Bull. Soc. Math. France
147 (2), 2019, p. 303-340

MÉTRIQUES HYPERKÄHLÉRIENNES PLIÉES

PAR OLIVIER BIQUARD

RÉSUMÉ. — N. Hitchin a récemment introduit la notion de métrique hyperkählérienne pliée, liée aux fibrés de Higgs pour le groupe $SL(\infty, \mathbb{R})$.

Nous construisons de telles métriques et montrons l'existence locale de la composante de Hitchin pour $SL(\infty, \mathbb{R})$.

ABSTRACT (*Folded hyperkähler metrics*). — N. Hitchin recently introduced the notion of folded hyperKähler metrics, in relation with $SL(\infty, \mathbb{R})$ Higgs bundles.

We provide a construction of such metrics, and prove the local existence of the Hitchin component for $SL(\infty, \mathbb{R})$.

Introduction

Soit M^4 une variété orientée de dimension 4. Une métrique hyperkählérienne sur M peut être vue comme la donnée de trois formes symplectiques, ω_a, telles

Texte reçu le 27 février 2018, accepté le 29 juillet 2018.

OLIVIER BIQUARD, Sorbonne Université et École Normale Supérieure, Université PSL • Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France • *E-mail :* `olivier.biquard@ens.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 53C26, 32Q20.

Mots clefs. — Métrique hyperkählérienne pliée, fibré de Higgs, composante de Hitchin.

This work has received support under the program "Investissements d'Avenir" launched by the French Government and implemented by ANR with the reference ANR-10-IDEX-0001-02 PSL.

 0037-9484/2019/303/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf2783

que

$$\omega_a \wedge \omega_b = \delta_{ab} v, \tag{1}$$

où v est une forme volume sur M. Il existe alors une métrique g et trois structures complexes J_a sur M par rapport auxquelles g est kählérienne, avec formes de Kähler ω_a.

N. Hitchin [12] a introduit la notion de métrique hyperkählérienne *pliée* (folded) : la 4-forme v n'est plus une forme volume, mais peut s'annuler transversalement sur une sous-variété $X^3 \subset M^4$; sur $M \setminus X$ on obtient alors une métrique hyperkählérienne, positive ou négative suivant les composantes connexes. L'exemple standard est le fibré en 2-sphères d'une surface hyperbolique Σ,

$$M = T^*\Sigma \cup \Sigma,$$

avec X le fibré unitaire en cercles de $T^*\Sigma$; la métrique est l'analogue non compact de la métrique de Eguchi-Hanson sur T^*P^1. Dans ce cas, les formes ω_2 et ω_3 se restreignent en un couple générique de 2-formes fermées sur X, alors que ω_1 s'annule. Il y a une involution ι qui échange les deux côtés en fixant X, et

$$\iota^* g = -g, \quad \iota^*\omega_1 = -\omega_1, \quad \iota^*\omega_2 = \omega_2, \quad \iota^*\omega_3 = \omega_3. \tag{2}$$

Il y a deux constructions de métriques hyperkählériennes pliées [12] :

- une construction locale, qui à partir d'un couple générique (ω_2, ω_3) de 2-formes fermées analytiques réelles sur X, produit une métrique hyperkählérienne pliée dans un voisinage ; cette métrique possède une involution ι comme ci-dessus (une autre approche pour ce résultat est proposée dans la section 1, voir théorème 1.1 ; cette approche aboutit aussi à un énoncé d'unicité qui implique l'existence locale de l'involution ι) ;
- une construction globale à partir de solutions des équations d'autodualité de Hitchin [11] pour des $SL(\infty, \mathbb{R})$-fibrés de Higgs sur Σ ; si on ne sait pas produire en général de telle solution, une famille de dimension finie vient du plongement $SL(2,\mathbb{R}) \subset SL(\infty,\mathbb{R})$; cette famille contient le modèle standard, induit par le fibré de Higgs correspondant à la représentation fuchsienne de $\pi_1(\Sigma)$ dans $SL(2,\mathbb{R})$.

La construction à partir de $SL(\infty,\mathbb{R})$-fibrés de Higgs suggère que les métriques hyperkählériennes pliées doivent venir dans des familles de dimension infinie. Le but de cet article est de confirmer cette intuition et de décrire l'espace des déformations. Il est aussi de montrer l'existence de la composante de

Hitchin pour $SL(\infty, \mathbb{R})$, qui correspond aux métriques hyperkählériennes pliées munies d'une projection holomorphe sur la surface Σ.

Le premier résultat de cet article est formulé dans le cadre où M est réunion de deux domaines fermés, délimités par X :

$$M = M_0 \cup M_1, \quad M_0 \cap M_1 = X,$$

échangés par l'involution ι. Si la forme symplectique holomorphe $\omega^c = \omega_2 + i\omega_3$ d'une métrique hyperkählérienne pliée le long de X n'est plus symplectique le long de X, en revanche, sur le quotient par l'involution ι,

$$M_s := M/\iota,$$

elle définit une forme symplectique holomorphe jusqu'au bord. La structure différentielle de M_s au bord X diffère de celle de M_0 : si x est une équation lisse de X dans M_0, alors x^2 est une équation lisse du bord dans M_s (d'où le *pli*).

Théorème 0.1. — *Soit une métrique hyperkählérienne g pliée sur M. Alors :*

i. *toutes les déformations infinitésimales de métriques hyperkählériennes pliées s'intègrent en des métriques hyperkählériennes pliées ;*
ii. *toute déformation infinitésimale de la variété holomorphe symplectique à bord M_s donne lieu à une déformation infinitésimale de métrique hyperkählérienne pliée, quitte à modifier M_s par un difféomorphisme infinitésimal ne préservant pas nécessairement le bord X.*

Comme il y a beaucoup de déformations infinitésimales holomorphes symplectiques, le théorème fournit bien la construction de métriques hyperkählériennes pliées.

Il peut sembler curieux de faire agir les difféomorphismes ne préservant pas le bord, mais cela a un sens pour les difféomorphismes infinitésimaux : le champ de vecteurs n'est pas nécessairement tangent au bord. Cette description suggère que les déformations de métriques hyperkählériennes pliées sont liées aux déformations holomorphes symplectiques à frontière libre.

Précisons la question sous-jacente : épaississons un peu M_s, c'est-à-dire supposons que

$$M_s \subset N,$$

où N est une variété holomorphe symplectique sans bord (dans le cas modèle, un voisinage ouvert du fibré en disques dans $T^*\Sigma$), et fixons $\zeta_1 \in H^2(N, X)$ la « classe de Kähler pliée ». Considérons une déformation holomorphe symplectique N' de N. Pour chaque déformation $X' \subset N'$ du bord X, appelons D'

le domaine de N' délimité par X', et fixons une forme de Kähler ω_1 sur D', pliée sur X', et dans la classe ζ_1. Notons $\omega^c = \omega_2 + i\omega_3$ la forme holomorphe symplectique de N'.

Question (Problème de Monge-Ampère à frontière libre). — *Trouver (X', f) tel que $(\omega_1 + i\partial\bar\partial f)^2 = \frac{1}{2}\omega^c \wedge \overline{\omega^c}$, où f est une fonction sur D', et $f = O(y)$ près de X' (où y est une équation de X dans N').*

Une telle solution du problème de Monge-Ampère donnerait une métrique hyperkählérienne pliée sur le domaine de N' délimité par X'. Le point important ici est qu'il est nécessaire de pouvoir déplacer X' pour résoudre l'équation. La question présente des analogies avec les questions de S. Donaldson à frontière libre [8]. Voir la fin de la section 5 pour une interprétation en termes de la complexification du groupe des symplectomorphismes induisant un contactomorphisme au bord.

La composante de Hitchin pour le groupe $SL(\infty, \mathbb{R})$ s'interprète [12] comme un espace de métriques hyperkählériennes pliées avec projection holomorphe sur la surface Σ, c'est-à-dire l'ensemble des domaines de $T^*\Sigma$ portant une métrique hyperkählérienne pliée. Cela correspond à résoudre la question ci-avant pour des domaines de $T^*\Sigma$. Nous démontrons l'existence locale de cette composante :

Théorème 0.2. — *Au voisinage de la métrique hyperkählérienne pliée standard sur le fibré en disques de $T^*\Sigma$, la composante de Hitchin pour le groupe $SL(\infty, \mathbb{R})$ est une variété paramétrée par $\oplus_{n\geqslant 2} H^0(\Sigma, K^n)$.*

Voir le théorème 8.2 pour l'énoncé technique précis : l'espace de différentielles holomorphes $\oplus_{n\geqslant 2} H^0(\Sigma, K^n)$ est interprété comme un espace de fonctions CR holomorphes sur le bord du fibré en disques, et une certaine régularité dans les espaces de Folland-Stein est nécessaire. Le lien entre ces fonctions et les déformations du domaine correspondant à la composante de Hitchin est le suivant : ces déformations correspondent infinitésimalement au déplacement du bord du fibré en disques par un champ de vecteurs $fw\partial_w$, où f est une fonction CR holomorphe sur le bord et $w\partial_w$ est le vecteur de dilatation dans $T^*\Sigma$.

Le théorème confirme l'intuition que la composante de Hitchin pour $SL(\infty, \mathbb{R})$ devrait être une sorte de limite des composantes de Hitchin pour les groupes $SL(k, \mathbb{R})$, lesquelles sont paramétrées par des sommes finies d'espaces de différentielles holomorphes. En outre, la paramétrisation dans le théorème 0.2 peut être choisie pour être une section d'un analogue de la fibration de Hitchin, voir remarque 8.3.

Les sections 1 et 2 sont consacrées à la description de la géométrie au bord et à la mise en forme comme un problème non linéaire sur les différentielles de trois 1-formes ; l'analyse des déformations hyperkählériennes de cette manière n'est pas nouvelle, ce qui compte ici est de déterminer les conditions au bord correspondant à la géométrie (un travail en cours de J. Fine, J. Lotay et M. Singer analyse le cas d'un bord standard). Les espaces fonctionnels adéquats, repris de [4], sont introduits dans la section 3, la linéarisation du problème est analysée section 4, et section 5 les déformations infinitésimales sont comprises en termes de la géométrie holomorphe symplectique. Dans la section 6, on détermine les déformations infinitésimales correspondant aux $SL(\infty,\mathbb{R})$-fibrés de Higgs sur la surface de Riemann Σ : elles sont paramétrées par les différentielles holomorphes de tous degrés (au moins quadratiques). Un problème technique se pose alors pour parvenir au théorème 0.2 : la paramétrisation du déplacement du bord du domaine holomorphe symplectique par une fonction (donnant le déplacement radial) se fait a priori avec perte de dérivées. Cette question est contournée par la section 7 qui propose une paramétrisation de tous les domaines du cotangent en termes de fibrations (non holomorphes) par des disques holomorphes, suivant des idées remontant à Burns, Epstein, Lempert et Bland dans les années 90, notre approche ici étant basée sur [3]. Cela permet de déduire le théorème 0.2 section 8. Finalement, l'asymptotique au bord des métriques nécessite le développement d'une analyse, reportée jusqu'à la section 9.

Mes remerciements vont à N. Hitchin, pour les nombreux échanges qui ont permis l'existence de cet article. Je remercie aussi C. Guillarmou pour d'utiles discussions sur le laplacien plié au début de ce travail.

1. La géométrie au bord et son modèle

On commence par préciser le comportement au bord d'une métrique hyperkählérienne pliée [12]. Nous avons un triplet $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ de 2-formes sur une variété M, qui en dehors d'une hypersurface X (le « pli ») donne une métrique hyperkählérienne (définie positive ou définie négative). Soit $i : X \hookrightarrow M$ l'injection. On a

$$i^*\omega_1 = 0, \tag{3}$$

alors que les formes ω_2 et ω_3, restreintes à X, ont chacune un noyau de dimension 1, dont la somme est une distribution de contact :

$$H = \ker i^*\omega_2 \oplus \ker i^*\omega_3. \tag{4}$$

Dans cette situation, R. Bryant [7] a montré l'existence d'une unique base $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ de 1-formes sur X, telle que

$$i^*\omega_2 = -\theta^1 \wedge \theta^3, \quad i^*\omega_3 = \theta^1 \wedge \theta^2, \tag{5}$$

$$d\theta^1 = \theta^2 \wedge \theta^3. \tag{6}$$

Bien sûr, la forme θ^1 est une forme de contact, et les formes θ^2 et θ^3 sont horizontales, c'est-à-dire qu'elles s'annulent sur le champ de Reeb X_1 (c'est donc le premier vecteur de la base duale (X_1, X_2, X_3)).

Alors il existe une équation x de $X \subset M$, dont la différentielle le long de X est bien déterminée, et telle que

$$\begin{aligned} \omega_1|_X &= dx \wedge \theta^1 + x\theta^2 \wedge \theta^3, \\ \omega_2|_X &= xdx \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^3, \\ \omega_3|_X &= xdx \wedge \theta^3 + \theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Ce comportement sera extrait du résultat suivant, qui donne l'existence locale et l'unicité de la métrique hyperkählérienne pliée :

Théorème 1.1. — *Étant donné (X^3, β_2, β_3) analytique réel, où β_2 et β_3 sont des 2-formes fermées sur X dont les noyaux engendrent une distribution de contact, il existe sur un petit voisinage $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ une unique métrique hyperkählérienne pliée telle que $i^*\omega_2 = \beta_2$ et $i^*\omega_3 = \beta_3$. Cette métrique satisfait la parité (2).*

L'existence est démontrée par une construction twistorielle [12, §7]. La démonstration que nous donnons ici simplifie cette preuve et aboutit directement au résultat d'unicité.

Démonstration. — On utilise le formalisme d'Ashtekar [1] : une solution du système des équations de Nahm pour des champs de vecteurs V_1, V_2, V_3 sur X, dépendant de x, et préservant une forme volume fixe υ sur X,

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dx} + [V_2, V_3] &= 0, \\ \frac{dV_2}{dx} + [V_3, V_1] &= 0, \\ \frac{dV_3}{dx} + [V_1, V_2] &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

produit, en posant $V_0 = \frac{\partial}{\partial x}$, une métrique hyperkählérienne définie par

$$g(V_i, V_j) = \upsilon(V_1, V_2, V_3)\delta_{ij}. \tag{9}$$

Réciproquement, si g est une métrique hyperkählérienne et x une fonction harmonique, alors, en posant $dx \wedge \upsilon = |dx|_g^2 \operatorname{vol}^g$ et $V_a = J_a \frac{\partial}{\partial x}$ pour $a = 1 \dots 3$, on récupère une solution du système (8).

