BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD BOURDAUD
YVES MEYER

Inégalités L^2 précisées pour la classe $S^0_{0,0}$

Bulletin de la S. M. F., tome 116, nº 4 (1988), p. 401-412
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_4_401_0>

Bull. Soc. math. France,
116, 1988, p. 401–412.

INÉGALITÉS L^2 PRÉCISÉES POUR LA CLASSE $S^0_{0,0}$

PAR

GÉRARD BOURDAUD ET YVES MEYER (*)

RÉSUMÉ. — Pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, il suffit que son symbole soit un multiplicateur de l'algèbre de Beurling $A_\Omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, où $\Omega(x,\xi) = \omega_1(x)\omega_2(\xi)$, ω_1 et ω_2 étant des poids de Beurling sur $\mathbb{R}^n$. Ce résultat permet de retrouver, entre autres, le théorème de Calderón–Vaillancourt, avec une hypothèse de régularité Hölderienne minimale sur le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel.

ABSTRACT. — Let $\sigma(x,\xi)$ be a multiplier in the Beurling algebra $A_\Omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, where $\Omega(x,\xi) = \omega_1(x)\omega_2(\xi)$ and ω_1, ω_2 are two Beurling weights on $\mathbb{R}^n$. Then $\sigma(x,D)$ is a bounded operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$. As a corollary, we obtain the Calderón–Vaillancourt theorem, with a minimal Hölder continuity assumption on the symbol of a pseudo-differential operator.

1. Introduction

A toute fonction σ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, suffisamment régulière, est associé *l'opérateur pseudo-différentiel de symbole* σ, défini sur la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathrm{Op}(\sigma)(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\sigma(x,\xi)\, d\xi.$$

Suivant HÖRMANDER [4], $S^0_{0,0}$ est l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dont toutes les dérivées sont bornées; CALDERÓN et VAILLANCOURT [1] ont prouvé que tout opérateur pseudo-différentiel dont le symbole appartient à $S^0_{0,0}$ est borné sur L^2, mais on peut se demander combien de dérivées sont nécessaires pour obtenir cette propriété. Voici les résultats les plus précis dans cette direction.

(*) Texte reçu le 6 mars 1987, révisé le 14 octobre 1987.

G. BOURDAUD, Université Paris VII, UFR de Mathématiques, Tour 45-55, 5ᵉétage, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France et Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

Y. MEYER, Université Paris-Dauphine, CEREMADE, Place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1988/401/$ 5.00

THÉORÈME 1. — *Pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, il suffit que son symbole vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

(i) $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *pour* $|\alpha| \leq [n/2]+1$ *et* $|\beta| \leq [n/2]+1$;

(ii) $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *pour* $\alpha, \beta \in \{0,1\}^n$.

En 1975, H. O. CORDES [3] démontrait la partie (i) du théorème et esquissait la démonstration de la partie (ii); une autre preuve de (ii) est due à I. L. HWANG [5]. Dans l'un et l'autre cas, le "nombre" de dérivées utilisées est minimal :

PROPOSITION 1. — *Il existe des opérateurs pseudo-différentiels non bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont les symboles $\sigma(x,\xi)$ vérifient $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ pour tous multiindices α, β tels que, respectivement,*

(i) $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $|\beta| \leq [n/2]$,

(ii) $\beta \in \mathbb{N}^n$ *et* $|\alpha| \leq [n/2]$,

(iii) $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $\beta_1 = 0$,

(iv) $\beta \in \mathbb{N}^n$ *et* $\alpha_1 = 0$.

