BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL DUBREIL

Contribution à la théorie des demi-groupes. III

Bulletin de la S. M. F., tome 81 (1953), p. 289-306

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__289_0>

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES DEMI-GROUPES (III);

PAR M. P. DUBREIL.

Le présent travail, qui se rattache plus ou moins étroitement à des Mémoires antérieurs (¹), est divisé en deux parties. La première, formée des sections 1, 2, 3 concerne l'étude de certains idéaux remarquables d'un demi-groupe D : *idéaux fermés à droite* (par exemple), *idéaux larges*.

Les idéaux fermés à droite sont des idéaux à droite particuliers, caractérisés par une propriété de fermeture (au sens de E. H. Moore) (²) introduite à partir de l'équivalence $\mathcal{M}_D$ définie dans l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(D)$ par la relation $XD = X'D$. Cette relation apparaît d'elle-même dans l'étude des *résidus* (³) : on sait que le résidu à droite W_H d'un *complexe* (ou partie non vide) H est l'ensemble des éléments w de D pour lesquels l'équation $wx \in H$ n'a aucune solution x; W_H est un idéal à droite et une classe par rapport à l'équivalence principale à droite $\mathcal{R}_H$ définie par H ([1], chap. I). L'étude des résidus se place donc au point où les théorèmes sur les demi-groupes qui s'inspirent de la Théorie des groupes s'articulent avec ceux qui généralisent la Théorie des anneaux. Je montre ici (§ 2) que *tout résidu à droite est un idéal fermé à droite, et réciproquement.* Parmi ces idéaux figurent toujours les *idéaux premiers;* tout idéal à droite de D est d'ailleurs fermé à droite dès que D possède un élément-unité à droite. L'idée qui conduit à ces résultats est extrêmement simple : elle consiste à regarder l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(D)$ comme un *demi-groupe demi-réticulé* ou, plus brièvement, *gerbier*, qui possède en outre la propriété d'être *résidué* (⁴) : les règles de calcul qui en résultent sont rappelées, et leurs premières conséquences sont développées, dans le paragraphe 1.

(¹) P. DUBREIL, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (*Mém. Acad. Sc.*, t. 63, 1941, p. 1-52), désigné ultérieurement par [1]; P. DUBREIL, *Contribution à la Théorie des demi-groupes* (II). (*Rendiconti di Matem. e. d. s. appl.*, 5ᵉ série, vol. 10, 1951, p. 183-200), désigné par [2]; R. CROISOT, *Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 80, 1952, p. 217-223), désigné par [3].

(²) E. H. MOORE, *Introduction to a form of general Analysis* (New Haven, 1910); *voir* aussi G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 2ᵉ édit., p. 49, ou P. DUBREIL, *Algèbre*, t. 1, 2ᵉ édit., chap. I, § 11 (Paris, Gauthier-Villars, sous presse).

(³) [2], § 2, égalité (3) $W_H D = \mathfrak{m} D$.

(⁴) Le succès de cette méthode confirme l'intérêt qui s'attache à cette structure de *gerbier*, dont on trouvera une étude systématique dans : M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur les treillis, les structures algébriques ordonnées et les treillis géométriques* (2ᵉ partie) (Paris, Gauthier-Villars, sous presse).

Dans bien des questions, un complexe H d'un demi-groupe peut être remplacé par sa *trace* $T = D^2 \cap H$ sur l'ensemble D^2 des produits ab. On est ainsi conduit à considérer, dans l'ensemble des parties X de D, l'équivalence $\mathcal{J}$ définie par la relation $D^2 \cap X = D^2 \cap X'$, et qui coïncide avec l'égalité si D est *globalement idempotent* ($D^2 = D$). Dans tout ensemble d'idéaux à droite équivalents mod $\mathcal{J}$, il y en a un *maximum*, qui est dit *large*. Je montre (§ 3) que *tout idéal premier est large*, et que *le résidu* W_H *d'un complexe* H *est large dès que* H *vérifie la condition* $H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$, *ce qui a lieu notamment pour tout sous-demi-groupe de* D.