Appliquons cela dans notre situation : partant de (X, β_2, β_3), on prend la base de 1-formes $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ satisfaisant $d\theta^1 = \theta^2 \wedge \theta^3$, $\beta_2 = -\theta^1 \wedge \theta^3$ et $\beta_3 = \theta^1 \wedge \theta^2$, et (X_1, X_2, X_3) la base associée de champs de vecteurs. Alors les conditions $d\beta_2 = d\beta_3 = 0$ se traduisent par le fait que X_2 et X_3 préservent la forme volume $\upsilon = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$. On résout alors le système (8) avec les conditions initiales

$$V_1(0) = 0, \quad V_2(0) = X_2, \quad V_3(0) = X_3. \tag{10}$$

Pour des données analytiques réelles, le théorème de Cauchy-Kowalevski produit une unique solution définie pour x petit.

On observera que $(-V_1(-x), V_2(-x), V_3(-x))$ est encore solution avec les mêmes conditions initiales, donc V_1 est paire, et V_2, V_3 impaires, ce qui implique l'invariance (2) sous l'involution $\iota(x) = -x$ pour la solution. En outre, puisque $X_1 = -[X_2, X_3]$, on a

$$V_1(x) = xX_1 + O(x^3). \tag{11}$$

On déduit le comportement de la métrique (impaire, positive pour $x > 0$, négative pour $x < 0$) :

$$g = x(dx^2 + (\theta^2)^2 + (\theta^3)^2) + x^{-1}(\theta^1)^2 + O(x^3)G\left(dx, x^{-1}\theta^1, \theta^2, \theta^3\right), \tag{12}$$

et celui des trois formes de Kähler donné dans (7). Ici $G((e^i)) = \sum G_{ij}e^ie^j$ est un 2-tenseur symétrique dont les coefficients G_{ij} sont lisses.

Réciproquement, étant donnée une métrique hyperkählérienne, analytique réelle, avec le comportement (12), on calcule son laplacien

$$\Delta = -x^{-1}(\partial_x^2 + x^2X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + \cdots \tag{13}$$

Il en résulte immédiatement qu'on peut résoudre $\Delta y = 0$ dans un voisinage de X avec $y = x + O(x^2)$; cette solution, unique, permet de reconstruire les champs V_a. L'unicité s'en déduit. □

Il est intéressant de noter qu'existe un cas où les formules (7) sont exactes globalement et pas seulement sur X : si X est le groupe de Heisenberg, muni de sa base invariante de 1-formes telle que

$$d\theta^1 = \theta^2 \wedge \theta^3, \quad d\theta^2 = d\theta^3 = 0, \tag{14}$$

alors $(V_1, V_2, V_3)(x) = (xX_1, X_2, X_3)$ est une solution exacte de (8), donc les formules (7) définissent des 2-formes fermées satisfaisant le système (1) sur

$M = \mathbb{R} \times X$, et la métrique hyperkählérienne pliée g est explicitée par

$$g_0 = x\left(dx^2 + (\theta^2)^2 + (\theta^3)^2\right) + x^{-1}(\theta^1)^2. \tag{15}$$

(On peut le voir aussi par application de l'ansatz de Gibbons-Hawking).

Le cas du groupe de Heisenberg est le modèle « plat » de la géométrie que nous étudions, au sens suivant. Prenons des coordonnées (x^1, x^2, x^3), de sorte que

$$\theta^1 = dx^1 + x^2 dx^3, \quad \theta^2 = dx^2, \quad \theta^3 = dx^3.$$

Dans le cas d'une métrique hyperkählérienne pliée générale g, soit un point $p \in X$, choisissons grâce au lemme de Darboux des coordonnées locales (x^i) sur X en p de sorte que

$$\theta^1 = dx^1 + x^2 dx^3, \quad \theta^2(p) = dx^2, \quad \theta^3(p) = dx^3.$$

Considérons les dilatations inhomogènes

$$h_t(x, x^1, x^2, x^3) = (tx, t^2 x^1, tx^2, tx^3).$$

Alors la métrique modèle (15) satisfait $h_t^* g_0 = t^3 g_0$, et plus généralement, à partir de (7), quand $t \to 0$, on voit que les $t^{-3} h_t^* \omega_a$ convergent vers les 2-formes du modèle, et en particulier

$$\lim_{t \to 0} t^{-3} h_t^* g = g_0. \tag{16}$$

Il y a une analogie claire avec la géométrie hyperbolique complexe et les métriques asymptotiquement hyperboliques complexes [2], mais qui n'est qu'une analogie : en effet, la métrique $x^{-3} g_0$, invariante par les dilatations h_t, n'est pas hyperbolique complexe. Elle est néanmoins quasi-isométrique à la métrique hyperbolique complexe.

2. L'espace des métriques hyperkählériennes pliées

Nous considérons à présent les déformations d'une métrique hyperkählérienne pliée g_0 sur (M, X). Puisque deux structures de contact proches sont difféomorphes, on peut supposer que la distribution de contact H induite sur X par (4) reste fixe. Les formes $i^*\omega_2$ et $i^*\omega_3$ sont alors nécessairement des 2-formes verticales sur X (et $i^*\omega_1 = 0$). Enfin nous considérerons les déformations en fixant les classes de cohomologie des formes ω_a : notons ζ_1 la classe de ω_1 dans $H^2(M_0, X)$, et ζ_2, ζ_3 les classes de ω_2 et ω_3 dans $H^2(M_0)$.

Cela nous amène à considérer l'espace $\mathcal{Q}$ des triplets (ω_a) de 2-formes fermées sur M_0, de classes de cohomologie (ζ_a) dans $H^2(M_0, X)$ ou $H^2(M_0)$ respectivement, tels que

$$i^*\omega_1 = 0, \quad i^*\omega_2, i^*\omega_3 \text{ verticales.} \tag{17}$$

L'espace des métriques hyperkählériennes pliées sur M_0 est alors

$$\mathcal{M} = \left\{(\omega_a) \in \mathcal{Q}, \omega_a \wedge \omega_b = \delta_{ab}\omega_1^2\right\}. \tag{18}$$

Par le théorème 1.1, de telles métriques satisfont nécessairement la parité (2) près du bord X (pour une certain choix de x), ce qui implique qu'on peut les prolonger par doublement en des métriques hyperkählériennes pliées sur M entier. (Le théorème 1.1 n'est valable que pour des données analytiques réelles, mais si celles-ci sont seulement C^∞, il donne néanmoins le même résultat sur les germes en X, ce qui suffit pour le prolongement par doublement).

Aussi raisonnerons-nous uniquement sur la variété à bord M_0.

Le but de cet article est de comprendre l'espace $\mathcal{M}$. On peut ainsi décrire $\mathcal{Q}$ à partir de

$$\mathcal{T} = \left\{(\alpha_a) \in \Omega^1(M_0), i^*\alpha_1 = 0, i^*d\alpha_2, i^*d\alpha_3 \text{ verticales}\right\}. \tag{19}$$

Les conditions sur les 1-formes sont écrites de sorte que $(\alpha_a) \in \mathcal{T}$ implique $(\omega_a + d\alpha_a) \in \mathcal{Q}$, et tout élément de $\mathcal{Q}$ s'écrit de cette manière. L'espace $\mathcal{M}$ se décrit comme l'image par d de $P^{-1}(0)$, pour

$$P\left((\alpha_a)\right) = \left((\omega_a + d\alpha_a) \wedge (\omega_b + d\alpha_b)\right)_0, \tag{20}$$

où l'indice 0 dénote la partie sans trace ; on a donc défini un opérateur

$$P : \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{Sym}_0^2(\mathbb{R}^3) \otimes \Omega^4. \tag{21}$$

Cet opérateur, et sa linéarisation, interviennent classiquement dans les problèmes d'autodualité, voir par exemple [4] dans un contexte proche.

Observons qu'il y a une contrainte sur l'image de P : en effet, les nombres $\zeta_1 \cup \zeta_2, \zeta_1 \cup \zeta_3 \in H^4(M_0, X) = \mathbb{R}$ sont représentés par

$$\zeta_1 \cup \zeta_b = \int_{M_0} (\omega_1 + d\alpha_1) \wedge (\omega_b + d\alpha_b), \quad b = 2, 3. \tag{22}$$

L'analyse de l'opérateur P requiert d'introduire les espaces fonctionnels adéquats, ce que nous faisons maintenant.

3. Espaces fonctionnels

Les espaces fonctionnels sur le bord, adaptés à la géométrie de contact, sont les espaces de Folland-Stein FS^k [10] : une fonction f sur X est dans l'espace FS^k si elle a k dérivées horizontales dans L^2, c'est-à-dire

$$X_2^{j_2} X_3^{j_3} f \in L^2(X) \text{ dès que } j_2 + j_3 \leqslant k.$$

Une version fractionnaire est définie en considérant l'opérateur hypoelliptique $\square = -(X_2^2 + X_3^2)$, dont la décomposition spectrale permet de définir la norme $\|f\|_{\mathrm{FS}^k} = \|(1 + \square^{\frac{k}{2}}) f\|_{L^2}$.

Une caractéristique, presque une définition des métriques pliées, est que la forme volume s'annule simplement sur X : près de X, on a

$$\mathrm{vol}^{g_0} \sim x dx \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3.$$

Nous considérons l'espace L^2 par rapport à cette forme volume, et un espace de fonctions L^2 à poids par

$$L^2_\delta = x^{\delta+1} L^2.$$

La définition est faite pour que $x^{\delta'} \in L^2_\delta$ dès que $\delta' > \delta$.

Rappelons que sur X nous disposons d'un repère (X_1, X_2, X_3) dual à $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, et nous pouvons identifier un voisinage de X dans M_0 à $[0, \epsilon) \times X$, avec première coordonnée x, ce qui nous permet d'ajouter le champ de vecteurs ∂_x. On considère alors, pour $s \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev à poids défini par la norme

$$\|f\|^2_{H^s_\delta} = \sum_{|j| := j_0 + \cdots + j_3 \leqslant s} \|\partial_x^{j_0} (x X_1)^{j_1} X_2^{j_2} X_3^{j_3} f\|^2_{L^2_{\delta - |j|}}.$$

La norme est indépendante de l'ordre dans lequel on écrit les champs de vecteurs, car

$$[\partial_x, x X_1] = X_1 = -[X_2, X_3].$$

Par commodité d'écriture, on notera D toute dérivation parmi ∂_x, xX_1, X_2 et X_3 et D^j toute composition d'ordre j de ces dérivations. La norme de Sobolev précédente s'écrit ainsi

$$\|f\|^2_{H^s_\delta} = \sum_{j \leqslant s} \|D^j f\|^2_{L^2_{\delta - j}}.$$

Une autre interprétation des espaces de Sobolev à poids s'obtient en considérant la métrique $\frac{g_0}{x^3}$, quasi-isométrique à une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe, donc on dispose d'espaces de Sobolev $H^s_{\frac{g_0}{x^3}}$ obtenus en sommant les carrés des normes H^s ordinaires sur un recouvrement localement fini par des boules. Le lien avec les espaces de Sobolev définis précédemment est

$$H^s_\delta = x^{\delta-2} H^s_{\frac{g_0}{x^3}}. \tag{23}$$

Cette relation permet en particulier d'étendre la définition de H^s_δ à des s fractionnaires.

Enfin, on utilisera aussi une variante où ℓ dérivées (où $\ell \in \mathbb{N}$) le long de X sont mieux contrôlées : si $s \geqslant \ell$, on note $H^{s,\ell}_\delta$ l'espace des fonctions $f \in H^s_\delta$, telles que pour $|j| := j_2 + j_3 \leqslant \ell$ on ait

$$X_2^{j_2} X_3^{j_3} f \in H^{s-|j|}_\delta.$$

Ce type d'espace est utilisé dans [4], d'où nous extrayons le lemme d'extension suivant :

Lemme 3.1. — *1. Soit $\delta \in (0,1)$. Si une fonction f satisfait $Df \in L^2_{-1+\delta}$, alors f admet une valeur au bord $f|_X \in \mathrm{FS}^\delta$, et $f - (f|_X) \in L^2_\delta$.*

Réciproquement, il existe un opérateur d'extension, E_0, qui à $f_0 \in \mathrm{FS}^{\ell+\delta}(X)$ associe une extension $f = E_0(f_0)$ sur M_0 telle que $Df \in H^{\infty;\ell}_{-1+\delta}$.

2. Plus généralement, il existe des opérateurs d'extension E_k, associant à un développement $f_0 + xf_1 + \cdots + x^k f_k$, où $f_j \in \mathrm{FS}^{k-j+\ell+\delta}(X)$, une extension f sur M_0, telle que

i. *pour $j \leqslant k$ on a $D^j(f - \sum_0^j x^i f_i) \in L^2_{k-j+\delta}$;*
ii. *$D^{k+1} f \in H^{\infty;\ell}_{-1+\delta}$.*

Démonstration. — Ce sont les lemmes 2.5 et 2.7 dans [4], qui s'appliquent car on a vu que la métrique $\frac{g_0}{x^3}$ est quasi-isométrique aux métriques asymptotiquement hyperboliques complexes, utilisées dans [4]. Ils n'y sont énoncés que pour une seule fonction f_0, mais en l'appliquant à chaque f_j on déduit l'énoncé écrit ici. □

On peut étendre légèrement le lemme 3.1 de la manière suivante : si on a seulement $f \in H^{\frac{1}{2}}_\delta$ alors les restrictions aux tranches $f|_{\{x\}\times X}$, bien définies dans L^2, sont contrôlées par la norme $H^{\frac{1}{2}}$ de manière uniforme dans les boules de la métrique $\frac{g_0}{x^3}$, et il en résulte que $x^{-\delta} f|_{\{x\}\times X} \to 0$ dans $L^2(\theta^1\theta^2\theta^3)$ quand x tend vers 0. Donc, pour $s \geqslant \frac{1}{2}$, l'espace

$$\mathcal{H}^s_\delta = \mathrm{FS}^\delta(X) \oplus H^s_\delta(M_0),$$

constitué des fonctions f qui se décomposent près du bord en

$$f = E_0(f_0) + f_1, \quad f_0 \in \mathrm{FS}^\delta(X), f_1 \in H^s_\delta(M_0), \tag{24}$$

a un sens (la projection sur $\mathrm{FS}^\delta(X)$ étant la valeur au bord). Si $s \geqslant 1$, c'est exactement l'espace des fonctions f sur M_0 telles que $Df \in H^{s-1}_{-1+\delta}(M_0)$.

