons l'aire du triangle formé par $(0, 0)$, (n, n) et $(0, n)$ en aires partielles par les verticales d'abscisses entières et les horizontales d'ordonnées entières, ce qui donne une décomposition en $\frac{n(n-1)}{2}$ carrés d'aire 1 et n triangles rectangles isocèles d'aire $1/2$ (fig. 1) ; pour chacune de ces aires partielles nous déterminerons combien de ponts stricts P la comprennent "sous eux" (nous dirons : à combien de ponts elles "appartiennent").

Chacune des n aires triangulaires appartient à tous les ponts P ; leur contribution totale est donc

$$n \times \frac{1}{2} \times u_{n-1} = \frac{1}{2} C_{2n-2}^{n-1}.$$

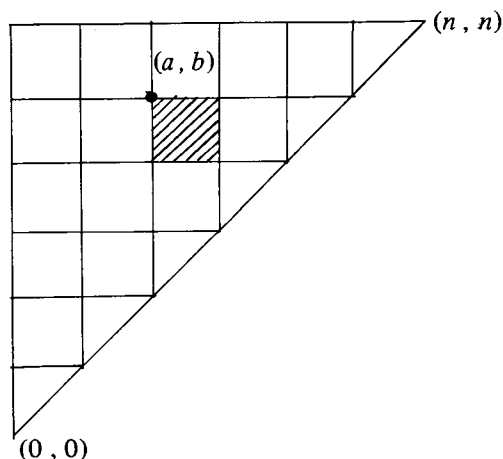


Fig. 1

Considérons maintenant l'aire du carré défini par les coordonnées (a, b) de son *sommet supérieure gauche*. Cette aire appartient non seulement à tous les ponts P_0 qui passent par le point (a, b) , mais aussi à tous les ponts P_i qui passent par un point $(a-i, b+i)$, où i prend toutes les valeurs entières non-négatives acceptables.

Le nombre de ponts P_0 est égal, par suite de (1) et de la décomposition en deux tronçons par le point (a, b) , au produit

$$(C_{a+b-1}^a - C_{a+b-1}^{a-1}) (C_{2n-a-b-1}^{n-b} - C_{2n-a-b-1}^{n-b-1}) ;$$

le nombre total de ponts P_i auxquels appartient l'aire du carré défini par (a, b) est ainsi

$$f(a, b) = \sum_{i \geq 0} (C_{a+b-1}^{a-i} - C_{a+b-1}^{a-i-1}) (C_{2n-a-b-1}^{n-b-i} - C_{2n-a-b-1}^{n-b-i-1}). \quad (2)$$

Faisons alors varier le carré (a, b) par valeurs constantes de la différence $b - a$; nous poserons

$$b - a = n - h ,$$

avec $2 \leq n - h \leq n$, c'est-à-dire $0 \leq h \leq n - 2$.

La contribution totale à $\Sigma S(P)$ des carrés correspondants, qui sont au nombre de $h + 1$, est égale à

$$\sum_{a=0}^h f(a, a + n - h) ,$$

donc, compte tenu de (2), à la somme, pour tous les couples de valeurs acceptables de a et i , des produits

$$(C_{n+2a-h-1}^{a-i} - C_{n+2a-h-1}^{a-i-1}) (C_{n-2a+h-1}^{h-a-i} - C_{n-2a+h-1}^{h-a-i-1}). \quad (3)$$

Il est commode de sommer d'abord par rapport à a , en laissant i constant ; on peut faire pour cela le changement de variable $a - i = \lambda$ et faire varier λ de 0 à $h - 2i = k$. On obtient ainsi la somme

$$\sum_{\lambda=0}^k (C_{n-k+2\lambda-1}^{\lambda} - C_{n-k+2\lambda-1}^{\lambda-1}) (C_{n+k-2\lambda-1}^{k-\lambda} - C_{n+k-2\lambda-1}^{k-\lambda-1}). \quad (4)$$

Montrons que cette somme est égale à

$$C_{2n-1}^k - C_{2n-1}^{k-1}. \quad (5)$$

En effet, par suite de l'expression générale (1), (5) n'est autre que le nombre total de chemins strictement surdiagonaux du point $O(0, 0)$ au point $A(k, 2n - k)$ (fig. 2). Chacun de ces chemins rencontre la droite $y = x + n - k$ en un point au moins ; si le dernier de ces points est $M(\lambda, n - k + \lambda)$, il est facile de voir que les nombres de manières de réaliser les tronçons OM et MA sont donnés respectivement par la première et la deuxième parenthèse de (4).