Il suffit de reprendre le contre-exemple de COIFMAN et MEYER [2, chapitre I, proposition 2] : $\sigma(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-n/4} \exp(-ix\cdot\xi - |x|^2)$. Un raisonnement par récurrence montre que

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{-n/4-|\alpha|} \exp\left(-ix\cdot\xi - |x|^2\right) Q_{\alpha,\beta}(x,\xi),$$

où $Q_{\alpha,\beta}$ est un polynôme par rapport aux deux variables, de degré $2|\alpha| + |\beta|$ en ξ; on en déduit aussitôt

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\left(1+|\xi|^2\right)^{-n/4+|\beta|/2}.$$

Ainsi $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ sous l'hypothèse (i). Il reste à voir que $\mathrm{Op}(\sigma)$ n'est pas borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathrm{Op}(\sigma)(f)(x) = \lambda(f)e^{-|x|^2}$, où λ est la forme linéaire

$$\lambda(f) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-n/4} d\xi\,;$$

la fonction $(1+|\xi|^2)^{-n/4}$ n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^n)$: il en résulte que λ et donc $\mathrm{Op}(\sigma)$ ne sont pas bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour obtenir un symbole vérifiant $\partial_\beta^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ sous l'hypothèse (ii), il suffit d'échanger x et ξ :

$$\sigma(x,\xi) = \left(1+|x|^2\right)^{-n/4} \exp\left(-ix\cdot\xi - |\xi|^2\right);$$

alors, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\operatorname{Op}(\sigma)(f)(x) = \left(1+|x|^2\right)^{-n/4}\lambda(f),$$

où λ est la forme linéaire

$$\lambda(f) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-|\xi|^2\right)\hat{f}(\xi)\,d\xi\,;$$

dès que $\lambda(f) \neq 0$, on a $\operatorname{Op}(\sigma)(f) \notin L^2(\mathbb{R}^n)$.

Voici maintenant un symbole σ tel que $\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ sous l'hypothèse (iii) : on pose $\sigma_1(x_1,\xi_1) = (1+\xi_1^2)^{-1/4}\exp(-ix_1\xi_1 - x_1^2)$ et $\sigma(x,\xi) = \sigma_1(x_1,\xi_1)$.

Le fait que $\operatorname{Op}(\sigma_1)$ ne soit pas borné sur $L^2(\mathbb{R})$ entraîne immédiatement que $\operatorname{Op}(\sigma)$ n'est pas borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$; en échangeant x et ξ, on obtient un symbole qui vérifie $\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ sous l'hypothèse (iv).

Dès lors une façon raisonnable d'affaiblir les hypothèses du THÉORÈME 1 consiste à imposer des conditions de HÖLDER aux dérivées d'ordre $[n/2]$ du symbole $\sigma(x,\xi)$.

Pour comprendre les énoncés qui suivent, il faut considérer $\sigma(x,\xi)$ *comme une fonction de* ξ, *à valeurs dans certains espaces de fonctions de* x — ce que nous ferons systématiquement.

Soit E un espace de Banach et s un réel positif, non entier, que nous écrirons $s = m + a$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $a \in]0,1[$. $\Lambda_s(\mathbb{R}^n, E)$ désignera l'espace de Banach des applications $f : \mathbb{R}^n \to E$, de classe $\mathcal{C}^m$, dont toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre m inclus, sont bornées et telles que, pour $|\alpha| = m$, $\sup_{x,h\in\mathbb{R}^n}|h|^{-a}\|f^{(\alpha)}(x+h) - f^{(\alpha)}(x)\|_E < \infty$.

THÉORÈME 2. — *Pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit borné sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *il suffit que son symbole appartienne à* $\Lambda_s(\mathbb{R}^n, \Lambda_s(\mathbb{R}^n))$, *avec* $s > n/2$.

Commentaires sur le THÉORÈME 2.

1) L'appartenance de σ à $\Lambda_s(\mathbb{R}^n, \Lambda_s(\mathbb{R}^n))$ peut encore s'exprimer de la façon suivante :

$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ pour $|\alpha| \le m$, $|\beta| \le m$;

si $\tau = \partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma$, avec $|\alpha| = m$ ou $|\beta| = m$, alors τ a les propriétés de continuité suivantes :

(i) $|\tau(x+h,\xi+\eta) - \tau(x,\xi)| \le C(|h|+|\eta|)^a$;

(ii) $|\tau(x+h,\xi+\eta) - \tau(x,\xi+\eta) - \tau(x+h,\xi) + \tau(x,\xi)| \le C|\eta|^a|h|^a$.