Dans la seconde partie, je reviens d'abord (§ 4) sur l'étude des *complexes forts* d'un demi-groupe. Les propriétés des *sous-demi-groupes forts* ([1], chap. I, § 3, où les sous-demi groupes sont désignés sous le nom de sous-groupoïdes) s'étendent aux *complexes forts contenant un sous-demi-groupe non vide*. Cette généralisation repose sur l'introduction de la notion, nouvelle, de *complexe unitaire par rapport à un autre complexe*. D'autre part, la lecture du travail de R. Croisot [3] m'a suggéré un théorème sur la comparaison d'un complexe fort H (non nécessairement symétrique) avec sa trace $T = D^2 \cap H$: c'est l'objet du théorème 12 dans lequel on voit de nouveau apparaître la condition $H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$, accompagnée de la condition symétrique $H \cap D^2 \cap {}_H W = \emptyset$.

La cinquième et dernière section est consacrée aux analogies supplémentaires qui peuvent apparaître, moyennant des hypothèses convenables, entre la décomposition d'un demi-groupe en classes par l'équivalence principale à droite relative à un sous demi-groupe, et la décomposition d'un groupe en classes à droite par rapport à un sous-groupe.

1. **Demi-groupe des parties; quotients.** — A un demi-groupe D, associons le demi-groupe $\mathfrak{T}$ défini de la façon suivante. $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(D)$ est l'ensemble des parties de D; le produit AB de deux parties non vides ou *complexes* A, B est le *complexe-produit*, c'est-à-dire l'ensemble des produits ab, où a, b décrivent respectivement A, B; la partie vide $\emptyset$ est élément-zéro de $\mathfrak{T}$: $\emptyset X = X\emptyset = \emptyset$ quel que soit X dans $\mathfrak{T}$. Par rapport à la multiplication ainsi définie, $\mathfrak{T}$ est un *demi-groupe*, que nous appellerons *demi-groupe des parties*.

Ordonné par la relation d'inclusion des parties, $X \subseteq Y$, $\mathfrak{T}$ est un treillis (et même une algèbre de Boole); la multiplication est *isotone*,

$$X \subseteq Y \quad \text{entraîne} \quad AX \subseteq AY \quad \text{et} \quad XB \subseteq YB,$$

et même *distributive par rapport à la réunion :*

$$A\Big(\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M\Big) = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} AM, \qquad \Big(\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M\Big)A = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} MA.$$

mais elle n'est *pas distributive par rapport à l'intersection :* on a seulement

$$A\Big(\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M\Big) \subseteq \bigcap_{M \in \mathcal{F}} AM, \qquad \Big(\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M\Big)A \subseteq \bigcap_{M \in \mathcal{F}} MA.$$

Par exemple, dans un demi-groupe D où tout produit est égal à un même élément z, si l'on considère une famille $\mathcal{F}$ de parties M dont l'intersection est vide, on a

$$A\left(\bigcap_{M\in\mathcal{F}} M\right) = \emptyset \subset \bigcap_{M\in\mathcal{F}} AM = \{z\}.$$

$\mathfrak{T}$ a donc une structure de *demi-groupe demi-réticulé*, ou *gerbier*.

$\mathfrak{T}$ est de plus un *gerbier résidué*. Rappelons que le *résiduel* ou *quotient à gauche* $Q = H \cdot\!\!.\ R$ de H par R (H, $R \in \mathfrak{T}$) est la plus grande des parties X de D vérifiant $XR \subseteq H$. On définit symétriquement le *quotient à droite* $H \mathbin{.\!\cdot} R$ au moyen de la relation $RY \subseteq H$. Dans le cas abélien, le quotient est désigné par $H : R$.

Remarque. — Si D possède un élément-zéro z, le complexe $Z = \{z\}$, contenu dans tout idéal, est élément-zéro de l'ensemble $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} - \{\emptyset\}$ des *complexes* de D; il est cependant préférable, même dans ce cas, de considérer le demi-groupe $\mathfrak{T}$ plutôt que le demi-groupe $\mathfrak{T}'$, parce que $\mathfrak{T}'$, en général, n'est pas résidué. Par exemple, dans le demi-groupe multiplicatif $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, le quotient $H : R$ de l'ensemble H des nombres impairs par l'ensemble R des nombres pairs, est vide. De plus, $\mathfrak{T}$ a sur $\mathfrak{T}'$ l'avantage de posséder un *élément minimum*, $\emptyset$. On notera que, si D possède un élément zéro z, le complexe $Z = \{z\}$ *n'est pas un zéro dans* $\mathfrak{T}$: on a en effet $\emptyset Z = Z\emptyset = \emptyset$ (et non Z).