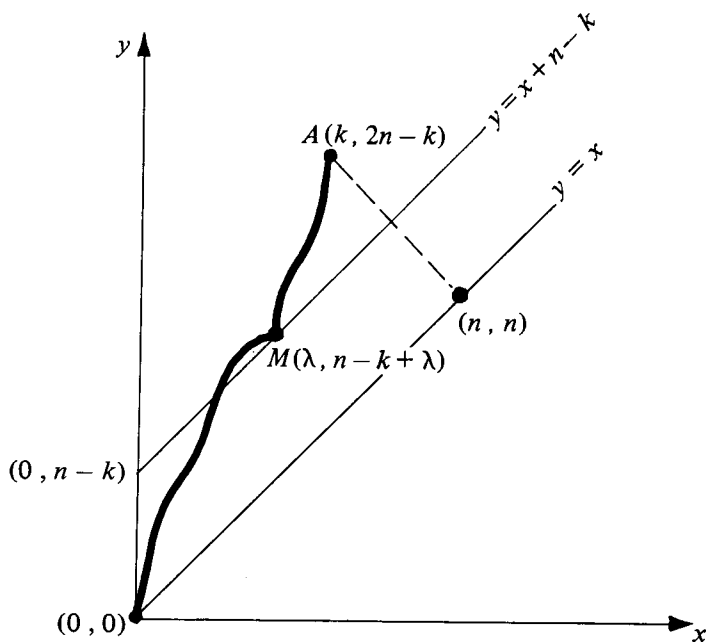


fig. 2

La sommation de (3) par rapport à a seul donne ainsi, puisque $k = h - 2i$:

$$C_{2n-1}^{h-2i} - C_{2n-1}^{h-2i-1}.$$

Si l'on somme ensuite par rapport à i , on obtient la somme alternée

$$C_{2n-1}^h - C_{2n-1}^{h-1} + C_{2n-1}^{h-2} - C_{2n-1}^{h-3} + \dots + (-1)^h C_{2n-1}^0,$$

qui, en vertu d'une propriété élémentaire des binomiaux, est égale à C_{2n-2}^h ; c'est donc C_{2n-2}^h qui est la contribution totale des carrés (a, b) pour lesquels $b - a = n - h$.

Puisque h varie de 0 à $n - 2$ inclus, et qu'il faut ajouter en fin de compte la contribution des triangles, qui est égale comme on l'a vu à $1/2 C_{2n-2}^{n-1}$, on obtient finalement

$$\Sigma S(P) = C_{2n-2}^0 + C_{2n-2}^1 + \dots + C_{2n-2}^{n-2} + \frac{1}{2} C_{2n-2}^{n-1},$$

ce qui est la moitié du développement binomial de $(1 + 1)^{2n-2}$. On a donc bien établi que

$$\Sigma S(P) = 2^{2n-3}.$$

II — APPLICATION ECONOMIQUE

Un chemin partant de $(0, 0)$ peut servir à décrire un phénomène économique dans lequel des offres et des demandes d'une unité d'un bien se succèdent aléatoirement, l'offre et la demande ayant toutes deux pour probabilité $1/2$ (c'est-à-dire les flux moyens sur le long terme étant parfaitement ajustés). On note les offres et les demandes, à partir d'un instant initial d'équilibre, et cela jusqu'au premier retour à l'équilibre, qui est observé au bout de n offres et n demandes ; l'entier n est aléatoire.

Si l'on a noté les offres par des étapes verticales et les demandes par des étapes horizontales, et si pendant la période d'observation il y a eu excès de l'offre sur la demande ("sur-offre"), le chemin obtenu est un pont strict de portée n ; s'il y a eu, au contraire, excès de la demande ("sur-demande"), le chemin est symétrique d'un pont strict de portée n par rapport à la diagonale $y = x$.

La probabilité p_n pour que la période de déséquilibre soit de *durée* n (définition conventionnelle de la durée par le nombre n qui est à la fois celui des offres et celui des demandes) est égale à la proportion de tels chemins parmi les 2^{2n} chemins possibles de $2n$ étapes partant de $(0, 0)$; c'est donc

$$p_n = \frac{2u_{n-1}}{2^{2n}} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} (n-1)! n!} . \quad (6)$$

Il est facile d'établir, à l'aide de l'approximation de Stirling, que la série $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$, qui a pour somme 1, a son terme général équivalent à $n^{-3/2}/2\sqrt{\pi}$; np_n est donc équivalent à $n^{-1/2}/2\sqrt{\pi}$, ce qui établit le fait bien connu que la variable aléatoire "durée du déséquilibre" a une espérance mathématique infinie (cf. [3] par exemple).

A tout instant d'une période de déséquilibre, par exemple d'une période de sur-offre, si l'on se trouve avoir atteint un point (a, b) , on appellera "sur-offre instantanée" la différence $b - a$; si la période en question est représentée par un pont strict de portée n , on appellera "sur-offre moyenne pendant la période" la moyenne arithmétique des $2n$ sur-offres instantanées réalisées au bout de chacune des $2n$ étapes.