Il n'est pas inutile d'observer que les conditions (i) et (ii) sont indépendantes l'une de l'autre : si $F \in \Lambda_a(\mathbb{R}^n)$ et $F \notin \Lambda_{a+\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ $(\epsilon > 0)$

alors $\tau(x,\xi) = F(x+\xi)$ vérifie (i) mais pas (ii); si $F \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $|F(x+h) - F(x)| \leq C|h|^a$, $\tau(x,\xi) = F(x)F(\xi)$ vérifie (ii) mais pas (i).

2) L'hypothèse $s > \frac{n}{2}$ est bien la plus faible possible; dans le cas où n est pair, ceci résulte de la PROPOSITION 1; supposons maintenant que $n = 2m+1$, avec $m \in \mathbb{N}$, et montrons que le symbole $\sigma(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-n/4} \exp(-ix\cdot\xi - |x|^2)$ vérifie $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda_{1/2}(\mathbb{R}^n))$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\beta| = m$.

D'après la preuve de la PROPOSITION 1, il suffit de montrer que $\tau(x,\xi) = x^\gamma \exp(-ix\cdot\xi - |x|^2)$ ($\gamma \in \mathbb{N}^n$) vérifie

$$\|\tau(\,\cdot\,,\xi)\|_{\Lambda_{1/2}} \leq C_\gamma\big(1+|\xi|^2\big)^{1/4};$$

pour cela, on observe que les fonctions $x^\gamma \exp(-|x|^2)$ et e^{it} appartiennent respectivement à $\Lambda_{1/2}(\mathbb{R}^n)$ et $\Lambda_{1/2}(\mathbb{R})$; on en tire

$$\begin{aligned}\big|\tau(x+h,\xi) - \tau(x,\xi) &\leq \big|\exp\big(-|x+h|^2\big)(x+h)^\gamma\big|\,\big|\exp(-ih.\xi) - 1\big| \\ &\quad + \big|\exp\big(-|x+h|^2\big)(x+h)^\gamma - \exp\big(-|x|^2\big)x^\gamma\big| \\ &\leq C_\gamma |h|^{1/2}\big(1+|\xi|^2\big)^{1/4}. \quad \square\end{aligned}$$

3) On peut démontrer le THÉORÈME 2 en utilisant les techniques de CORDES. Posons en effet

$$b = \big(I - \Delta_x\big)^{s'/2}\big(I - \Delta_\xi\big)^{s'/2}\sigma, \quad \text{avec} \quad \frac{n}{2} < s' < s;$$

des propriétés classiques des fonctions Hölderiennes (*cf.* [7]), il résulte que $b \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$; dès lors on peut écrire $\sigma = g * b$, où $b \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et $g(x,\xi)$ est le symbole d'un opérateur à trace sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. On a alors

$$\mathrm{Op}(\sigma) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} b(y,\eta) U(y,\eta) \circ \mathrm{Op}(g) \circ U(y,\eta)^*\, dy\, d\eta,$$

où $U(y,\eta)$ est l'opérateur unitaire qui à $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ associe $x \to e^{ix\cdot\eta} f(x-y)$. On achève la démonstration à l'aide du "lemme de Cordes et Kato" ([6] et [8], chapitre XIII).

Dans les paragraphes qui suivent, nous proposons une démonstration entièrement différente des THÉORÈMES 1 et 2, à la fois plus élémentaire — elle est fondée exclusivement sur l'égalité de Plancherel — et plus générale : on peut en déduire en effet toute une famille d'inégalités L^2 "dans le cadre $S^0_{0,0}$".

2. Algèbres de Beurling et estimations L^2

La preuve du THÉORÈME 2 reposera sur les remarques simples suivantes :

1) les fonctions appartenant à $\Lambda_{s'}$ sont des multiplicateurs de l'espace de Sobolev H^s, quel que soit $s < s'$;

2) pour $s > n/2$, H^s est une "algèbre de Beurling", pour laquelle on dispose des lemmes de presque-orthogonalité de COIFMAN et MEYER [2].