Dans la fin de cette section et dans certains résultats des paragraphes 2 et 3 interviendront seulement les propriétés suivantes de l'ensemble des parties $\mathfrak{T}$ du demi-groupe D :

$\mathfrak{T}$ est un *gerbier résidué;*

$\mathfrak{T}$ possède un *élément minimum* $\emptyset$ et un *élément maximum* D, on a $\emptyset X = X\emptyset = \emptyset$ et $AB = \emptyset$ (ou $BA = \emptyset$) avec $A \neq \emptyset$ entraîne $B = \emptyset$;

$\mathfrak{T}$ est un demi-treillis *complet* $\left(\text{c'est-à-dire toute union} \bigcup_{X\in\mathcal{F}} X \text{ existe}\right)$.

Deux éléments quelconques X, Y de $\mathfrak{T}$ ont, dans $\mathfrak{T}$, une *intersection* (ou borne inférieure) $X \cap Y$: $\mathfrak{T}$ est donc un *treillis*, et, d'après un théorème classique ([5]), ce treillis est *complet* (toute intersection existe).

Ces axiomes définissent une structure abstraite plus particulière que celles de gerbier et de gerbier résidué et, elle aussi, digne d'intérêt.

Propriétés. — Les relations $XR \subseteq H$ et $XR \subseteq DR \cap H$ étant vérifiées en même temps, on a

$$H \cdot\!\!.\ R = (DR \cap H) \cdot\!\!.\ R,$$

R *étant donné, le quotient* $H \cdot\!\!.\ R$ *ne dépend que de l'intersection* $DR \cap H$.

On a $H \cdot\!\!.\ \emptyset = D$ quel que soit $H \in \mathfrak{T}$ (en particulier $\emptyset \cdot\!\!.\ \emptyset = D$). Si $R \neq \emptyset$,

---

([5]) *Voir* par exemple, G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, chap. IV, théorème 2, p. 49; ou M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur les treillis*, 1re partie, chap. III, § 2, théorème 1. On notera que $\mathfrak{T}$ n'est pas un demi-groupe *réticulé*, cette dénomination impliquant la distributivité de la multiplication par rapport à l'intersection.

$Q = H \cdot\!\!. R$ est l'ensemble des éléments q de D vérifiant $qr \in H$ *quel que soit* $r \in R$; en particulier, $\emptyset \cdot\!\!. R = \emptyset$ $(R \neq \emptyset)$.

Si l'on a $DR \subseteq H$, il en résulte $H \cdot\!\!. R = D$; $D^2 \subseteq H$ entraîne donc $H \cdot\!\!. R = D$ quel que soit $R \in \mathfrak{T}$ et l'on a, en particulier, $D \cdot\!\!. R = D$.

Rappelons encore les règles de calcul classiques [6] :

(1) $\qquad H \subseteq H'$ entraîne $H \cdot\!\!. R \subseteq H' \cdot\!\!. R$,

(2) $\qquad R \subseteq R'$ entraîne $H \cdot\!\!. R' \subseteq H \cdot\!\!. R$.

On a

$$(H \cdot\!\!. R_1) \cdot\!\!. R_2 = H \cdot\!\!. (R_2 R_1), \tag{3}$$

$$\Big(\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H\Big) \cdot\!\!. R = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \cdot\!\!. R, \tag{4}$$

$$H \cdot\!\!. \Big(\bigcup_{R \in \mathcal{F}} R\Big) = \bigcap_{R \in \mathcal{F}} H \cdot\!\!. R, \tag{5}$$

en particulier

$$H \cdot\!\!. R = \bigcap_{r \in R} H \cdot\!\!. r,$$

en désignant, pour simplifier, par $H \cdot\!\!. r$ le quotient à gauche de H par le complexe $\{r\}$.