De manière analogue est défini, pour $s \geqslant \ell + \frac{1}{2}$, l'espace

$$\mathcal{H}^{s,\ell}_\delta \ := \mathrm{FS}^{\ell+\delta}(X) \oplus H^{s,\ell}_\delta(M_0),$$

constitué des fonctions f avec une décomposition (24) avec $f_0 \in \mathrm{FS}^{\ell+\delta}(X)$ et $f_1 \in H^{s,\ell}_\delta(M_0)$. Si $s \geqslant \ell + 1$, c'est l'espace des fonctions f sur M_0 telles que $Df \in H^{s-1,\ell}_{-1+\delta}(M_0)$.

Enfin, au lieu d'un seul terme au bord, on peut définir des espaces où les fonctions disposent d'un développement d'ordre k en x et d'un reste d'ordre $k+\delta$: pour $s \geqslant \ell + \frac{1}{2}$,

$$\mathcal{H}^{s,\ell}_{k,\delta} := \oplus_0^k \mathrm{FS}^{\ell+k-j+\delta}(X) \oplus H^{s,\ell}_{k+\delta}(M_0).$$

Si s est assez grand, $\mathcal{H}^{s,\ell}_{k,\delta}$ est constitué des f telles que $D^{k+1}f \in H^{s-k-1,\ell}_{-1+\delta}(M_0)$.

Disons tout de suite qu'on choisira dorénavant des valeurs

$$\ell \gg 0, \quad \delta = \frac{1}{2}, \quad s \geqslant \ell + \frac{1}{2}.$$

Le choix du poids $\delta = \frac{1}{2}$ rend transparent le rapport aux espaces L^2 ordinaires, mais nous continuerons d'utiliser δ car tous les énoncés sont valables dès que $\delta \in (0,1)$, voir remarque 9.4. Enfin, dans la section 7 on utilisera $s = \ell + \frac{1}{2}$ donc la seule vraie liberté est sur ℓ.

Finalement, ces choix permettent de plonger continûment

$$\mathcal{H}^{s,\ell}_{k,\delta} \subset C^k,$$

et $\mathcal{H}^{s,\ell}_{k,\delta}$ est une algèbre. Dans l'intérieur de M_0, les choix permettent d'obtenir $\mathcal{H}^{s,\ell}_{k,\delta} \subset C^j_{\mathrm{loc}}$ pour tout j grand préalablement fixé, mais en revanche les normes à poids ne contrôlent pas les dérivées radiales $\partial_x^j f$ au bord.

Nous pouvons maintenant définir une version Sobolev des espaces $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{M}$ de la manière suivante. Nous considérons la base de 1-formes (e^i) définie par

$$e^0 = dx, \quad e^1 = x^{-1}\theta^1, \quad e^2 = \theta^2, \quad e^3 = \theta^3.$$

La base $(x^{\frac{1}{2}}e^i)$ est orthonormale le long de X. Nous définissons alors $\mathcal{Q}^{s,\ell}_\delta$ comme l'espace des triplets de 2-formes (ω_a) :

i. à coefficients $x\mathcal{H}^{s,\ell}_\delta$ dans la base $(e^i \wedge e^j)$,
ii. satisfaisant (17) ; comme $e^2 \wedge e^3 = \theta^2 \wedge \theta^3$, la verticalité de $i^*\omega_2$ et $i^*\omega_3$ est impliquée par la première condition, et (17) se réduit donc à $i^*\omega_1 = 0$.

La première condition implique que les 2-formes se prolongent continûment au-dessus de X. Puisque $\mathrm{vol}^{g_0} = x dx \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 = x^2 e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4$, un tel triplet (ω_a) satisfait

$$\omega_a \wedge \omega_b \in \mathcal{H}_\delta^{s,\ell} \,\mathrm{vol}^{g_0}\,. \tag{25}$$

On définit aussi l'espace $\mathcal{T}_\delta^{s,\ell}$ des triplets de 1-formes (α_a) :

i. à coefficients $\mathcal{H}_{2,\delta}^{s,\ell}$ dans la base (e^i),
ii. dont la coordonnée sur e^1 s'annule sur X (donc il s'agit de formes s'étendant jusqu'au bord X en des formes de classe C^1),
iii. et tels que $i^*\alpha_1 = 0$ et $(d\alpha_a) \in \mathcal{Q}_\delta^{s-1,\ell}$.

Précisons la dernière condition : si les coefficients des α_a sont dans l'espace $\mathcal{H}_{2,\delta}^{s,\ell}$, ceux des $d\alpha_a$ sont dans $\mathcal{H}_{1,\delta}^{s-1,\ell}$; pour qu'ils soient en outre dans $x\mathcal{H}_\delta^{s-1,\ell}$, il faut et il suffit que leur restriction à X s'annule. Ces considérations aboutissent à expliciter les condition sur (α_a) par :

Lemme 3.2. — *Soit (α_a) un triplet de 1-formes, à coefficients $\mathcal{H}_{2,\delta}^{s,\ell}$ dans la base (e^i), dont le coefficient sur e^1 s'annule sur le bord X, et tel que $i^*\alpha_1 = 0$. Notons $\alpha_a = \alpha_{a,i}e^i$. Alors $(\alpha_a) \in \mathcal{T}_\delta^{s,\ell}$ si les coefficients*

$$\partial_x \alpha_{a,2} - X_2\alpha_{a,0}, \quad \partial_x \alpha_{a,3} - X_3\alpha_{a,0}, \quad X_2\alpha_{a,3} - X_3\alpha_{a,2} + \partial_x\alpha_{a,1}$$

s'annulent le long de X.

Démonstration. — Il suffit de prendre la différentielle extérieure de $\alpha_a = \alpha_{a,0}dx + \alpha_{a,1}x^{-1}\theta^1 + \alpha_{a,2}\theta^2 + \alpha_{a,3}\theta^3$, en tenant compte de $\alpha_{a,1}|_X = 0$, sachant que $d\theta^1 = \theta^2 \wedge \theta^3$ et que $d\theta^2$ et $d\theta^3$ sont verticales. (La troisième annulation est automatique pour α_1 puisque $i^*\alpha_1 = 0$). □

On considère alors P comme un opérateur

$$P : \mathcal{T}_\delta^{s+1,\ell} \longrightarrow \mathcal{H}_{\delta;\zeta}^{s,\ell}(\mathrm{Sym}_0^2 \mathbb{R}^3)\,\mathrm{vol}^{g_0}, \tag{26}$$

où l'indice ζ signifie, conformément à (22), que $v = (v_{ab}) \in \mathrm{Sym}_0^2 \mathbb{R}^3 \otimes \mathrm{vol}^{g_0}$ satisfait

$$\int_{M_0} v_{12} = \zeta_1 \cup \zeta_2, \quad \int_{M_0} v_{13} = \zeta_1 \cup \zeta_3. \tag{27}$$

Les métriques hyperkählériennes dans $\mathcal{Q}_\delta^{s,\ell}$ sont donc obtenues comme l'espace

$$\mathcal{M}_\delta^{s,\ell} = d(P^{-1}(0)) \subset \mathcal{Q}_\delta^{s,\ell}. \tag{28}$$

Par la construction twistorielle, toutes les métriques de $\mathcal{M}_\delta^{s,\ell}$ sont nécessairement lisses à l'intérieur de M_0, donc, à donnée du bord fixée, les différents

$\mathcal{M}_\delta^{s,\ell}$ ne diffèrent que par l'action de difféomorphismes non C^∞ (aucune jauge pour l'action des difféomorphismes n'est imposée dans notre construction). Par ailleurs, varier ℓ permet d'avoir des données au bord non régulières, mais ce n'est pas notre intérêt principal ici.

Théorème 3.3. — *L'opérateur P est une submersion en g_0. Par conséquent, $\mathcal{M}_\delta^{s,\ell}$ est une sous-variété hilbertienne de $\mathcal{Q}_\delta^{s,\ell}$, dont l'espace tangent en g_0 est $d(\ker d_{g_0}P)$.*

La seconde partie du théorème 0.1 en découle.

Le théorème 3.3 est une conséquence de la proposition 4.1, démontrée dans la section suivante.

4. Construction d'un inverse à droite

Soit Ω_+ le fibré des 2-formes autoduales, donc la base (ω_a) donne une trivialisation $\Omega_+ = \mathbb{R}^3$. Alors l'opérateur linéarisé $d_{g_0}P$ s'identifie à la composition de d_+ avec la projection $\Omega_+ \otimes \Omega_+ \to \mathrm{Sym}_0^2\,\Omega_+$,

$$\partial : \mathcal{T}_\delta^{s+1,\ell} \longrightarrow \mathcal{H}_{\delta;0}^{s,\ell}(\mathrm{Sym}_0^2\,\Omega_+), \tag{29}$$

où l'indice 0 marque maintenant la condition (27) linéarisée, à savoir, pour $v = (v_{ab}\omega_a \otimes \omega_b)$ symétrique,

$$\int_{M_0} v_{12}\,\mathrm{vol}^{g_0} = \int_{M_0} v_{13}\,\mathrm{vol}^{g_0} = 0. \tag{30}$$

On montre la surjectivité de ∂ en considérant plutôt le laplacien

$$\partial\partial^* = d_+d_+^* : \mathrm{Sym}_0^2\,\Omega_+ \longrightarrow \mathrm{Sym}_0^2\,\Omega_+. \tag{31}$$

Puisque $\Omega_+ = \mathbb{R}^3$ est plat, l'opérateur $\partial\partial^*$ s'identifie au laplacien scalaire Δ agissant sur chaque coefficient de la matrice symétrique. Un calcul direct donne

$$\Delta = -x^{-1}\left(\partial_x^2 + x^2X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right) + xF(\partial_x, xX_1, X_2, X_3), \tag{32}$$

où F est un opérateur différentiel, impair, à coefficients C^∞ jusqu'au bord. Le coefficient x provient de la parité de la métrique g, et, dans le cas plat, on a $F = 0$.

Dans la section 9, on montrera que le laplacien Δ sur M_0, considéré sur nos espaces fonctionnels, se comporte de manière similaire à un laplacien ordinaire sur une variété à bord. A priori, on considère l'opérateur

$$\Delta : x^3\mathcal{H}_\delta^{s+2,\ell} \longrightarrow \mathcal{H}_\delta^{s,\ell}.$$

Évidemment, cet opérateur n'est pas surjectif, car on ne peut pas espérer résoudre le problème de Dirichlet, par exemple, avec une donnée de Neumann nulle aussi. On s'attend plutôt à ce qu'une solution de $\Delta f = g$ avec $g \in \mathcal{H}^{s,\ell}_\delta$ soit dans l'espace $\mathcal{H}^{s+2,\ell}_{3,\delta}$, donc avec un développement près de X de la forme

$$f \sim f_0 + xf_1 + x^2 f_2 + x^3 f_3 + \cdots ,$$

dans lequel f_0 et f_1 sont indéterminés, mais f_2 et f_3 sont déterminés formellement par f_0 et f_1 et $g = \Delta f = O(1)$, donc en particulier

$$f_2 = -\frac{1}{2}(X_2^2 + X_3^2) f_0. \tag{33}$$

(On a l'équation similaire sur f_3, avec un terme additionnel $g|_X$).

On démontrera dans la section 9 (proposition 9.6) que, pour $g \in \mathcal{H}^{s,\ell}_\delta$, l'équation $\Delta f = g$ admet une unique solution $f \in \mathcal{H}^{s+2,\ell}_{3,\delta}$ dans les deux cas suivants :

- f satisfait la condition de Dirichlet (donc $f_0 = 0$ et $f_2 = 0$ par (33), on notera $f = \mathcal{D}g$;
- $\int_{M_0} g \operatorname{vol}^{g_0} = 0$, $\int_{M_0} f \operatorname{vol}^{g_0} = 0$ et f satisfait la condition de Neumann ($f_1 = 0$), on notera $f = \mathcal{N}g$.

Construisons alors un premier inverse à droite, R_1, pour l'opérateur (29) : partant d'une matrice symétrique à trace nulle $v = (v_{ab}\omega_a \otimes \omega_b)$, satisfaisant (30), définissons

$$R_1 v = d_+^* w, \text{ où } w = \begin{pmatrix} \mathcal{D}v_{11} & \mathcal{N}v_{12} & \mathcal{N}v_{13} \\ \mathcal{N}v_{21} & \mathcal{D}v_{22} & \mathcal{D}v_{23} \\ \mathcal{N}v_{31} & \mathcal{D}v_{32} & \mathcal{D}v_{33} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Dans cette écriture, la matrice est écrite dans la base des ω_a et représente donc un élément de $\operatorname{Sym}^2_0 \Omega_+$.

Les conditions (30) légitiment l'emploi de la solution du problème de Neumann sur les coefficients v_{12} et v_{13}. Il est possible de comprendre le choix du problème de Dirichlet ou de Neumann par la parité (2) attendue pour la solution.

L'opérateur R_1 n'est qu'une première approximation à l'inverse à construire. En effet, $\alpha = R_1 v \notin \mathcal{T}^{s+1,\ell}_\delta$ en général : posons $\alpha = (\alpha_a) = d_+^* w$, où w est défini dans (34), et $\alpha_a = \alpha_{a,j} e^j$, alors on calcule (voir (39))

$$\alpha_{1,1}|_X = \partial_x w_{11} + X_3 w_{12} - X_2 w_{13} =: \varphi. \tag{35}$$

Ce terme va être corrigé en utilisant une liberté de choix sur α, provenant de l'action infinitésimale des difféomorphismes : si ξ est un champ de vecteurs sur M_0, alors $(\imath_\xi \omega_a)$ correspond à modifier les ω_a par l'action infinitésimale de ξ, donc $(\imath_\xi \omega_a) \in \ker d_{g_0} P$.