Soit ω une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $[1, +\infty[$ et $A_\omega(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées f telles que $\xi \to \omega(\xi)^{1/2}\hat{f}(\xi)$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}^n)$. A_ω est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|f\|_{A_\omega} = \Big(\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi\Big)^{1/2}.$$

On est amené à faire quelques hypothèses sur le poids ω :

(1) $\omega^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

(2) il existe des constantes positives C et N telles que $\omega(x) \leq C(1+|x|)^N$,

(3) il existe $C > 0$ tel que $\dfrac{1}{\omega} * \dfrac{1}{\omega} \leq \dfrac{C}{\omega}$.

La propriété (1) entraîne que A_ω est un sous-espace de $A(\mathbb{R}^n)$ (espace des transformées de Fourier des fonctions intégrables), alors que (2) fournit l'inclusion $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset A_\omega$; enfin (3) entraîne que A_ω est une sous-algèbre de $A(\mathbb{R}^n)$. Nous utiliserons une quatrième propriété de ω :

(4) Il existe $C > 0$ tel que, pour tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\omega(\xi+\eta) \leq C\omega(\xi)\omega(\eta)$.

Un poids ω qui vérifie (1), (2), (3), (4) s'appelle un *poids de Beurling* (et A_ω une *algèbre de Beurling*).

LEMME 1. — *Soit ω un poids vérifiant* (2) *et* (4). *Pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, non nulle, il existe $C \geq 1$ tel que*

$$\frac{1}{C}\|f\|^2_{A_\omega} \leq \int_{\mathbf{R}^n} \|f(x-y)\varphi(x)\|^2_{A_\omega}\, dy \leq C\|f\|^2_{A_\omega}.$$

La transformée de Fourier de $x \to f(x-y)\varphi(x)$ est

$$\xi \to \int_{\mathbf{R}^n} e^{-iy\cdot\eta}\hat{f}(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\, d\eta\,;$$

d'où

$$\int_{\mathbf{R}^n} \|f(x-y)\varphi(x)\|^2_{A_\omega}\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} dy \Big(\int_{\mathbf{R}^n} \omega(\xi)\Big|\int_{\mathbf{R}^n} e^{-iy\cdot\eta}\hat{f}(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\, d\eta\Big|^2 d\xi\Big). \tag{5}$$

Fixons ξ et intégrons en y; il vient, par Plancherel,

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n} e^{-iy\cdot\eta}\hat{f}(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\,d\eta\right|^2 dy = (2\pi)^n\int_{\mathbf{R}^n}\left|\hat{f}(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\right|^2 d\eta.$$

Intégrons par rapport à ξ : (5) est alors égal à

$$(6)\qquad (2\pi)^n\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}|\hat{f}(\eta)|^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\omega(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta;$$

à l'aide de (4), on majore (6) par $C\|f\|_{A_\omega}^2\|\varphi\|_{A_\omega}^2$ et on minore (6) par

$$\frac{1}{C}\Big(\int_{\mathbf{R}^n}|\hat{f}(\eta)|^2\omega(\eta)\,d\eta\Big)\Big(\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|\hat{\varphi}(\xi)|^2}{\omega(\xi)}\,d\xi\Big).$$

Voici maintenant les lemmes de presque-orthogonalité.

LEMME 2. — *Si ω vérifie* (1), *il existe $C>0$ tel que*

$$\Big\|\int_{\mathbf{R}^n} e^{iu\cdot x}f_u(x)\,du\Big\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\le C\Big(\int_{\mathbf{R}^n}\|f_u\|_{A_\omega}^2\,du\Big)^{1/2}.$$

LEMME 3. — *Si ω vérifie* (1) *et* (3), *il existe $C>0$ tel que*

$$\Big\|\int_{\mathbf{R}^n} e^{iu\cdot x}f_u(x)\,du\Big\|_{A_\omega}\le C\Big(\int_{\mathbf{R}^n}\|f_u\|_{A_\omega}^2\,\omega(u)\,du\Big)^{1/2}.$$

Soit $g(x)=\int_{\mathbf{R}^n} e^{iu\cdot x}f_u(x)\,du$, on a $\hat{g}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}_u(\xi-u)\,du$, d'où, par Plancherel,

$$\|g\|_2^2=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}_u(\xi-u)\,du\right|^2 d\xi\,;$$

puis, par Cauchy-Schwarz et (1),

$$\|g\|_2^2\le C\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}|\hat{f}_u(\xi)|^2\omega(\xi)\,d\xi\,du,$$

ce qui termine la démonstration du LEMME 2.