Or la somme σ des $2n$ sur-offres instantanées se trouve être le double de l'aire que nous avons appelée $S(P)$. En effet à deux instants consécutifs où les sur-offres instantanées sont u et v (avec nécessairement $|u - v| = 1$),

représentés (fig. 3) par deux points U et V sur P , on peut faire correspondre le trapèze rectangle ayant pour sommets U , V et leurs projections U' , V' sur la diagonale ; l'aire de ce trapèze est

$$\frac{(u\sqrt{2}/2) + (v\sqrt{2}/2)}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{u + v}{4}.$$

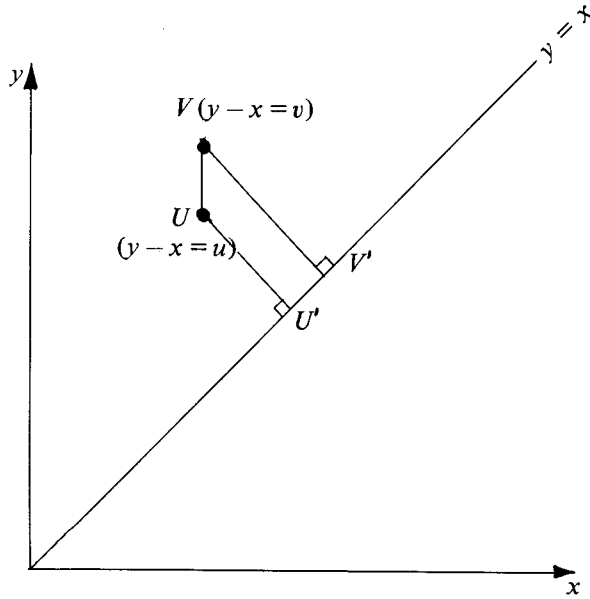


fig. 3

Dans la somme $S(P)$ des aires de tous ces trapèzes, chacune des $2n$ sur-offres instantanées apparaîtra deux fois avec le coefficient $1/4$, ce qui montre que l'on a bien

$$S(P) = \sigma/2.$$

La sur-offre moyenne $\sigma/2n$ pendant la période en question est donc égale à $S(P)/n$.

Si, sans spécifier P , on fixe n , ce qui revient à considérer parmi les périodes de sur-offre toutes celles qui sont de durée n , les u_{n-1} formes possibles du pont P se réalisent avec des probabilités égales à $1/u_{n-1}$. La "sur-offre moyenne pendant une période de sur-offre de durée n " apparaît alors comme une variable aléatoire d'espérance mathématique

$$e_n = \sum_P \frac{1}{u_{n-1}} \cdot \frac{S(P)}{n} = \frac{1}{C_{2n-2}^{n-1}} \sum_P S(P) = \frac{2^{2n-3}}{C_{2n-2}^{n-1}}.$$

Cette espérance est conditionnelle à la réalisation d'une période de déséquilibre de durée n .

Pour calculer l'espérance mathématique *générale* de la variable "déséquilibre moyen observé pendant une période de déséquilibre", il faudrait sommer la série de terme général $p_n e_n$. Mais on voit, en tenant compte de (6), que

$$p_n e_n = \frac{1}{4n} ;$$

il s'agit d'une série harmonique, et la variable en question a donc une espérance infinie.

La conclusion pratique est que, même en cas de parfait ajustement des flux moyens à long terme d'offre et de demande, on a non seulement, comme l'indique la divergence de np_n , des chances d'observer de très longues périodes de déséquilibre, mais encore, comme l'indique la divergence de $p_n e_n$, des chances d'observer, au cours d'une période, des déséquilibres moyens très importants.

III – CONJECTURE COMPLEMENTAIRE

Si l'on s'intéressait en outre (ce qui serait d'un intérêt économique moins évident) à la *variance* de la variable aléatoire "déséquilibre moyen pendant une période de déséquilibre de durée n ", on serait conduit au calcul de la *somme des carrés* des aires $S(P)$. Il est curieux de noter que cette somme des carrés, ou mieux encore la moyenne arithmétique de ces carrés, paraît avoir une expression particulièrement simple, qui est la suivante :

$$\frac{1}{u_{n-1}} \sum [S(P)]^2 = \frac{n(2n-1)(5n-2)}{12}.$$

Cette expression se vérifie aisément à la main jusqu'à $n = 5$, et nous l'avons vérifiée à l'ordinateur jusqu'à $n = 13$; le problème de l'établir pour n quelconque demeure ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGE C. — *Théorie des graphes et ses applications*, 2^e éd., Dunod, Paris (1967).
- [2] KREWERAS G. — *Sur les éventails de segments*, Cahiers du B.U.R.O., n° 15, Paris (1970), pp. 9-13.
- [3] KREWERAS G. — *Graphes, chaînes de Markov et quelques applications économiques*, Dalloz, Paris (1972), pp. 26-28.