Par construction, $\varphi \in \mathrm{FS}^{\ell+2+\delta}$. Appliquons l'opérateur de prolongement E_2 pour obtenir un prolongement $\tilde{\varphi} = E_2 \varphi \in \mathcal{H}^{s+2,\ell}_{2,\delta}$ de φ à l'intérieur de M_0, dans un voisinage de X, et définissons le champ de vecteurs

$$\xi = \tilde{\varphi} x^{-1} \partial_x + (X_2 \tilde{\varphi}) X_2 + (X_3 \tilde{\varphi}) X_3. \tag{36}$$

Le premier coefficient du champ ξ est calculé de sorte que $\imath_\xi \omega_1 = \varphi x^{-1} \theta^1$ sur X. La présence de coefficients de X_2 et X_3 permet de préserver la structure de contact sur X, voir section 5. Alors l'inverse à droite voulu est donné par :

Proposition 4.1. — *L'opérateur*

$$Rv = R_1 v - (\imath_\xi \omega_a) \tag{37}$$

est un inverse à droite de $d_{g_0} P : \mathcal{T}^{s+1,\ell}_\delta \to \mathcal{H}^{s,\ell}_{\delta;0}(\operatorname{Sym}^2_0 \Omega_+)$.

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de la proposition. On sait que R est un inverse à droite, le problème ici est de vérifier qu'il s'agit d'un opérateur entre les espaces spécifiés.

Nous commençons par calculer $\eta = d^* w$. Nous avons $\eta_b = \sum_1^3 I_a dw_{ab}$. Pour obtenir le comportement près de X, observons que le comportement asymptotique (7) implique que (e^0, e^1, e^2, e^3) est une base quaternionienne standard le long de X, donc

$$\begin{cases} J_a e^0 = e^a + O(x^2), & a = 1,2,3, \\ J_a e^b = \epsilon_{abc} e^c + O(x^2), & (abc) \text{ permutation de } (123). \end{cases} \tag{38}$$

Ici $O(x^2)$ vise les coefficients dans la base (e^i) ; cette décroissance provient de la propriété de parité (2) de la métrique.

Les coefficients de η_b dans la base (e^i) sont automatiquement dans l'espace $\mathcal{H}^{s+1,\ell}_{2,\delta}$. Explicitons les deux premiers termes : la restriction à X et la dérivée normale. Un calcul direct donne, modulo $x^2 \mathcal{H}^{s+1,\ell}_\delta$,

(39)
$$\begin{aligned} \eta_b = (-x X_1 w_{1b} - X_2 w_{2b} - X_3 w_{3b}) dx + (\partial_x w_{1b} + X_3 w_{2b} - X_2 w_{3b}) x^{-1} \theta^1 \\ + (-X_3 w_{1b} + \partial_x w_{2b} + x X_1 w_{3b}) \theta^2 + (X_2 w_{1b} - x X_1 w_{2b} + \partial_x w_{3b}) \theta^3. \end{aligned}$$

Analysons maintenant les

$$\alpha_b = \eta_b - \iota_\xi \omega_b$$

pour vérifier les conditions du lemme 3.2. Récrivons, toujours modulo $x^2 \mathcal{H}^{s+1,\ell}_\delta$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = {} & (-X_2 w_{21} - X_3 w_{31}) dx \\ & + (\partial_x w_{11} + X_3 w_{21} - X_2 w_{31} - \tilde{\varphi}) x^{-1} \theta^1 \\ & + (-X_3 w_{11} + \partial_x w_{21} + x X_1 w_{31} + x X_3 \tilde{\varphi}) \theta^2 \\ & + (X_2 w_{11} - x X_1 w_{21} + \partial_x w_{31} - x X_2 \tilde{\varphi}) \theta^3. \end{aligned} \tag{40}$$

Observons que la restriction à X du coefficient de η_1 sur $e^1 = x^{-1}\theta_1$ est exactement la fonction φ définie par (35), donc le coefficient de α_1 sur $e^1 = x^{-1}\theta^1$ est nul, et en outre

$$(\partial_x \alpha_{1,1})|_X = \partial_x^2 w_{11} + \partial_x X_3 w_{21} - \partial_x X_2 w_{31} = 0$$

car w_{21} et w_{31} satisfont la condition de Neumann, et la condition de Dirichlet pour w_{11} donne avec (33) l'annulation $\partial_x^2 w_{11}|_X = 0$. Les conditions au bord impliquent aussi que $\alpha_{1,2}|_X = \alpha_{1,3}|_X = 0$, donc finalement $i^*\alpha_1 = 0$.

Vérifions en outre pour α_1 les annulations requises par le lemme 3.2 : en remplaçant φ par sa valeur,

(41)
$$(\partial_x \alpha_{1,2} - X_2 \alpha_{1,0})\,|_X = \left(\partial_x^2 + X_2^2 + X_3^2\right) w_{21} + (X_1 + X_2 X_3 - X_3 X_2)\, w_{31}$$

qui est nulle, à cause de $X_1 = -[X_2, X_3]$ et de la contrainte (33) sur w_{21} ; la seconde annulation est similaire, et la dernière est une conséquence de $i^*\alpha_1 = 0$ que nous avons déjà vue.

Passons à α_2 (le cas de α_3 est similaire) : partons de la formule, modulo des termes dans $x^2\mathcal{H}_\delta^{s+1,\ell}$,

$$\begin{aligned}\alpha_2 = {} & (-xX_1 w_{12} - X_2 w_{22} - X_3 w_{32} + xX_2\tilde{\varphi})\, dx \\ & + (\partial_x w_{12} + X_3 w_{22} - X_2 w_{32} - xX_3\tilde{\varphi})\, x^{-1}\theta^1 \\ & + (-X_3 w_{12} + \partial_x w_{22} + xX_1 w_{32} - \tilde{\varphi})\, \theta^2 \\ & + (X_2 w_{12} - xX_1 w_{22} + \partial_x w_{32})\, \theta^3.\end{aligned} \tag{42}$$

Les conditions au bord donnent bien l'annulation sur X du coefficient de $e^1 = x^{-1}\theta^1$. Les deux premières annulations requises par le lemme 3.2 sont évidentes, et la dernière résulte d'un calcul direct. Cela conclut la preuve de la proposition 4.1. □

5. Les déformations infinitésimales

Il résulte du théorème 3.3 que l'espace tangent à $\mathcal{M}^s$ est constitué des différentielles extérieures des triplets de 1-formes (η_a), à coefficients $\mathcal{H}_{2,\delta}^{s+1,\ell}$ dans la base (e^i), tels que $i^*\eta_1 = 0$, $d\eta_a \in x\mathcal{H}_\delta^{s,\ell}$, et satisfaisant les équations

$$\omega^c \wedge d\eta^c = 0, \tag{43}$$

$$\omega_1 \wedge d\eta^c + d\eta_1 \wedge \omega^c = 0, \tag{44}$$

$$\omega_1 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\omega^c \wedge d\overline{\eta^c}\right) = 0. \tag{45}$$

Ici on a noté $\eta^c = \eta_2 + i\eta_3$.

La première équation, (43), dit juste que $d\eta^c$ est une déformation infinitésimale de la structure symplectique holomorphe ω^c. La condition au bord ($i^* d\eta^c$ verticale) dit que la structure complexe continue à préserver la distribution de contact $H \subset TX$.

La deuxième équation, (44), est une condition de compatibilité de la forme de Kähler ω_1 à la structure complexe. Elle se récrit en termes de la partie de type (0,1) pour J_1 :

$$\bar\partial(\eta_1^{0,1} \wedge \omega^c) = -\omega_1 \wedge d\eta^c. \tag{46}$$

LEMME 5.1. — *Étant donné η^c, l'équation (46) a toujours des solutions η_1.*

Ce lemme s'interprète en disant que, au moins au niveau infinitésimal, la classe $\zeta_1 \in H^2(M_0, X)$ demeure de Kähler pour la déformation infinitésimale donnée par η^c. Cela est plausible car la forme ω^c, de type (2,0), non nulle au bord, ne contribue pas à la cohomologie relative $H^2(M_0, X)$.

Démonstration. — Plutôt que de résoudre (46), on se ramène à un laplacien en considérant l'équation

$$\bar\partial\bar\partial^*(f \operatorname{vol}^{g_0}) = \frac{1}{2}\omega_1 \wedge d\eta^c, \tag{47}$$

dont une solution f produit une solution de (46) en posant

$$\eta^{0,1} = J_2 \partial f. \tag{48}$$

Récrivons l'équation (47) comme

$$\Delta f = -2\Lambda d\eta^c. \tag{49}$$

Or $\int_{M_0} \omega_1 \wedge d\eta^c = 0$, donc on peut prendre pour f la solution du problème de Neumann. Comme les coefficients de $d\eta^c$ dans la base $(e^i \wedge e^j)$ sont dans $x\mathcal{H}_\delta^{s,\ell}$, on a $\Lambda d\eta^c \in \mathcal{H}_\delta^{s,\ell}$, et donc $f \in \mathcal{H}_{3,\delta}^{s+2,\ell}$. Modulo des termes dans $x^2\mathcal{H}_\delta^{s+1,\ell}$, on obtient

$$J_2\partial f = \{(\partial_x - ixX_1)f\}\left(\theta^2 - i\theta^3\right) - \{(X_2 - iX_3)f\}\left(dx - ix^{-1}\theta^1\right). \tag{50}$$

Nous devons maintenant vérifier que $J_2\partial f$ satisfait les conditions au bord voulues. Grâce à la condition de Neumann, le premier coefficient $(\partial_x - ixX_1)f \in x\mathcal{H}_\delta^{s+1,\ell}$. A priori, le second coefficient n'a pas de raison de s'annuler : ici on utilise le fait que l'équation à résoudre est (46), donc on peut modifier $J_2\partial f$ par un terme $\bar\partial g$. On pose alors

$$\eta^{0,1} = J_2\partial f + \bar\partial(2xh), \quad h = E_2\left((X_2 - iX_3)f|_X\right) \in \mathcal{H}_{2,\delta}^{s+1,\ell}.$$

Nous obtenons alors $\eta^{0,1} = a(dx - ix^{-1}\theta^1) + b(\theta^2 - i\theta^3)$ modulo $x^2\mathcal{H}^{s+1,\ell}_\delta$, avec

$$\begin{aligned} a &= -(X_2 - iX_3)f + h + x(\partial_x + ixX_1)h \\ b &= (\partial_x - ixX_1)f + x(X_2 + iX_3)f. \end{aligned} \tag{51}$$

Écrivons $\eta = \mathrm{Re}(a)dx + \mathrm{Im}(a)x^{-1}\theta^1 + \mathrm{Re}(b)\theta^2 + \mathrm{Im}(b)\theta^3$; la condition au bord $i^*\eta = 0$ s'écrit

$$\mathrm{Im}(a) = \partial_x \mathrm{Im}(a) = 0, \quad b = 0, \tag{52}$$

tandis que les conditions du lemme 3.2 sont

$$\partial_x \mathrm{Re}(b) - X_2 \mathrm{Re}(a) = 0, \quad \partial_x \mathrm{Im}(b) - X_3 \mathrm{Re}(a) = 0. \tag{53}$$

À partir de (51), les conditions (52) sont immédiates, et on a même au bord $a = 0$. La condition (53) se réduit donc à $\partial_x b|_X = 0$, et on calcule

$$\begin{aligned} \partial_x b &= \partial_x^2 f - iX_1 f + (X_2 + iX_3)(X_2 - iX_3) f \\ &= \left(\partial_x^2 + X_2^2 + X_3^2\right) f - i(X_1 + X_2X_3 - X_3X_2) f. \end{aligned}$$

Comme $\Delta f \in \mathcal{H}^{s,\ell}_\delta$, il faut que $(\partial_x^2 + X_2^2 + X_3^2)f$ s'annule sur X ; le second terme s'annule aussi puisque $X_1 = -[X_2, X_3]$. □

Supposons donnée maintenant une solution (η_1, η^c) de (43) et (44). Considérons fixée la variation de structure symplectique holomorphe, représentée par η^c, et tentons de modifier η_1 de sorte de résoudre aussi la dernière équation (45), tout en préservant (44) : on a donc la flexibilité de modifier $\eta_1^{0,1}$ par un terme $\bar\partial g$. Discutons la condition au bord sur g : il faut $i^*\eta_1 = 0$ et donc $\bar\partial_H g = 0$ sur X, c'est-à-dire que $g|_X$ est une fonction holomorphe au sens CR sur X.

Dans un premier temps, nous allons discuter uniquement les déformations telles que $g|_X = 0$, et nous étudierons les déformations résiduelles dans la section suivante.

Si g est réelle, alors η_1 est modifiée par dg ce qui ne modifie pas ω_1 ; en revanche, si $g = if$ est imaginaire pure, alors η_1 est modifiée par $d^C f$, et l'équation (45) devient

$$\Lambda dd^C f = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\omega^c \wedge d\overline{\eta^c}) - \Lambda d\eta_1. \tag{54}$$

Ce n'est rien d'autre que la linéarisation de l'équation de Monge-Ampère à résoudre pour obtenir une métrique kählérienne Ricci plate.

On peut résoudre (54) avec la condition de Dirichlet $f|_X = 0$. Cette solution satisfait $f \in x\mathcal{H}^{s+2,\ell}_{2,\delta}$ et à nouveau, modulo des termes dans $x^2\mathcal{H}^{s+1,\ell}_\delta$, la modification de η_1 est, près de X,

$$d^C f = -xX_1 f dx + (\partial_x f)x^{-1}\theta^1 - X_3 f\theta^2 + X_2 f\theta^3. \tag{55}$$

Tous les coefficients s'annulent sur X, sauf le terme singulier :

$$(\partial_x f)x^{-1}\theta^1. \tag{56}$$

Comme on a vu, on peut encore modifier η_1 par un terme dg, mais cela ne permet pas de compenser ce terme singulier. Il y a donc une obstruction à résoudre le problème : il n'existe pas pour tout η^c de solution $\eta_1 = d^C f$ ($f|_X = 0$) du problème (44)–(45).