La relation (3) et Cauchy-Schwarz entraînent

$$\omega(\xi)|\hat{g}(\xi)|^2\le C\int_{\mathbf{R}^n}|\hat{f}_u(\xi-u)|^2\omega(\xi-u)\omega(u)\,du\,;$$

il suffit alors d'intégrer en ξ pour obtenir le LEMME 3.

Nous en arrivons à l'énoncé du meilleur résultat connu sur la continuité L^2 des O.P.D. dans le "cadre $S^0_{0,0}$" — cette dernière expression signifiant que les hypothèses sur le symbole $\sigma(x,\xi)$ sont uniformément invariantes sous l'effet des translations en x et en ξ.

THÉORÈME 3. — *Soient ω_1 un poids de Beurling et ω_2 un poids vérifiant* (1) *et* (2) *; on pose $\Omega(x,\xi) = \omega_1(x)\omega_2(\xi)$. Pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ il suffit que son symbole σ soit un multiplicateur de $A_\Omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$: autrement dit qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\|\sigma\varphi\|_{A_\Omega} \le C\|\varphi\|_{A_\Omega}$.*

L'idée de base, maintenant tout à fait classique, est une double localisation : par rapport à la variable d'espace x et la fréquence ξ. Pour cela, on appelle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive telle que $\int \varphi(x)^2\,dx = 1$.

Désignons par $\lambda_{\eta,y}$ la transformée de Fourier de $(x,\xi) \to \sigma(x+y, \xi+\eta)\varphi(\xi)\varphi(x)$; l'hypothèse faite sur σ signifie exactement :

Il existe $C > 0$ telle que

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |\lambda_{\eta,y}(u,v)|^2 \omega_1(u)\omega_2(v)\,du\,dv \le C. \tag{7}$$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\begin{aligned} g(x) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat f(\xi)\,d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\varphi^2(\xi-\eta)\hat f(\xi)\,d\xi\,d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta.x} g_\eta(x)\,d\eta, \end{aligned}$$

avec $$g_\eta(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi+\eta)\varphi(\xi)\hat f_\eta(\xi)\,d\xi$$

et $\hat f_\eta(\xi) = \varphi(\xi)\hat f(\xi+\eta)$; il découle alors du LEMME 2 :

$$\|g\|_2^2 \le C\int_{\mathbb{R}^n} \|g_\eta\|^2_{A_{\omega_1}}\,d\eta. \tag{8}$$

Maintenant, on localise spatialement en écrivant

$$g_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\eta(x)\varphi^2(x-y)\,dy\,;$$

le LEMME 1 donne

$$\|g_\eta\|^2_{A_{\omega_1}} \leq C \int_{\mathbf{R}^n} \|g_\eta(x)\varphi^2(x-y)\|^2_{A_{\omega_1}}\,dy. \tag{9}$$

Il reste à estimer le second membre de (9); pour cela, on part de la formule d'inversion de Fourier :

$$\sigma(x+y,\xi+\eta)\varphi(\xi)\varphi(x) = (2\pi)^{-2n} \iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} e^{iu\cdot x}e^{iv\cdot\xi}\lambda_{\eta,y}(u,v)\,du\,dv$$

qui donne, par translation,

$$\sigma(x,\xi+\eta)\varphi(\xi)\varphi(x-y) = (2\pi)^{-2n} \iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} e^{iu\cdot x}e^{iv\cdot\xi}e^{-iu\cdot y}\lambda_{\eta,y}(u,v)\,du\,dv.$$

En reportant dans l'expression de g_η, on obtient

$$g_\eta(x)\varphi(x-y) = (2\pi)^{-2n} \iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} f_\eta(x+v)e^{iu\cdot x}e^{-iu\cdot y}\lambda_{\eta,y}(u,v)\,du\,dv.$$