Théorème I. — 1° *Quels que soient* $A, R \in \mathfrak{T}$, *on a*

$$A \subseteq AR \cdot\!\!. R; \tag{6}$$

et, en particulier, $D = DR \cdot\!\!. R$.

2° AR *est la plus petite partie* H *de* D *vérifiant*

$$A \subseteq H \cdot\!\!. R; \tag{7}$$

3° *Pour qu'il existe au moins une partie* H *de* D *vérifiant l'égalité*

$$A = H \cdot\!\!. R \tag{8}$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$A = AR \cdot\!\!. R \tag{9}$$

ou, ce qui revient au même,

$$AR \cdot\!\!. R \subseteq A. \tag{9'}$$

1° On a $AR \subseteq AR$, donc $A \subseteq AR \cdot\!\!. R$. Pour $A = D$, il vient $DR \cdot\!\!. R = D$.

2° L'ensemble $\mathcal{H}$ des parties H de D vérifiant (7) n'est pas vide puisque $AR \in \mathcal{H}$. D'après (4), l'intersection $H_0 = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ vérifie (7); comme c'est, par construction,

---

[6] *Voir* par exemple, pour le cas des idéaux d'un anneau commutatif, van der Waerden *Moderne Algebra*, t. 2, 2ᵉ édit., p. 24 (§ 85); pour celui des éléments d'un treillis multiplicatif, G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 2ᵉ édit., chap. XIII, § 1, p. 201; pour celui des éléments d'un groupoïde ordonné (vérifiant éventuellement des conditions plus fortes), M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot. *Leçons sur les treillis* ..., IIᵉ partie, chap. II; (on notera qu'ici $\mathfrak{T}$ est un treillis *complet*). Cette théorie de la résiduation, qui remonte à Dedekind et Macaulay, a été développée principalement par Krull, Ward et Dilworth.

la plus petite partie de D ayant cette propriété, nous avons $H_0 \subseteq AR$. D'autre part, $A \subseteq H_0 \therefore R$ entraîne $AR \subseteq H_0$, d'où l'égalité $H_0 = AR$.

3° Si une partie H de D vérifie (8), elle vérifie (7), donc contient AR, et nous avons, d'après (6) et (1),

$$A \subseteq AR \therefore R \subseteq H \therefore R = A$$

et par conséquent (9). Cette condition (9), nécessaire pour que (8) ait au moins une solution H, est évidemment suffisante, et, d'après (6), équivalente à (9').

A chaque partie R de D, associons les deux relations d'équivalence ${}_R\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_R$, définies dans $\mathfrak{T}$ de la façon suivante :

On pose

$$H \equiv H' \quad ({}_R\mathfrak{N}) \qquad \text{si et seulement si} \quad H \therefore R = H' \therefore R.$$

On pose

$$X \equiv X_1 \quad (\mathfrak{M}_R) \qquad \text{si et seulement si} \quad XR = X_1 R.$$

Étudions leurs propriétés.

Puisque $H \therefore R = (DR \cap H) \therefore R$, ${}_R\mathfrak{N}$ contient l'équivalence ${}_R\mathfrak{J}$ définie en posant

$$H \equiv H' \quad ({}_R\mathfrak{J}) \qquad \text{si et seulement si} \quad DR \cap H = DR \cap H'.$$

Chaque classe $\text{mod}\,{}_R\mathfrak{N}$ est *convexe* par rapport à la relation d'inclusion, c'est-à-dire $H \subseteq X \subseteq H'$ et $H \equiv H'$ $({}_R\mathfrak{N})$ entraînent $X \equiv H$ $({}_R\mathfrak{N})$; d'après (4), *chaque classe* $\text{mod}\,{}_R\mathfrak{N}$ *est fermée par rapport à l'intersection des parties, donc contient une partie minimum, intersection de toutes les parties appartenant à cette classe.*

A et R étant deux parties données de D, les parties H vérifiant $A = H \therefore R$, *s'il en existe*, forment une classe $\text{mod}_R\mathfrak{N}$. Cette classe comprend alors, d'après le théorème 1, le produit AR, qui est précisément la plus petite partie de cette classe.