Néanmoins, on peut éliminer le terme (56) par un difféomorphisme infinitésimal agissant sur le triplet (ω_a) : posant $\psi = E_2(\partial_x f|_X) \in \mathcal{H}^{s+2,\ell}_{2,\delta}$, on définit le champ de vecteurs

$$\xi = \psi x^{-1}\partial_x + (X_2\psi)X_2 + (X_3\psi)X_3. \tag{57}$$

Lemme 5.2. — *Les 1-formes $(\eta^c - \imath_\xi\omega^c, \eta_1 + d^C f - \imath_\xi\omega_1)$ sont solutions du système (43)–(45) et satisfont les conditions au bord.*

Démonstration. — Il reste juste à vérifier les conditions au bord. Modulo des termes $O(x^2)$, on a

$$\begin{aligned} d^C f - \imath_\xi\omega_1 &= - xX_1 f dx + (\partial_x f - \psi)x^{-1}\theta^1 \\ &\qquad - X_3(f - x\psi)\theta^2 + X_2(f - x\psi)\theta^3, \\ \imath_\xi\omega^c &= - x(X_2 + iX_3)\psi(dx + ix^{-1}\theta^1) + \psi(\theta^2 + i\theta^3), \end{aligned}$$

et les conditions du lemme 3.2 se vérifient facilement. □

Bien entendu, l'annulation qui vient d'être montrée est la raison de la présence des termes $(X_b\psi)X_b$ dans la formule (57), comme dans (36).

Synthétisons ce que nous venons de démontrer. Étant donnée une déformation holomorphe symplectique infinitésimale $d\eta^c$, nous pouvons compléter η^c en une solution du système (43)–(45), à la condition d'autoriser l'action de difféomorphismes infinitésimaux comme dans (57). Or, le changement de variable $y = x^2/2$ ($x > 0$) fait disparaitre la singularité de la structure holomorphe symplectique sur X, et $x^{-1}\partial_x = \partial_y$, donc nous voyons que cela correspond à déplacer infinitésimalement le bord de M_s ; en outre, la fonction ψ dans (57) étant parfaitement déterminée, le déplacement infinitésimal est uniquement déterminé. Cela achève la démonstration de la première partie du théorème 0.1, et justifie la question posée dans l'introduction, qui est une question de résolution du problème de Monge-Ampère dans cette situation, avec frontière libre.

Concluons en remarquant que cette question se comprend très bien dans le formalisme de Donaldson, consistant à chercher une métrique Kähler-Einstein dans l'orbite complexifiée du groupe des symplectomorphismes. Dans notre situation, il faut penser au groupe des symplectomorphismes comme induisant au bord un contactomorphisme. Or la complexification d'un contactomorphisme infinitésimal déplace nécessairement le bord : en fait, le champ ξ dans (57) n'est autre que le complexifié du contactomorphisme infinitésimal

$$-\psi X_1 + (X_3\psi)X_2 - (X_2\psi)X_3.$$

Comme on l'a vu, les contactomorphismes complexifiés continuent à induire la structure de contact fixée H sur X. Voyant ainsi $X \subset N$ comme hypersurface dans une variété holomorphe symplectique (sans singularité), il est naturel d'identifier la complexification du groupe des contactomorphismes aux plongements $\phi : X \to N$ tels que la structure CR induite par ϕ sur X demeure définie sur la structure de contact H. Les champs de vecteurs (57) en sont exactement la version infinitésimale.

6. Les déformations infinitésimales de Hitchin

Examinons à présent les solutions additionnelles du système (43)–(45) provenant d'un potentiel non nul sur le bord X. Comme on a vu, la modification de $\eta^{0,1}$ par $\bar\partial g$ ne modifie pas les équations (43) et (44), et la condition au bord $i^*\eta_1 = 0$ exige $\bar\partial_H(g|_X) = 0$.

Nous restreignons la discussion au cas modèle, sur le fibré en disques de $T^*\Sigma$. Si ω_Σ est la forme de Kähler à courbure -1 sur Σ, alors il résulte des formules dans [5] qu'on peut écrire la métrique hyperkählérienne pliée par la formule

$$\omega_1 = \sqrt{1-r^2}\,p^*\omega_\Sigma + \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr \wedge \eta, \tag{58}$$

où $p : T^*\Sigma \to \Sigma$ est la projection, r est la distance dans la fibre de $T^*\Sigma$, et η est la 1-forme de connexion sur le fibré en cercles, donc $d\eta = -\omega_\Sigma$. (On a $\eta = -\theta^1$, où θ^1 est la forme définie section 1).

Soit $g \in \mathrm{FS}^{\ell+3+\delta}$ une fonction CR-holomorphe sur X, alors on peut résoudre le problème de Dirichlet

$$\Delta\tilde g = 0, \quad \tilde g|_X = g, \tag{59}$$

avec $\tilde g \in \mathcal{H}^{s+2,\ell}_{3,\delta}$. Posant $\eta_1 = \mathrm{Re}(\bar\partial\tilde g)$, on obtient

$$\omega_1 \wedge d\eta_1 = \mathrm{Re}(\omega_1 \wedge \partial\bar\partial\tilde g) = 0,$$

donc on obtient une solution infinitésimale ($\eta^c = 0, \eta_1 = \mathrm{Re}(\bar\partial\tilde g)$) du système linéarisé (43)–(45). Ces solutions ne modifient pas la structure holomorphe symplectique, au moins infinitésimalement.

De manière explicite, les fonctions CR-holomorphes sur X ont une décomposition en séries de Fourier, $g = \sum_{n\leqslant 0} g_n$ et $g_n \in H^0(\Sigma, K^{-n})$. Pour $n = 0$, la fonction g_0 est constante, donc son extension $\tilde g_0$ aussi, donc $\eta_1 = 0$. Supposons donc $n < 0$. Sans rentrer dans le détail des calculs, on voit que Δ préserve les fonctions du type $a(r)g_n$, donc l'extension $\tilde g_n$ de g_n est du même type. Il en résulte aussi que $\bar\partial \tilde g_n$ est encore du même type :

$$\bar\partial \tilde g_n = \varphi_n(r) g_n \left(\frac{dr}{r} - i\eta \right). \tag{60}$$

À partir de là, il est facile d'expliciter $\tilde g$ mais nous n'avons pas besoin de la formule précise. L'équation $\Lambda \partial\bar\partial \tilde g_n = 0$ mène rapidement à $\varphi_n(r) = \Phi_n \frac{r^{-n}}{\sqrt{1-r^2}}$ pour une certaine constante Φ_n. Finalement, on obtient

$$\bar\partial \tilde g = -\iota_\xi \omega_1 \tag{61}$$

avec

$$\xi = \sum_{n \leqslant 0} \xi_n, \quad \xi_n = 2i\Phi_n g_n \frac{r^{-n}}{\bar w} \frac{\partial}{\partial w}, \tag{62}$$

où $w\partial_w$ est le champ de vecteurs (holomorphe) d'homothétie dans les fibres. La fonction $r^{-n} g_n / \bar w$ coïncide, à une constante près, avec $\bar w^{-n-1}$ sur chaque disque.

Pour vérifier nos conditions au bord, transformons la solution précédente par l'action infinitésimale de ξ pour obtenir plutôt la solution $(\eta^c = \iota_\xi \omega^c, \eta_1 = 0)$. Remarquant que pour $n = -1$, le champ ξ_1 préserve ω^c, on obtient :

Proposition 6.1. — *Pour toute fonction $g \in \mathrm{FS}^{\ell+3+\delta}$ CR-holomorphe sur X, définissons ξ par (61), où $\tilde g$ est l'extension harmonique de g, alors $(\eta^c = \iota_\xi \omega^c, \eta_1 = 0)$ définit un vecteur tangent à $\mathcal{M}^{s,\ell}_\delta$, c'est-à-dire est une solution infinitésimale des équations et satisfait les conditions au bord. La variation est non triviale pour les fréquences différentes de 0 et -1, donc on obtient des déformations infinitésimales paramétrées par*

$$\oplus_{n \leqslant -2} H^0(\Sigma, K^{-n}). \tag{63}$$

□

Ces déformations infinitésimales ont été trouvées par Hitchin [12, §9]. Notre approche dans cette section montre qu'on obtient ainsi *toutes* les déformations infinitésimales qui restent sur la variété holomorphe symplectique $T^*\Sigma$. Grâce à la proposition ci-dessus, elles donnent des vecteurs tangents dans $\mathcal{M}^{s,\ell}_\delta$, et donc sont tangentes à des déformations par de vraies métriques hyperkählériennes pliées. Les sections suivantes ont pour objet de montrer que ces métriques hyperkählériennes peuvent être prises de sorte que leur structure holomorphe symplectique soit bien celle d'un domaine de $T^*\Sigma$.

REMARQUE 6.2. — On peut vérifier que les polynômes invariants définis par Hitchin [12, §8.2], à savoir

$$p_n = \left(\int_{M_0/\Sigma} w^n \omega_1 \right) dz^n \in H^0(\Sigma, K^n), \tag{64}$$

évalués sur ces déformations infinitésimales, redonnent bien le paramètre $g \in \oplus_{n \geqslant 2} H^0(\Sigma, K^n)$. En effet, faisons le calcul en considérant que g paramètre la déformation infinitésimale ($\eta^c = 0, \eta_1 = -\imath_\xi \omega_1$), que nous choisissons ainsi puisque la structure de cotangent de $T^*\Sigma$ est préservée. Dans le calcul de la variation infinitésimale de p_m, il faut faire attention à prendre en compte la variation du domaine dans $T^*\Sigma$, qui se traduit par une contribution $\int_{X/\Sigma} w^n \imath_\xi \omega_1$ dans l'intégrale. Ainsi, la variation infinitésimale de p_m est

$$\begin{aligned}
\dot{p}_n &= \left(\int_{M_0/\Sigma} w^n d\eta_1 - \int_{X/\Sigma} w^n \eta_1 \right) dz^n \\
&= \left(\int_{M_0/\Sigma} -w^n \frac{dw}{w} \wedge \eta_1 \right) dz^n \\
&= \left(\int_{M_0/\Sigma} -w^n \frac{dw}{w} \wedge \bar{\partial} \tilde{g} \right) dz^n \\
&= \left(\int_{X/\Sigma} w^n g \frac{dw}{w} \right) dz^n \\
&= g_n.
\end{aligned}$$

7. Paramétrisation des domaines dans le cotangent

Nous proposons ici une paramétrisation des déformations du domaine $M_s \subset T^*\Sigma$. Le résultat essentiel est le théorème 7.3 qui permet une paramétrisation sans perte de dérivées. Pour l'étude générale de toutes les déformations d'un tel domaine pseudoconcave, on pourra consulter [9].

Une approche plus simple consisterait à paramétrer ces déformations par les plongements $\varphi : X \to N$ qui induisent la même structure de contact sur X. Si l'image est restreinte à X, on paramètre ainsi les contactomorphismes par une fonction réelle (voir [6], ou [3, §5] pour le cas S^1 invariant) : cette paramétrisation peut se faire sans perte de dérivées, et est basée sur les propriétés du complexe de Rumin. Comme expliqué à la fin de la section 5, le cas général correspond à la complexification du groupe des contactomorphismes, le complexe de Rumin est à remplacer par le complexe du $\bar{\partial}_H$ sur la variété CR X, mais les mauvaises propriétés analytiques de $\bar\partial_H$ semblent empêcher une construction similaire. Nous adoptons donc dans cette section une approche complètement différente.

Une déformation J de la structure complexe J_0 de M_s est paramétrée par un tenseur $\phi \in \Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}$ (les bi-degrés sont pour J_0) tel que l'espace des vecteurs de type $(0,1)$ pour J soit le graphe de $\phi : T^{0,1} \to T^{1,0}$,

$$T_J^{0,1} = \left\{ \xi + \phi_\xi, \xi \in T_{J_0}^{0,1} \right\}.$$

A priori, un tel ϕ ne définit qu'une structure presque complexe J ; elle est intégrable si

$$\bar\partial\phi + \frac{1}{2}[\phi,\phi] = 0, \tag{65}$$

où $[\phi,\phi]$ fait intervenir le produit extérieur des formes et le crochet des champs de vecteurs.

La structure complexe J induit sur le bord $X = \partial M_s$ une structure CR. Quitte à agir par un difféomorphisme, on peut supposer que la structure CR garde la même distribution de contact sous-jacente H. En outre, comme M_s est un fibré holomorphe en disques, nous avons une décomposition globale, S^1-invariante,

$$TM = H \oplus V,$$

où $V = \ker p_*$ et H est l'horizontal fourni par la structure de contact.

Par [3, Théorème 4.1], toute petite déformation de J pour laquelle $\Sigma \subset M_s$ demeure une sous-variété holomorphe, après action d'un difféomorphisme unique modulo S^1, s'écrit dans cette décomposition sous la forme

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{66}$$

où $\psi \in \Omega^{0,1}H \otimes H^{1,0} = p^*(\Omega_\Sigma^{0,1} \otimes T_\Sigma^{1,0})$ est holomorphe le long de chaque disque de la fibration p (cela a un sens puisque le fibré $\Omega_\Sigma^{0,1} \otimes T_\Sigma^{1,0}$ est trivial le long de chaque disque) : donc, décomposant en séries de Fourier pour l'action de S^1,

$$\psi = \sum_{n\geqslant 0} \psi_n, \text{ où } \psi_n|_{p^{-1}(x)} = F_n(x) w^n, \tag{67}$$

où w est un choix de coordonnée holomorphe sur le disque $p^{-1}(x)$. Plus intrinsèquement, on peut voir w comme un point de l'espace total du fibré K, et F_n comme une section sur Σ de $K^{-n} \otimes \Omega_\Sigma^{0,1} \otimes T_\Sigma^{1,0} = K^{-n-1} \otimes \Omega_\Sigma^{0,1}$.

Réciproquement, la donnée d'un tel ψ, holomorphe le long des disques de la fibration, induit une déformation complexe ϕ donnée par (66), satisfaisant $[\phi,\phi] = 0$ et donc l'équation d'intégrabilité (65).

Parmi ces déformations holomorphes, cherchons celles qui demeurent un domaine dans un cotangent holomorphe $T^*\Sigma$. Nous demandons ainsi l'existence d'une projection $\pi : M_s \to \Sigma$ et d'une 2-forme complexe Ω, telles que

$$\begin{aligned} \Omega &\in \Omega_J^{2,0};\\ d\Omega &= 0;\\ \bar\partial_J \pi &= 0. \end{aligned} \tag{68}$$

On obtient alors immédiatement que $\Omega = d\Theta$ avec Θ une 1-forme s'annulant sur les fibres de π et sur Σ : la forme Θ identifie alors M_s avec $T^*\Sigma$, dont elle apparaît comme la forme de Liouville.