Posons $f_{\eta,y,v}(x) = f_\eta(x+v)\varphi(x-y)$; le LEMME 1 implique

$$\int_{\mathbf{R}^n} \|f_{\eta,y,v}\|^2_{A_{\omega_1}}\,dy \leq C\|f_\eta\|^2_{A_{\omega_1}} \leq C'\|f_\eta\|^2_2,$$

en effet le support de $\hat f_\eta$ est un compact fixe; d'où

$$\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} \|f_{\eta,y,v}\|^2_{A_{\omega_1}}\,dy\,d\eta \leq C\|f\|^2_2. \tag{10}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &g_\eta(x)\varphi^2(x-y)\\ &\qquad = (2\pi)^{-2n} \iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} f_{\eta,y,v}(x)e^{iu\cdot x}e^{-iu\cdot y}\lambda_{\eta,y}(u,v)\,du\,dv, \end{aligned}$$

ce qui donne, par le LEMME 3, à y fixé,

$$\begin{aligned} &\|g_\eta(x)\varphi^2(x-y)\|^2_{A_{\omega_1}}\\ &\qquad \leq C\int_{\mathbf{R}^n} \omega_1(u)\Big\|\int_{\mathbf{R}^n} f_{\eta,y,v}e^{-iu\cdot y}\lambda_{\eta,y}(u,v)\,dv\Big\|^2_{A_{\omega_1}}\,du\,; \end{aligned} \tag{11}$$

on a

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^n} f_{\eta,y,v} e^{-iu\cdot y} \lambda_{\eta,y}(u,v)\, dv \right\|^2_{A_{\omega_1}}$$
$$\le \left(\int_{\mathbf{R}^n} \|f_{\eta,y,v}\|_{A_{\omega_1}} |\lambda_{\eta,y}(u,v)|\, dv \right)^2$$
$$\le \left[\int_{\mathbf{R}^n} \|f_{\eta,y,t}\|^2_{A_{\omega_1}} \frac{dt}{\omega_2(t)} \right] \left[\int_{\mathbf{R}^n} |\lambda_{\eta,y}(u,v)|^2 \omega_2(v)\, dv \right] ;$$

reportons cette inégalité dans (11) : en utilisant (7), on obtient

$$\|g_\eta(x)\varphi^2(x-y)\|^2_{A_{\omega_1}} \le C \int_{\mathbf{R}^n} \|f_{\eta,y,t}\|^2_{A_{\omega_1}} \frac{dt}{\omega_2(t)} ;$$

intégrons cette relation par rapport à y et η; en utilisant (10), puis (9) et (8), enfin $(1/\omega_2) \in L^1$, on obtient $\|g\|_2 \le C\|f\|_2$, autrement dit la continuité L^2.

3. Démonstration du théorème 2

On s'intéresse maintenant au cas particulier où $\omega(\xi) = (1+|\xi|^2)^s$ avec $s > n/2$. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ appartient alors à l'algèbre de Beurling A_Ω si et seulement si, considérée comme fonction de ξ à valeurs dans les fonctions de x, elle appartient à $H^s(\mathbb{R}^n, H^s(\mathbb{R}^n))$.

Pour obtenir le théorème, il suffit donc de montrer que, pour $s' > s$, les fonctions de $\Lambda_{s'}(\mathbb{R}^n, \Lambda_{s'}(\mathbb{R}^n))$ sont des multiplicateurs de $H^s(\mathbb{R}^n, H^s(\mathbb{R}^n))$; ceci résultera de la

PROPOSITION 2. — *Soient E un espace de Hilbert, F un espace de Banach et $B : E \times F \to E$ une application bilinéaire continue; s et s' deux réels non entiers tels que $s < s'$. Alors pour tout $f \in \Lambda_{s'}(\mathbb{R}^n, F)$ et tout $g \in H^s(\mathbb{R}^n, E)$, la fonction $B(g,f)$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^n, E)$.*