D'après (3), l'équivalence ${}_R\mathfrak{N}$ est contenue dans l'équivalence ${}_{SR}\mathfrak{N}$, quel que soit $S \in \mathfrak{T}$.

L'équivalence $\mathfrak{M}_R$ est *régulière à gauche* pour la multiplication définie dans $\mathfrak{T}$. Chaque classe $\text{mod}\,\mathfrak{M}_R$ est *convexe*, et fermée par rapport à la réunion des parties : *chaque classe* $\{X, \ldots, X_1, \ldots\}\,\text{mod}\,\mathfrak{M}_R$ *contient donc une partie maximum* $\bar{X}$, *réunion de toutes les parties appartenant à cette classe.*

L'application $X \to \bar{X}$ *est une fermeture au sens de E. H. Moore.* On a évidemment $X \subseteq \bar{X}$ et $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$; il suffit donc de montrer que $Y \subseteq X$ entraîne $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$. Or, on a, par hypothèse,

$$\bar{Y}R = YR \subseteq XR = \bar{X}R$$

et il suffit d'utiliser la proposition suivante :

Lemme 1. — *Si* $\bar{X}$ *est maximum dans sa classe* $\text{mod}\,\mathfrak{M}_R$, *l'inclusion*

$$CR \subseteq \bar{X}R$$

entraîne

$$C \subseteq \bar{X}.$$

On a en effet

$$\bar{X}R \subseteq (\bar{X} \cup C)R = \bar{X}R \cup CR = \bar{X}R,$$

d'où

$$(\bar{X} \cup C)R = \bar{X}R,$$

c'est-à-dire

$$\bar{X} \cup C \equiv \bar{X} \quad (\mathcal{M}_R),$$

ce qui exige $\bar{\bar{X}} \cup C = \bar{X}$, donc $C \subseteq \bar{X}$.

La fermeture $X \to \bar{X}$ sera appelée *fermeture à droite associée à* R; les parties $\bar{X}$ seront dites *fermées à droite par rapport à* R.

Théorème 2. — 1° *Pour toute partie* X *de* D, *on a*

$$(10) \qquad \bar{X} = XR \cdot\!\!. \; R.$$

2° *Les parties* $\bar{\bar{X}}$ *fermées à droite par rapport à* R *sont caractérisées par chacune des propriétés*

a.

$$\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{X}}R \cdot\!\!. \; R.$$

b. Il existe au moins une partie $H \in \mathfrak{T}$ *telle que* $\bar{\bar{X}} = H \cdot\!\!. \; R$.

1° Par définition, $\bar{X}$ est la réunion des parties X_ι vérifiant $X_\iota R = XR$; chacune de ces parties est contenue dans le quotient $XR \cdot\!\!. \; R = Q$, d'où $\bar{X} \subseteq Q$. Inversement, nous avons $QR \subseteq XR \subseteq \bar{X}R$, d'où, d'après le lemme 1, $Q \subseteq \bar{X}$, donc l'égalité.

2° $\bar{X}$ étant la partie fermée à droite par rapport à R qui contient $\bar{\bar{X}}$ (puisque $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$), on a, d'après 1°, $\bar{X} = \bar{X}R \cdot\!\!. \; R$. Inversement, si une partie X vérifie l'égalité $X = XR \cdot\!\!. \; R$, on a, toujours d'après 1°, $X = \bar{X}$, X est fermée à droite, et la propriété *a* est caractéristique pour les parties fermées à droite par rapport à R. La propriété *b*, équivalente à *a* d'après le théorème 1, 3°, caractérise également ces parties.

2. Idéaux fermés à droite. — Rappelons qu'un idéal à droite du demi-groupe D est une partie $\mathfrak{m}$ de D ($\mathfrak{m} \in \mathfrak{T}$) vérifiant la condition $\mathfrak{m}D \subseteq \mathfrak{m}$; d'après cette définition et les règles de calcul du paragraphe 1, la partie vide $\emptyset$ sera considérée comme un idéal à droite; toute réunion et toute intersection d'idéaux à droite sont des idéaux à droite.