Analysons tout d'abord les conditions sur Ω. La première condition permet d'écrire, pour une (1,0)-forme horizontale α,

$$\Omega = (\alpha - \psi\lrcorner\alpha) \wedge \eta^{1,0}, \tag{69}$$

d'où

$$d\Omega = d(\alpha - \psi\lrcorner\alpha) \wedge \eta^{1,0}. \tag{70}$$

La deuxième condition, équivalente à $\bar\partial_J \Omega = 0$, se traduit par

$$\begin{aligned} &\imath_{\bar w \partial_{\bar w}} d\Omega = 0,\\ &\imath_{\xi+\psi_\xi} d\Omega = 0 \text{ pour } \xi \in H^{1,0}. \end{aligned} \tag{71}$$

La première équation dans (71) mène à

$$\partial_{\bar w}(\alpha - \psi\lrcorner\alpha) = 0, \tag{72}$$

c'est-à-dire α et $\psi\lrcorner\alpha$ sont holomorphes le long des disques de la fibration, ce qui, puisque ψ est déjà holomorphe le long des disques, est équivalent à α holomorphe le long des disques ; on a

$$\imath_{\xi+\psi_\xi} d\Omega = \big(\imath_{\xi+\psi_\xi} d(\alpha - \psi\lrcorner\alpha)\big) \wedge \eta^{1,0}; \tag{73}$$

comme $\imath_{\xi+\psi_\xi} d\Omega \in \Omega_J^{2,0}$, son annulation est équivalente à celle de sa projection sur $\Omega_{J_0}^{2,0}$, donc, notant d_H, $\bar\partial_H$ et ∂_H les restrictions à H de d, $\bar\partial$ et ∂, la seconde équation de (71) est équivalente à

$$\bar\partial_H \alpha - \partial_H(\psi\lrcorner\alpha) = 0. \tag{74}$$

Nous pouvons résumer ces observations dans le lemme suivant.

Lemme 7.1. — *Les 2-formes sur M_s satisfaisant les deux premières équations de (68) sont en correspondance avec les (1,0)-formes horizontales α sur X, telles que*

i. *α n'a des coefficients non nuls que pour des fréquences strictement positives ;*
ii. *α satisfait l'équation (74) sur X, qui n'est autre que l'équation $\bar\partial_{H,J}(\alpha - \psi\lrcorner\alpha) = 0$.*

Démonstration. — Puisque α est holomorphe le long des disques, elle n'a de coefficients de Fourier non nuls qu'en fréquences positives. Sachant que $\eta^{1,0}$ s'identifie à $\frac{dw}{2iw}$ sur chaque disque, pour que Ω s'étende à la section nulle, il faut que les coefficients invariants par rotation s'annulent aussi, donc α n'a de coefficients non nuls qu'en fréquences strictement positives. Dans ces conditions, puisque ψ aussi est holomorphe le long des disques, le système (74) est satisfait sur M_s si et seulement s'il est satisfait sur le bord X. □

Revenons maintenant à l'équation sur π, un peu plus subtile à analyser. Commençons par regarder les applications $\pi : M_s \to \Sigma$, déformations de p, et holomorphes le long des disques. Étant donné un point $\sigma \in \Sigma$, on peut choisir une coordonnée locale z autour de σ, et, au dessus d'un voisinage de σ, les projections π, holomorphes verticalement, s'identifient aux fonctions $z \circ \pi$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, holomorphes le long de chaque disque. Il apparaît ainsi que l'espace des applications $\pi : M \to \Sigma$, holomorphes verticalement, de régularité FS^m sur X, est une variété banachique bien définie que nous noterons $\mathcal{P}^m$, et dont l'espace tangent en p s'identifie aux sections sur X de $p^*T\Sigma$, de régularité FS^m, dont les coefficients non nuls sont en fréquences positives—nous noterons cet espace $\mathrm{FS}^m_{\geqslant 0}(p^*T\Sigma) = \mathrm{FS}^m_{\geqslant 0}(H^{1,0})$.

Les solutions de la troisième équation de (68) s'identifient à présent aux applications $\pi \in \mathcal{P}^m$, telles que sur le bord X on ait pour tout $\xi \in H^{0,1}$,

$$\pi_*(\xi + \psi_\xi) = 0, \tag{75}$$

ce qui, à nouveau, n'est autre que l'équation $\bar\partial_{H,J}\pi = 0$ sur X. En effet, en choisissant localement une coordonnée holomorphe z sur Σ, on voit qu'un élément de $\mathcal{P}^m$ satisfait l'équation (75) si et seulement s'il la satisfait sur X.

Il y a des solutions évidentes au système (68), provenant de la déformation de l'hypersurface X dans $T^*\Sigma$. Bien entendu, une telle déformation doit être suivie d'un difféomorphisme qui ramène le domaine délimité à la jauge particulière satisfaisant (66).

Explicitons ces solutions. Un contactomorphisme infinitésimal sur X est de la forme $\xi = gR - \sharp d_H g$, où g est une fonction réelle sur X, et $\sharp : \Omega^1 H \to H$ est défini par $\imath_{\sharp\alpha} d\eta = \alpha$. Il agit sur l'espace des structures complexes infinitésimales sur X par

$$\dot\psi = \bar\partial_H \sharp \bar\partial_H g. \tag{76}$$

Cette action se complexifie en décidant que la fonction g peut être à valeurs complexes : l'action infinitésimale est alors celle de la partie réelle du vecteur de type $(1,0)$ donné par

$$\xi^{1,0} = 2(gR^{1,0} - \sharp\bar\partial_H g) = 2(igw\partial_w - \sharp\bar\partial_H g), \tag{77}$$

et l'action sur les structures CR reste donnée par la formule (76).

On a déjà vu que ces champs de vecteurs le long de X sont la version infinitésimale des plongements $\varphi : X \to T^*\Sigma$ telles que la structure CR induite par φ sur X garde H comme structure de contact sous-jacente, qui sont un analogue de la complexification du groupe des contactomorphismes ; l'action (76) est exactement la complexification de l'action infinitésimale des contactomorphismes.

Comme il se doit, l'action des contactomorphismes ne préserve pas la jauge (les coefficients de Fourier positifs). En revanche, l'action complexifiée infinitésimale des fonctions g à fréquences positives préserve cette jauge, et la proposition suivante montre qu'on obtient ainsi toutes les déformations. Notant $\mathrm{FS}^m_{\geqslant 0}$ (resp. $\mathrm{FS}^m_{>0}$) les espaces de sections dont les coefficients non nuls se trouvent uniquement en fréquences positives (resp. strictement positives) :

Proposition 7.2. — *Soit $m \gg 0$. L'espace des*

$$(\psi, \alpha, \pi) \in \mathrm{FS}^m_{\geqslant 0} \times \mathrm{FS}^m_{>0} \times \mathcal{P}^{m+1}$$

satisfaisant (74) et (75) est une variété d'espace tangent paramétré par l'action infinitésimale des vecteurs donnés par la formule (77), où $g \in \mathrm{FS}^{m+2}_{\geqslant 0}$. Les formules sont

$$\dot\psi = \bar\partial_H \sharp \bar\partial_H g, \quad \dot\alpha = iR\cdot(g\Theta^0) - \partial_H \Lambda_\Sigma(\bar\partial_H g \wedge \Theta^0), \quad \dot\pi = -\sharp\bar\partial_H g.$$

Ici Θ^0 désigne la forme de Liouville initiale de $T^*\Sigma$. On remarquera aussi que la fonction constante $g \in \mathbb{R}$ correspond à multiplier Θ^0 par une constante imaginaire pure, ce qui ne change pas le domaine holomorphe symplectique. Cela correspond à l'ambiguïté de jauge dûe à l'action de S^1, donc on peut imposer $\operatorname{Re}\int_X g = 0$ quand on paramètre les déformations holomorphes symplectiques de M_s.

Démonstration. — Nous considérons donc l'opérateur

$$\begin{aligned} Q : \mathrm{FS}^m_{\geqslant 0}(\Omega^{0,1}H \otimes \Omega^{1,0}H) \times \mathrm{FS}^m_{>0}(\Omega^{1,0}H) \times \mathcal{P}^{m+1} & \\ \longrightarrow \mathrm{FS}^{m-1}_{>0}(\Omega^{0,1}H \otimes \Omega^{1,0}H) \times \mathrm{FS}^m_{\geqslant 0}(\Omega^{0,1} \otimes H^{1,0}),& \end{aligned} \tag{78}$$

défini par

$$Q(\psi, \alpha, \pi) = (\bar\partial_{H,J}(\alpha - \psi \lrcorner \alpha), \bar\partial_{H,J}\pi), \tag{79}$$

de linéarisation

$$L(\dot\psi,\dot\alpha,\dot\pi)=(\bar\partial_H\dot\alpha-\partial_H(\dot\psi\lrcorner\Theta^0),\bar\partial_H\dot\pi+\dot\psi).$$

La démonstration consiste maintenant à montrer que L est surjective et à identifier $\ker L$.

L'opérateur $\bar\partial_H$ sur X a une image fermée, mais de codimension infinie. Tout est explicite dans la décomposition en séries de Fourier : sur un fibré holomorphe L provenant de Σ, le conoyau en fréquence n est $H^1(K^{-n}\otimes L)=H^0(K^{n+1}\otimes L^*)^*$. Pour l'opérateur ∂_H, de manière similaire, l'image est fermée mais le conoyau en fréquence n est $H^0(K^{-n-1}\otimes L)^*$.

En particulier, passant à la conjugaison, nous voyons que le conoyau de $\partial_H:\Omega^{0,1}H\to\Omega^{1,1}H$ est $H^0(K^{-n})^*$, et en particulier s'annule en fréquences $n>0$, ce qui donne la surjectivité sur le premier facteur. En revanche, le noyau de ∂_H en fréquence n s'identifie à $H^0(K^{n+1})^*$.

Pour le second facteur, observons que le conoyau de $\dot\pi\mapsto\bar\partial_H\dot\pi$ s'identifie à $H^0(K^{n+1})^*$ en fréquence n, exactement compensé, comme on vient de le voir, par le noyau de $\dot\psi\mapsto\partial_H(\dot\psi\lrcorner\Theta^0)$.

Par conséquent, L est surjective, et l'espace des solutions du système (74) est une sous-variété, d'espace tangent égal à $\ker L$, que nous déterminons à présent. Soit donc $(\dot\psi,\dot\alpha,\dot\pi)\in\ker L$, il faut donc que $\dot\psi=-\bar\partial_H\dot\pi$, puis

$$\bar\partial_H\dot\alpha=-\partial_H\bar\partial_H f,\quad f=\dot\pi\lrcorner\Theta^0. \tag{80}$$

Utilisant la formule $\partial_H\bar\partial_H f+\bar\partial_H\partial_H f=d_H^2 f=R\cdot f\omega_\Sigma$ pour toute fonction f, on obtient

$$\bar\partial_H(\alpha-\partial_H f)=-R\cdot f\omega_\Sigma. \tag{81}$$

Rappelons à nouveau que l'image de $\bar\partial_H$ est fermée, donc on peut décomposer en somme orthogonale $\mathrm{FS}^{m+1}(\Omega^{1,1}H)=\operatorname{Im}\bar\partial_H\oplus\ker\bar\partial_H^*$. Comme la dérivation par R commute avec $\bar\partial_H$ et $\bar\partial_H^*$, elle envoie cette décomposition de FS^{m+1} sur la même décomposition de FS^{m-1}. Par conséquent, l'égalité (81) impose $f\omega_\Sigma\in\operatorname{Im}\bar\partial_H$, donc il existe $g\in\mathrm{FS}^{m+2}_{>0}$, unique à constante additive près, telle que $f\omega_\Sigma=-\bar\partial_H(g\Theta^0)$, ce qui s'écrit encore, si $\Theta_0\in H^{1,0}$ est dual à Θ^0,

$$f\Theta_0=-\sharp\bar\partial_H g.$$

À partir de là, on récupère $\dot\pi=-\sharp\bar\partial_H g$, puis $\dot\psi=\bar\partial_H\sharp\bar\partial_H g$, enfin, à partir de (81), on calcule

$$\dot\alpha=iR\cdot(g\Theta^0)-\partial_H\Lambda_\Sigma(\bar\partial_H g\wedge\Theta^0);$$

on peut vérifier que $(\dot\alpha-\dot\psi\lrcorner\Theta^0)\wedge\eta^{1,0}$ n'est autre que l'action infinitésimale de ξ sur la forme symplectique initiale $\Omega^0=d\Theta^0$ de $T^*\Sigma$. □

Nous synthétisons les résultats de cette section de la manière suivante. Notons $\mathcal{Q}^{s,\ell}_{\delta,\mathbb{C}}$ l'espace des 2-formes complexes $\omega^c = \omega_2 + i\omega_3$ telles que $(\omega_1 = 0, \omega_2, \omega_3) \in \mathcal{Q}^{s,\ell}_{\delta}$, et $\mathcal{M}^{s,\ell}_{\delta,\mathbb{C}} \subset \mathcal{Q}^{s,\ell}_{\delta,\mathbb{C}}$ l'espace des 2-formes ω^c telles que $(\omega^c)^2 = 0$. Enfin, notons $\mathrm{FS}^m_{\geqslant 0}(X)_0$ l'espace des fonctions $f \in \mathrm{FS}^m_{\geqslant 0}$ telles que $\mathrm{Re}\int_X g = 0$.

Théorème 7.3. — *On pose $\delta = \frac{1}{2}$ et $s = \ell + \frac{1}{2}$. Il existe une sous-variété $\mathcal{C}^{s,\ell}_{\delta} \subset \mathcal{M}^{s,\ell}_{\delta,\mathbb{C}}$ définie près du modèle M_s, qui contient toutes les petites déformations de M_s provenant d'une variation de X dans $T^*\Sigma$, et est transverse à l'action des difféomorphismes.*

En outre, il existe une paramétrisation $\mho : \mathrm{FS}^{\ell+2+\delta}_{\geqslant 0}(X)_0 \to \mathcal{C}^{s,\ell}_{\delta,\mathbb{C}}$, définie sur un voisinage de 0, telle que $d\mho(g)$ est la déformation infinitésimale de la forme initiale Ω^0 par l'action du champ de vecteurs

$$\xi = 2\,\mathrm{Re}(igw\partial_w - \sharp\bar{\partial}_H g),$$

prolongé holomorphiquement disque à disque le long des fibres de la projection $p : M_s \to \Sigma$.