On ne perd pas de généralité en supposant que B est de norme 1 et que s et s' ont la même partie entière m; posons alors $s = m + a$, $s' = m + a'$. Il est utile d'estimer la norme de $f \in H^s(\mathbb{R}^n, E)$ sans recourir à la transformée de Fourier de f; plus précisément, on montre, comme dans le cas $E = \mathbb{C}$ (voir [9, lemme 25.2]) que cette norme équivaut à

$$(12)\quad \sum_{|\alpha|\le m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^2(\mathbf{R}^n,E)} + \sum_{|\alpha|=m} \left[\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} \frac{\|f^{(\alpha)}(x+t) - f^{(\alpha)}(x)\|^2}{|t|_E^{n+2a}}\, dx\, dt \right]^{1/2} ;$$

compte-tenu de l'intégrabilité de $t \to |t|^{-n-2a}$ à l'infini, (12) est d'ailleurs équivalente à

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,E)} + \sum_{|\alpha|=m} \left[\iint_{|t|\leq 1} \frac{\|f^{(\alpha)}(x+t)-f^{(\alpha)}(x)\|_E^2}{|t|^{n+2a}}\,dx\,dt\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Soit $f \in \Lambda_{s'}(\mathbb{R}^n, F)$ et $g \in H^s(\mathbb{R}^n, E)$: pour estimer la norme (13) de $B(g,f)$ on est amené à étudier $B(g^{(\gamma)}, f^{(\beta)})$, avec $|\gamma|+|\beta|\leq m$. D'abord

$$\begin{aligned}\|B(g^{(\gamma)}, f^{(\beta)})\|_{L^2(\mathbb{R}^n,E)}^2 &= \int \|B(g^{(\gamma)}(x), f^{(\beta)}(x))\|_E^2\,dx\\ &\leq \int \|g^{(\gamma)}(x)\|_E^2\,\|f^{(\beta)}(x)\|_F^2\,dx\\ &\leq \|f^{(\beta)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,F)}^2\,\|g^{(\gamma)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,E)}^2\,;\end{aligned}$$

pour conclure on remarque que $|\beta|\leq m$ implique $\|f^{(\beta)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,F)} \leq \|f\|_{\Lambda_{s'}(\mathbb{R}^n,F)}$. Vient ensuite l'intégrale

$$I = \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|B(g^{(\gamma)}(x+t), f^{(\beta)}(x+t)) - B(g^{(\gamma)}(x), f^{(\beta)}(x))\|_E^2}{|t|^{n+2a}}\,dx\,dt\,;$$

on a $I \leq (\sqrt{I_1}+\sqrt{I_2})^2$, avec

$$\begin{aligned}I_1 &= \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|f^{(\beta)}(x+t)-f^{(\beta)}(x)\|_F^2\,\|g^{(\gamma)}(x+t)\|_E^2}{|t|^{n+2a}}\,dx\,dt\\ I_2 &= \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|g^{(\gamma)}(x+t)-g^{(\gamma)}(x)\|_E^2\,\|f^{(\beta)}(x)\|_F^2}{|t|^{n+2a}}\,dx\,dt.\end{aligned}$$

L'hypothèse $|\beta|\leq m$ entraîne

$$\|f^{(\beta)}(x+t)-f^{(\beta)}(x)\|_F \leq C\|f\|_{\Lambda_{s'}(\mathbb{R}^n,F)}\,|t|^{a'}\,;$$

I_1 est donc majorée par

$$C\|f\|^2 \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|g^{(\gamma)}(x+t)\|_E^2}{|t|^{n+2(a-a')}}\,dx\,dt = C'\|f\|^2\,\|g^{(\gamma)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,E)}^2.$$

I_2 est majorée immédiatement par

$$\|f^{(\beta)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,F)}^2 \iint_{|t|\leq 1} \frac{\|g^{(\gamma)}(x+t)-g^{(\gamma)}(x)\|_E^2}{|t|^{n+2a}}\,dx\,dt.$$

La PROPOSITION 2 s'applique deux fois. D'abord avec $E = F = \mathbb{C}$, ce qui permet d'obtenir l'application bilinéaire continue

$$\begin{aligned} B : H^s(\mathbb{R}^n) \times \Lambda_{s'}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \\ (g, f) &\longrightarrow fg. \end{aligned}$$

Ensuite avec $E = H^s(\mathbb{R}^n)$, $F = \Lambda_{s'}(\mathbb{R}^n)$, B étant l'application qu'on vient de définir.