H étant une partie quelconque de D, l'intersection des idéaux à droite contenant H est le plus petit idéal à droite $|H)$ contenant H. $|H)$ est appelé *idéal à droite engendré par* H. L'inclusion $H \subseteq |H)$ entraîne $HD \subseteq |H)D \subseteq |H)$, d'où $H \cup HD \subseteq |H)$; $H \cup HD$ étant un idéal à droite contenant H, nous avons finalement

$$(1) \qquad |H) = H \cup HD,$$

$|H)$ et HD sont en général deux idéaux à droite distincts; ils coïncident si l'on a

$H \subseteq HD$ et seulement dans ce cas. L'égalité (1) entraîne $|H)D = HD$; on a donc

$$|H) \equiv H \quad (\mathcal{M}_D).$$

L'idéal à droite $|h)$ engendré par un seul élément h est dit *principal*. L'idéal engendré par un ensemble fini $\{h_1, \ldots, h_n\}$ est désigné par $|h_1, \ldots, h_n)$. L'idéal $\left|\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\right)$ engendré par une réunion est la réunion des idéaux $|H)$ correspondants.

On obtient aussi des idéaux par formation des quotients. Remarquons d'abord que *le quotient à gauche* $Q = H \cdot\!. R$ *est un idéal à gauche si* H *en est un*, puisqu'on a

$$DQ.R = D.QR \subseteq DH \subseteq H, \qquad \text{d'où} \qquad DQ \subseteq Q.$$

THÉORÈME 3. — 1° *Quelle que soit la partie* H *de* D, $Q = H \cdot\!. R$ *est un idéal à droite si* R *est un idéal à gauche; en particulier, les quotients à gauche* $H \cdot\!. D$, $H \cdot\!. D^{\alpha}$ (*α entier naturel*) *sont des idéaux à droite.*

2° *Les idéaux à droite de la forme* $H \cdot\!. D$ *sont les parties* $\mathfrak{f}$ *fermées à droite* (*par rapport à* D), *caractérisées par la condition*

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}D \cdot\!. D.$$

Ces idéaux $\mathfrak{f}$ *seront dits fermés à droite.*

1° Nous avons, si R est un idéal à gauche,

$$QD.R = Q.DR \subseteq QR \subseteq H,$$

donc $QD \subseteq Q$, et Q est un idéal à droite; il en est ainsi, notamment, pour des quotients de la forme $H \cdot\!. D$, $H \cdot\!. D^{\alpha}$.

2° D'après le théorème 2, les idéaux à droite $H \cdot\!. D$ ne sont autres que les parties $\mathfrak{f}$ fermées à droite (par rapport à D), caractérisées par la condition

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}D \cdot\!. D$$

et l'*on a*

$$\mathfrak{f} = H \cdot\!. D$$

pour toute partie H *vérifiant*

$$H \equiv \mathfrak{f}D \quad ({}_D\mathcal{R}).$$

Remarques. — 1. *Toute intersection* $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} (H \cdot\!. D)$ *d'idéaux fermés à droite est l'idéal de même forme* $\left(\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H\right) \cdot\!. D$.

2. Pour tout idéal à droite $\mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \cdot\!. D$, et, plus généralement, quel que soit $A \in \mathfrak{T}$, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \cdot\!. A$ (puisque $\mathfrak{m}A \subseteq \mathfrak{m}$).

THÉORÈME 4. — *Pour que l'idéal à droite* $|A)$ *engendré par une partie* A *de* D *soit fermé à droite, il faut et il suffit que* A *vérifie la condition*

$$AD \cdot\!. D \subseteq A \cup AD. \tag{2}$$

Pour que $|A)$ soit fermé à droite, il faut et il suffit que l'on ait

$$|A) = |A)D \cdot. D,$$

c'est-à-dire

$$A \cup AD = AD \cdot. D.$$

Or, on a toujours $A \subseteq AD \cdot. D$ et $AD \subseteq AD \cdot. D$; la condition (2) est donc nécessaire et suffisante.