Démonstration. — À partir de la proposition 7.2, nous obtenons des déformations de ω^c paramétrées par une fonction $g \in \mathrm{FS}^{\ell+2+\delta}_{\geqslant 0}(X)_0$. Malheureusement l'extension holomorphe disque à disque donne une régularité à l'intérieur qui est la même que celle au bord, donc $\omega^c \in \mathcal{C}^{\ell+\delta,\ell}_{\delta,\mathbb{C}}$ seulement. □

Remarque 7.4. — Le théorème est démontré pour la valeur spécifique de s écrite, mais en réalité, on peut régulariser les solutions obtenues par un difféomorphisme pour obtenir une paramétrisation dans $\mathcal{M}^{s,\ell}_{\delta,\mathbb{C}}$ pour $s \gg \ell$. (Cela correspond à l'idée qu'une forme holomorphe symplectique détermine des coordonnées holomorphes dans lesquelles elle s'exprime avec des coefficients C^∞). Cette régularisation se fait en résolvant un problème de jauge sur le difféomorphisme, ce qui est possible en étendant l'analyse de la section 9 du cas des fonctions au cas des champs de vecteurs ; pour éviter d'allonger inutilement l'article, on a donc préféré se limiter à cet énoncé. Précisons à nouveau qu'à la fin, on sait bien par la construction twistorielle que la métrique hyperkählérienne est C^∞ dans l'intérieur de M_0.

Remarque 7.5. — On s'attendrait à ce que la régularité des bords des domaines construits soit $\mathrm{FS}^{\ell+1+\delta}$, c'est-à-dire la régularité de ξ. Mais la forme de Liouville du cotangent, Θ, est récupérée en intégrant la forme holomorphe symplectique Ω le long des fibres de la projection π, ce qui ne permet pas de gain de régularité, et il en résulte qu'a priori la régularité des bords est seulement $\mathrm{FS}^{\ell+\delta}$. Cela illustre le problème de perte de dérivées que notre méthode a permis de contourner.

8. La composante de Hitchin pour $SL(\infty, \mathbb{R})$

Dans cette section, on se limite à nouveau à $\delta = \frac{1}{2}$ et $s = \ell + \frac{1}{2}$. La notation générale est laissée car les énoncés sont valables en réalité pour s plus grand, voir remarque 7.4, mais nous avons limité la démonstration à ce cas particulier.

Le théorème 8.2 montre l'existence d'une paramétrisation

$$\mho : \mathrm{FS}^{\ell+2+\delta} \to \mathcal{C}_\delta^{s,\ell} \subset \mathcal{M}_{\delta,\mathbb{C}}^{s,\ell},$$

telle que

$$d\mho(g) = \mathcal{L}_\xi \Omega^0, \quad \xi = 2\left(igw\partial_w - \sharp\bar{\partial}_H g\right), \tag{82}$$

où g a été étendue holomorphiquement disque à disque. En particulier, écrivant $g = g_1 + ig_2$, la modification infinitésimale du domaine $M_s \subset T^*\Sigma$ est donnée par le déplacement infinitésimal de $X \subset T^*\Sigma$ par le vecteur $\operatorname{Re}\xi$ le long de X :

$$\operatorname{Re}\xi|_X = \xi_1 + \xi_2, \quad \begin{cases} \xi_1 = -g_1 X_1 + (X_3 g_1) X_2 - (X_2 g_1) X_3, \\ \xi_2 = g_2 x^{-1}\partial_x + (X_2 g_2) X_2 + (X_3 g_2) X_3. \end{cases} \tag{83}$$

Définition 8.1. — La composante de Hitchin pour $SL(\infty, \mathbb{R})$ est constituée des couples $(\omega^c, \omega_1) \in \mathcal{M}_\delta^{s,\ell}$ tels que $\omega^c \in \mathcal{C}_\delta^{s,\ell}$, c'est-à-dire des domaines de $T^*\Sigma$ qui portent des métriques hyperkählériennes pliées.

On remarquera que restreindre ω^c à $\mathcal{C}_\delta^{s,\ell}$ tue ipso facto l'ambiguïté de jauge dûe à l'action des difféomorphismes.

D'autre part, la régularité finie n'est présente dans cette définition que pour des raisons techniques, on ne s'intéresse en réalité qu'à des objets lisses. Mais les solutions ne sont pas forcément lisses jusqu'au bord, d'où la nécessité d'en fixer la régularité.

Rappelons que la décomposition en séries de Fourier des fonctions CR holomorphes sur X est $\oplus_{n\geqslant 0} H^0(\Sigma, K^n)$ (une section de K^n correspond à une fonction de fréquence $-n$).

Théorème 8.2. — *Près de la structure standard, la composante de Hitchin pour $SL(\infty, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{C}_\delta^{s,\ell}$ dont l'espace tangent s'identifie à*

$$\mathrm{FS}^{\ell+2+\delta}(X) \cap \oplus_{n\geqslant 2} H^0(\Sigma, K^n),$$

c'est-à-dire aux fonctions CR holomorphes sur X de régularité $\mathrm{FS}^{\ell+2+\delta}$, modulo $\mathbb{C} \oplus H^0(\Sigma, K)$.

En particulier, près de la structure standard, les éléments de la composante de Hitchin sont déterminés par leurs polynômes invariants définis par (64).

Remarque 8.3. — Au vu de la remarque 6.2, quitte à appliquer un difféomorphisme, on peut supposer que la paramétrisation de la composante de Hitchin,

$$\mathrm{FS}^{\ell+2+\delta}(X) \cap \oplus_{n\geqslant 2} H^0(\Sigma, K^n) \longrightarrow \mathcal{M}_\delta^{s,\ell},$$

est une section de l'application de Hitchin qui à une solution associe ses polynômes invariants.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que la restriction à $\mathcal{C}_\delta^{s,\ell}$ de l'opérateur P considéré dans les sections 2 et 3, à savoir

$$Q : \left\{(\omega_1, \omega^c) \in \mathcal{Q}_\delta^{s,\ell} \text{ tel que } \omega^c \in \mathcal{C}_\delta^{s,\ell}\right\} \longrightarrow \mathcal{H}_{\delta;\zeta}^{s,\ell}(\mathbb{R}^3)$$

défini par

$$Q(\omega_1, \omega^c) = \left(\omega_1 \wedge \omega^c, \omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega^c \wedge \overline{\omega^c}\right),$$

est une submersion. Ici l'indice ζ signifie que l'image est restreinte au sous-espace

$$\int_{M_0} \omega_1 \wedge \omega^c = \zeta_1 \cup (\zeta_2 + i\zeta_3).$$

L'opérateur Q est clairement la restriction de l'opérateur P défini dans la section 2.

L'analyse est déjà faite dans la section 5, où l'on a vu qu'en la métrique standard, on peut toujours résoudre le système $dQ(d\eta_1, d\eta^c) = (v_1, v^c)$ par une solution du type

$$(\eta_1 = \eta_{1;0} + d^C f - \imath_{\xi_2}\omega_1, \eta^c = -\imath_{\xi_2}\omega^c), \tag{84}$$

avec ξ_2 un champ de vecteurs du type (57), à savoir

$$\xi_2 = \psi x^{-1}\partial_x + (X_2\psi)X_2 + (X_3\psi)X_3. \tag{85}$$

Le problème dans (84) est que $\imath_{\xi_2}\omega^c$ n'a pas de raison d'être un vecteur tangent à $\mathcal{C}_\delta^{s,\ell}$.

Or dans (84) le seul fait important est la valeur de ψ au bord (dans $\mathrm{FS}^{\ell+2+\delta}$), peu importe son extension à l'intérieur (en effet, la valeur au bord est là pour compenser la singularité de $d^C f$). Donc le résultat reste valable avec le choix suivant d'extension : on choisit ξ_2 dans (83) avec $g_2|_X = \psi$, et on complète avec une fonction g_1 telle que $g = g_1 + ig_2$ soit à fréquences positives sur X, et $\mathrm{Re}\int_X g_1 = 0$. Étendant g comme une fonction holomorphe disque à disque, les champs de vecteurs ξ_1 et ξ_2 sont ainsi étendus sur M_0, et l'action infinitésimale de $\xi_1 + \xi_2$ est tangente à $\mathcal{C}_\delta^{s,\ell}$.

La forme $\eta^c = -\imath_{\xi_2}\omega^c$ n'est pas encore tangente à $\mathcal{C}^{s,\ell}_\delta$, mais, puisque $\xi_1|_X$ est un champ de vecteurs de contact, nous pouvons appliquer l'action infinitésimale de ξ_1 sans sortir des espaces fonctionnels, donc utiliser à la place de (84) la solution

$$(86)\qquad \left(\eta_{1;0} + d^C f - \imath_{\xi_2+\xi_1}\omega_1, -\imath_{\xi_2+\xi_1}\omega^c\right).$$

Maintenant $\imath_{\xi_1+\xi_2}\omega^c$ est un vecteur tangent à $\mathcal{C}^{s,\ell}_\delta$, ce qui prouve la surjectivité de dQ.

La composante de Hitchin est donc une sous-variété de $\mathcal{C}^{s,\ell}_\delta$ dont l'espace tangent est donné par les déformations infinitésimales du système, analysées sections 5 et 6. Le théorème découle alors de la proposition 6.1 (les déformations construites dans cette proposition ne sont pas dans la jauge fournie par $\mathcal{C}^{s,\ell}_\delta$, mais bien entendu les constructions de la section 7 montrent qu'on peut les y ramener).

Enfin, l'assertion sur les polynômes invariants découle immédiatement du calcul fait dans la remarque 6.2. □

9. Analyse

Nous démontrons dans cette section les propriétés de base du laplacien scalaire pour la géométrie induite par une métrique hyperkählérienne pliée g_0. Notons $\Delta_0 = x\Delta$ et rappelons (32) :

$$(87)\qquad \Delta_0 = -\partial_x^2 - X_2^2 - X_3^2 - x^2X_1^2 + x^2F(\partial_x, xX_1, X_2, X_3),$$

où F est un opérateur à coefficients lisses jusqu'au bord.

Les propriétés hypoelliptiques [10] du laplacien $\square = -X_2^2 - X_3^2$ permettent de décomposer une fonction f sur X suivant les valeurs propres λ^2 de $\square$:

$$(88)\qquad f = \sum_\lambda f_\lambda.$$

L'espace de Folland-Stein FS^s est alors défini par la norme $\sum(1+\lambda^s)\|f_\lambda\|^2$.

9.1. Le laplacien modèle dans les espaces de Sobolev ordinaires. — Plaçons-nous dans le cas modèle où X est un quotient compact du groupe de Heisenberg, avec la structure décrite dans la section 1. Ainsi, la formule (87) devient exacte ($F = 0$). Considérons la variété à bord (M_0, g_0) définie par

$$M_0 = [0,1]\times X, \quad g_0 = x(dx^2 + (\theta^2)^2 + (\theta^3)^2) + x^{-1}(\theta^1)^2.$$

Le laplacien Δ_0 ressemble beaucoup à un laplacien ordinaire sur une variété à bord, à la différence près que le laplacien sur le bord est remplacé par le laplacien hypoelliptique $\square$. Néanmoins, il se comporte de manière analogue au laplacien standard dans les espaces de Sobolev ordinaires associés, comme nous allons le voir maintenant.

Nous notons

$$\mathbf{v} = x^{-1}\,\mathrm{vol}^{g_0} = dx \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3,$$

et utiliserons l'espace $L^2(\mathbf{v})$, ainsi que les espaces de Sobolev naturellement associés,

$$H^k = \{f, D^j f \in L^2(\mathbf{v}) \text{ pour tout } j \leqslant k\}.$$

Lemme 9.1. — *L'opérateur $\Delta_0 : H^{k+2}(M_0) \to H^k(M_0)$ est un isomorphisme pour les deux choix suivants de condition au bord :*

i. *condition de Dirichlet sur les deux bords $x = 0$ et $x = 1$;*
ii. *condition de Dirichlet sur le bord $x = 1$ et Neumann sur le bord $x = 0$.*

Démonstration. — L'avantage du modèle plat est que le champ de vecteurs X_1 engendre une action de cercle, qui commute au laplacien horizontal $\square$; aussi l'opérateur Δ_0 se diagonalise-t-il complètement en décomposant en outre par rapport aux coefficients de Fourier de l'action de cercle :

$$\Delta_0 = -\partial_x^2 + \lambda^2 + n^2 x^2. \tag{89}$$

Par ailleurs, l'identité $X_1 = -[X_2, X_3]$ impose $|n| \leqslant \lambda^2$.

Analyser le comportement d'un tel opérateur est élémentaire. Pour chaque (λ, n), l'existence d'une solution unique à l'équation $\Delta_0 f = g$ avec les conditions au bord prescrites est immédiate, et il faut donc montrer une estimation H^{s+2} sur f. L'outil essentiel est l'intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\partial_x f|^2 + (\lambda^2 + n^2 x^2)|f|^2 &= \int_0^1 fg \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (\lambda^2 + n^2x^2)|f|^2 + \frac{|g|^2}{\lambda^2 + n^2 x^2}\end{aligned}$$

d'où résulte

$$\int_0^1 |\partial_x f|^2 + \frac{1}{2}(\lambda^2 + n^2 x^2)|f|^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{|g|^2}{\lambda^2 + n^2 x^2}. \tag{90}$$

En particulier,

$$\int_0^1 \lambda^{2s}|\partial_x f|^2 + \lambda^{2s+4}|f|^2 \leqslant \lambda^{2s}\int_0^1 |g|^2 \tag{91}$$

donne déjà le contrôle voulu des dérivées de f et $\partial_x f$ suivant X_2 et X_3.