4. Autres résultats dans le cadre $S^0_{0,0}$

Le théorème suivant a été énoncé — avec des hypothèses un peu plus fortes — par COIFMAN et MEYER [2, chapitre 1].

THÉORÈME 4. — *Soit ω un poids de Beurling et $\sigma(x,\xi)$ un symbole tel que $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \|\partial_\xi^\alpha \sigma(\,\cdot\,,\xi)\|_{B_\omega} < +\infty$ pour tout $\alpha \in \{0,1\}^n$, où B_ω désigne l'algèbre des multiplicateurs de A_ω. Alors l'opérateur pseudo-différentiel de symbole σ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Voici deux COROLLAIRES du THÉORÈME 4.

1) On fait $\omega(\xi) = (1+|\xi|^2)^s$ $(s > n/2)$ et l'on remarque que $A_\omega \subset B_\omega$; ainsi les conditions $\|\partial_\xi^\alpha \sigma(\,\cdot\,,\xi)\|_{H^s} \le C_\alpha$ $(\alpha \in \{0,1\}^n, s > n/2)$ sont suffisantes pour que $\mathrm{Op}(\sigma)$ soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2) On fait $\omega(\xi) = (1+\xi_1^2)\dots(1+\xi_n^2)$: on obtient alors le THÉORÈME 1 (hypothèses (ii)).

Soit E un espace de Banach; on désigne par $M(\mathbb{R}^n, E)$ (resp. $N(\mathbb{R}^n, E)$) l'espace des $f : \mathbb{R}^n \to E$ telles que $f^{(\alpha)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n, E)$) pour $\alpha \in \{0,1\}^n$.

Soit B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G (E, F, G espaces de Banach); si $f \in M(\mathbb{R}^n, E)$ et $g \in N(\mathbb{R}^n, F)$, on a immédiatement $B(f,g) \in N(\mathbb{R}^n, G)$.

Appliquons ceci à $E = B_\omega$, $F = G = A_\omega$. $M(\mathbb{R}^n, B_\omega)$ est l'espace des symboles vérifiant les hypothèses du THÉORÈME 4; $N(\mathbb{R}^n, A_\omega)$ est l'algèbre de Beurling $A_\Omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ associée au poids $\Omega(x,\xi) = \omega(x)(1 + \xi_1^2)\dots(1+\xi_n^2)$.

On vient de voir précisément que $M(\mathbb{R}^n, B_\omega)$ est formée de multiplicateurs de $N(\mathbb{R}^n, A_\omega)$; il ne reste plus qu'à appliquer le THÉORÈME 3. Cela termine la preuve du THÉORÈME 4.

Remerciements. — Le présent travail avait fait l'objet d'une prépublication au "Séminaire d'Analyse Harmonique" (Orsay, 1981–82). Les éditeurs du Bulletin de la S.M.F. lui assurent aujourd'hui une plus large diffusion. C'est un plaisir pour nous de les en remercier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (A.) and VAILLANCOURT (R.). — On the boundedness of pseudo-differential operators, *J. Math. Soc. Japan*, t. **23**, 1971, p. 374–378.
[2] COIFMAN (R.R.) et MEYER (Y.). — Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, [Astérisque **57**], *Soc. Math. France*, 1978.
[3] CORDES (H.O.). — On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudo-differential operators, *J. Funct. Anal.*, t. **18**, 1975, p. 115–131.
[4] HÖRMANDER (L.). — Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, *Proc. Sympos. Pure Math.*, t. **10**, 1966, p. 138–183.
[5] HWANG (I.L.). — The L^2 Boundedness of pseudo-differential Operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **302**, 1987, p. 55–76.
[6] KATO (T.). — Boundedness of some pseudo-differential operators, *Osaka J. Math.*, t. **13**, 1976, p. 1–9.
[7] STEIN (E. M.). — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton, University Press, 1970.
[8] TAYLOR (M. E.). — *Pseudodifferential operators.* — Princeton, University Press, 1981.
[9] TREVES (F.). — *Basic linear partial differential equations.* — Academic Press, 1975.