On a l'équation

$$\Delta_0(xf) = xg - 2\partial_x f. \tag{92}$$

Appliquant (90) à xf, on obtient

$$\int_0^1 |\partial_x(xf)|^2 + n^2x^4|f|^2 \leqslant \int_0^1 \frac{|xg|^2+4|\partial_x f|^2}{\lambda^2+n^2x^2} \leqslant \int_0^1 (n^{-2}+2\lambda^{-4})|g|^2,$$

où, dans la seconde inégalité, on a réutilisé (90) pour f. Puisque $n^2 \leqslant \lambda^4$, on obtient ainsi

$$\int_0^1 \frac{1}{2} n^2x^2|\partial_x f|^2 + n^4x^4|f|^2 \leqslant \int 3|g|^2 + n^2|f|^2 \leqslant 4\int |g|^2;$$

l'équation $\Delta_0 f = g$ permet alors d'estimer aussi $\partial_x^2 f$, et on a obtenu ainsi une estimation sur toutes les dérivées secondes de f, donc

$$\|f\|_{H^2} \leqslant c\|g\|_{L^2}. \tag{93}$$

L'estimation plus générale $\|f\|_{H^{k+2}} \leqslant c_k\|g\|_{H^k}$ est alors établie par récurrence sur s : d'une part, les dérivées suivant X_2 et X_3 ont déjà été bornées, les dérivées suivant X_1 sont successivement bornées en utilisant comme ci-dessus

$$\Delta_0(x^j f) = x^j g - 2jx^{j-1}\partial_x f - j(j-1)x^{j-2}f,$$

et les dérivées $\partial_x^j f$ en dérivant l'équation. Les détails sont laissés au lecteur, car le cas $k > 0$ n'est de toute façon pas utilisé dans la suite. □

9.2. Le laplacien dans les espaces de Sobolev ordinaires. — Les résultats de la section précédente se généralisent à une variété hyperkählérienne pliée générale, (M_0, g_0), à bord X. Les espaces de Sobolev ordinaires H^k restent définis en prenant les normes L^2 par rapport à une forme volume $\mathbf{v} = x^{-1}\operatorname{vol}^{g_0}$ près du bord.

Proposition 9.2. — *Le laplacien $\Delta = x^{-1}\Delta_0$ est un isomorphisme :*

i. $H^{k+2}(M_0) \to x^{-1}H^k(M_0)$, *avec condition de Dirichlet à la source ;*
ii. $H_0^{k+2}(M_0) \to (x^{-1}H^k(M_0))_0$, *avec condition de Neumann à la source, et où l'indice 0 signifie qu'on se limite aux fonctions d'intégrale nulle :* $\int_{M_0} f \operatorname{vol}^{g_0} = 0$.

Démonstration. — Le problème est de passer du lemme 9.1 dans le cas modèle à l'énoncé du théorème. C'est une méthode classique sur laquelle nous ne donnerons pas beaucoup de détails. L'énoncé résulte immédiatement de la construction d'un parametrix pour Δ, dans chacun des deux cas. La méthode consiste à voir qu'en tout point du bord X, la géométrie de g est bien approchée par celle du modèle, grâce à (16). On peut donc fabriquer un inverse approximatif de Δ en recouvrant X par un nombre assez grand de petits ouverts où la structure hyperkählérienne pliée est très proche de celle du modèle. L'inverse construit pour le modèle peut alors être greffé sur M_0 pour donner un inverse approximatif sur un voisinage de X dans M_0 ; complété par un parametrix sur l'intérieur, il fournit le parametrix attendu. C'est exactement la méthode utilisée dans [2, chapitre I] pour l'analyse des métriques asymptotiquement hyperboliques complexes, qui offrent comme on l'a vu une géométrie très similaire. □

Remarque 9.3. — De la même manière, on peut se placer sur un petit voisinage $N_\epsilon = (0,\epsilon) \times X$ de X dans M_0, avec, comme dans la section 9.1 une condition de Dirichlet sur le bord $x = \epsilon$, et on obtient alors, tant avec la condition de Dirichlet qu'avec la condition de Neumann en $x = 0$, un isomorphisme

$$\Delta : H^{k+2}(N_\epsilon) \longrightarrow x^{-1} H^k(N_\epsilon). \tag{94}$$

9.3. Le laplacien dans les espaces de Sobolev à poids. — Les espaces de Sobolev ordinaires ne sont malheureusement pas suffisants pour contrôler la nonlinéarité de l'équation $P(\alpha) = 0$: à cause du volume $\mathrm{vol}^{g_0} \sim x^{-2} dx \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$, le terme quadratique $(d\alpha_a \wedge d\alpha_b)$ donne lieu à des termes $x^{-2} D\alpha_{a,i} D\alpha_{b,j}$ qui sont trop singuliers. C'est la raison de l'utilisation d'espaces à poids.

Il existe des liens entre les espaces de Sobolev ordinaires et à poids demi-entiers : il est clair que

$$L^2_{-\frac12} = L^2(\mathbf{v}), \tag{95}$$

et en outre, on a l'égalité des deux espaces,

$$\mathcal{H}^2_{1,\frac12} = H^2, \tag{96}$$

car ils sont tous deux caractérisés par la condition $D^2 f \in L^2(\mathbf{v})$. La proposition 9.2 dit donc déjà qu'on obtient des isomorphismes

$$x\mathcal{H}^2_{\frac12} \longrightarrow x^{-1} L^2_{-\frac12} = H^0_{-\frac32}, \tag{97}$$

qui inclut implicitement la condition de Dirichlet sur X, et

$$\mathcal{H}^2_{1,\frac12;0} \longrightarrow H^0_{-\frac32;0} \tag{98}$$

avec condition de Neumann à la source (et l'indice 0 signifie qu'on se limite aux fonctions d'intégrale nulle). Notons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{N}$ les inverses respectifs de Δ dans les deux cas.

Remarque 9.4. — On peut modifier la preuve du lemme 9.1 pour obtenir des estimations pour un poids $\delta \in (0,1)$ au lieu de $\frac12$ dans (97) et (98), mais le poids $\delta = \frac12$ suffit pour les résultats de cet article.

Commençons par voir que ces isomorphismes s'étendent quand les dérivées sont contrôlées avec des poids :

Lemme 9.5. — *Pour tout $s \geqslant 0$ on a sur M_0 des isomorphismes*

$$x\mathcal{H}^{s+2}_{\frac{1}{2}} \longrightarrow H^s_{-\frac{3}{2}}, \tag{99}$$

$$\mathcal{H}^{s+2}_{1,\frac{1}{2};0} \longrightarrow H^s_{-\frac{3}{2};0}. \tag{100}$$

Démonstration. — En utilisant le lemme d'extension 3.1, on est ramené à montrer que si $f \in L^2_{\frac{3}{2}}$ et $\Delta f \in H^s_{-\frac{3}{2}}$, alors $f \in H^{s+2}_{\frac{3}{2}}$, ce qui est un énoncé de régularité elliptique dans les espaces de Sobolev à poids. Cette régularité est une conséquence de l'homogénéïté (16) : soit $x_0 > 0$, alors $g' = x_0^{-3} h^*_{x_0} g$ est proche de la métrique modèle G construite à partir du groupe de Heisenberg, et en particulier une boule de rayon $\rho x_0^{\frac{3}{2}}$ est ainsi envoyée sur une boule de rayon ρ pour $g' \approx G$. On en déduit qu'on dispose d'estimations elliptiques dans la boule $B_\rho(g')$ de rayon ρ pour g', avec constante indépendante du point choisi :

$$\|f\|^2_{H^{s+2}(B_\rho(g'))} \leqslant c\left(\|f\|^2_{L^2(B_\rho(g'))} + \|\Delta^{g'} f\|^2_{H^s(B_\rho(g'))}\right).$$

Appliquons le changement d'échelle qui ramène à g : on obtient

$$\sum_0^{s+2} \|x_0^{\frac{3j}{2}} D^j f\|^2_{L^2\left(B_{\rho x_0^{3/2}}(g)\right)} \leqslant c\left(\|f\|^2_{L^2\left(B_{\rho x_0^{3/2}}(g)\right)} + \sum_0^s \|x_0^{3+\frac{3j}{2}} \Delta^g f\|^2_{L^2\left(B_{\rho x_0^{3/2}}(g)\right)}\right).$$

Comme x et x_0 sont comparables dans la boule $B_{\rho x_0^{3/2}}(g)$ si ρ a été fixé assez petit, c'est l'estimation à poids voulue, après multiplication par x_0^{-5} pour avoir les bons poids. Il suffit ensuite de sommer sur un recouvrement localement fini par des boules de rayon $\rho x^{3/2}$. $\square$

Analysons les inverses $\mathcal{D}$ et $\mathcal{N}$ de (99) et (100) sur l'espace $\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}}$:

Proposition 9.6. — *Supposons $s \geqslant \ell + \frac{1}{2}$ et $g \in \mathcal{H}^{s,\ell}_{\frac{1}{2}}$ (resp. $g \in \mathcal{H}^{s,\ell}_{\frac{1}{2};0}$). Alors $\mathcal{D}g$ (resp. $\mathcal{N}g$) est dans l'espace $\mathcal{H}^{s+2,\ell}_{3,\frac{1}{2}}$, et $\mathcal{D} : \mathcal{H}^{s,\ell}_{\frac{1}{2}} \to x\mathcal{H}^{s+2,\ell}_{2,\frac{1}{2}}$ (resp. $\mathcal{N} : \mathcal{H}^{s,\ell}_{\frac{1}{2};0} \to \mathcal{H}^{s+2,\ell}_{3,\frac{1}{2};0}$) est un opérateur continu.*

Démonstration. — On utilise la commutation de $\Box$ et X_1 avec Δ. Dans le cas modèle, on a exactement $[X_1, \Delta] = 0$ et $[\Box, \Delta] = 0$. En général, observons que $\theta^1([X_1, X_2]) = -d\theta^1(X_1, X_2) = 0$, donc $[X_1, X_2]$ est horizontal, et de même $[X_1, X_3]$. Il en résulte $[X_1, \Box] = \partial^2$, où par ∂^2 nous entendons n'importe quel opérateur sur X, d'ordre 2 en les dérivations horizontales, et finalement

$$[X_1, \Delta] = x^{-1}O_2, \tag{101}$$

$$[\Box, \Delta] = O_3, \tag{102}$$

où O_j est un opérateur d'ordre j en les dérivations e_i.

Commençons par le problème de Dirichlet. Supposons $g \in x\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}}$ et posons $f = \mathcal{D}g \in x\mathcal{H}^{s+2}_{\frac{1}{2}}$. À partir de $\Box g \in H^{s-2}_{-\frac{1}{2}}$ et $[\Box, \Delta]f \in H^{s-1}_{-\frac{3}{2}}$ par (102), le lemme 9.5, appliqué à un voisinage N_ϵ de X dans M_0 comme dans la remarque 9.3, donne (avec estimation)

$$\Box f \in x\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}}. \tag{103}$$

De même, $X_1 g \in H^{s-1}_{-\frac{1}{2}}$ et $[X_1, \Delta]f \in H^s_{-\frac{3}{2}}$, donc $X_1 f \in x\mathcal{H}^{s+1}_{\frac{1}{2}}$, d'où on déduit

$$x^2 X_1^2 f \in x\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}}. \tag{104}$$

De (103), (104) et de l'équation $\Delta f = g$ on déduit enfin $\partial_x^2 f \in x\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}}$, donc on a pour toutes les dérivées secondes (avec estimation en fonction de $\|g\|_{x\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}}}$)

$$D^2 f \in x\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}}. \tag{105}$$

Il s'ensuit que $f \in \mathcal{H}^{s+2}_{2,\frac{1}{2}}$, et même, puisque f satisfait la condition de Dirichlet, $f \in x\mathcal{H}^{s+2}_{1,\frac{1}{2}}$.

Le problème de Neumann est similaire : si $g \in x\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}}$ et $f = \mathcal{N}g$, alors le même raisonnement fournit un contrôle $D^2 f \in \mathcal{H}^{s-2}_{1,\frac{1}{2}}$, qui implique $f \in \mathcal{H}^{s+2}_{2,\frac{1}{2}}$.

Finalement, le cas où $\ell \neq 0$ s'en déduit par récurrence sur ℓ, en appliquant les estimations précédentes à $\Box^{\frac{\ell}{2}} f$, dont les images par Δ sont contrôlées grâce à la commutation évidente $[\Box^{\frac{1}{2}}, \Delta] = x^{-1}O_2$ (en fait, on peut même montrer que ce commutateur est O_2). □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ashtekar, T. Jacobson & L. Smolin – « A new characterization of half-flat solutions to Einstein's equation », *Commun. Math. Phys.* **115** (1988), no. 4, p. 631–648.

[2] O. Biquard – « Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques », *Astérisque* **265** (2000), p. vi+109, English translation : SMF/AMS Texts and Monographs 13 (2006).

[3] ———, « Métriques autoduales sur la boule », *Invent. math.* **148** (2002), no. 3, p. 545–607.

[4] ———, « Autodual Einstein versus Kähler-Einstein », *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), no. 3, p. 598–633.

[5] O. Biquard & P. Gauduchon – « Geometry and physics (Aarhus, 1995) », no. 1997, ch. Hyper-Kähler metrics on cotangent bundles of Hermitian symmetric spaces, p. 287–298, Dekker.

[6] J. Bland & T. Duchamp – « The group of contact diffeomorphisms for compact contact manifolds », *J. Symplectic Geom.* **12** (2014), no. 1, p. 49–104.

[7] R. Bryant – « Real hypersurfaces in unimodular complex surfaces », arXiv : math/0407472.

[8] S. K. Donaldson – « The many facets of geometry. A tribute to Nigel Hitchin », ch. Nahm's equations and free-boundary problems, p. 71–91, Oxford University Press, 2010.

[9] C. L. Epstein & G. M. Henkin – « Stability of embeddings for pseudoconcave surfaces and their boundaries », *Acta Math.* **185** (2000), no. 2, p. 161–237.

[10] G. B. Folland & E. M. Stein – « Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group », *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), p. 429–522.

[11] N. J. Hitchin – « The self-duality equations on a Riemann surface », *Proc. London Math. Soc. (3)* **55** (1987), no. 1, p. 59–126.

[12] ———, « Higgs bundles and diffeomorphism groups. Advances in geometry and mathematical physics », (H.-D. Cao & S.-T., éds.), Surveys in differential geometry, no. XXI, International Press, 2016, p. 139–163.