Exemple. — Considérons le demi-groupe (abélien) $D = \{a, b, c, z\}$ défini par la table suivante :

	a	b	c	z
a	b	c	z	z
b	c	z	z	z
c	z	z	z	z
z	z	z	z	z

Puisque z est élément-zéro, tout idéal non vide contient z. Les idéaux de D sont par conséquent : $\emptyset$, $\mathfrak{m}_1 = \{z\} = zD = cD = (z)$, $\mathfrak{m}_2 = \{c, z\} = (c) = bD$, $\mathfrak{m}_3 = \{b, c, z\} = (b) = aD = D^2$, et enfin D. On a

$$\mathfrak{m}_1 D : D = \{z\} : D = \{c, z\} = \mathfrak{m}_2,$$
$$\mathfrak{m}_2 D : D = \{z\} : D = \mathfrak{m}_2,$$

donc, en désignant par $\overline{\mathfrak{m}}$ la fermeture de $\mathfrak{m}$ (par rapport à D),

$$\mathfrak{m}_1 \subset \overline{\mathfrak{m}}_1 = \overline{\mathfrak{m}}_2 = \mathfrak{m}_2,$$

puis

$$\mathfrak{m}_3 D : D = \{c, z\} : D = \{b, c, z\} = \mathfrak{m}_3$$

et par conséquent

$$\mathfrak{m}_3 = \mathfrak{m}_3.$$

Rappelons que le *résidu à droite* W_H d'une partie H de D est l'ensemble des éléments w de D vérifiant la condition (7)

(3) $$H \mathbin{.\cdot} w = \emptyset$$

équivalente à

(4) $$wD \subseteq D - H$$

ou, puisque $wD \subseteq D^2$, à

(5) $$wD \subseteq D^2 - (D^2 \cap H).$$

On a donc

(6) $$W_H = (D - H) \cdot. D = [D^2 - (D^2 \cap H)] \cdot. D$$

et par conséquent, *tout résidu à droite, de la forme* $K \cdot. D$, *est un idéal fermé à droite.*

---

(7) [1], chap. I, § 1, p. 8; [2], chap. I, § 1 et 2, p. 2 à 5. Lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, il nous arrivera d'écrire résidu pour résidu à droite.

THÉORÈME 5. — *Réciproquement, tout idéal fermé à droite* $\mathfrak{f}$ *est le résidu de* $H = D - \mathfrak{f}D$, *de* $K = D^2 - \mathfrak{f}D$, *et de toute partie comprise entre* H *et* K.

Nous avons en effet, H et K étant définis comme dans l'énoncé,

$$W_H = (D - H) \cdot . \ D = \mathfrak{f}D \cdot . \ D = \mathfrak{f},$$
$$W_K = [D^2 - (D^2 \cap K)] \cdot . \ D = (D^2 - K) \cdot . \ D = \mathfrak{f}D \cdot . \ D = \mathfrak{f}.$$

Puisque $K \subseteq X \subseteq H$ entraîne $W_H \subseteq W_X \subseteq W_K$, le résidu de toute partie X comprise entre H et K est également $\mathfrak{f}$.

Remarque. — Si X et Y sont deux parties de D ayant le même résidu à droite $\mathfrak{f}$, on a

$$\mathfrak{f} = (D - X) \cdot . \ D = (D - Y) \cdot . \ D,$$

donc

$$D - X \equiv D - Y \quad ({}_D\mathcal{R}).$$

Or, une classe de parties équivalentes $\bmod_D \mathcal{R}$ contient une partie *minimum* : il existe par suite un X *maximum* vérifiant la condition $W_X = \mathfrak{f}$. Cet X n'est autre que $H = D - \mathfrak{f}D$. Soit en effet

$$m = ar \qquad (a \in \mathfrak{f}, \ r \in D)$$

un élément de $\mathfrak{f}D$; pour toute partie M comprenant m, on a $a \notin W_M$, d'où $\mathfrak{f} \neq W_M$: ainsi, *une partie ayant* $\mathfrak{f}$ *pour résidu est nécessairement disjointe de* $\mathfrak{f}D$; $D - \mathfrak{f}D$ *est donc la plus grande partie ayant* $\mathfrak{f}$ *pour résidu à droite.*

Indiquons encore les propriétés suivantes (*cf.* [2], chap. I, § 2, p. 5).

Pour qu'un idéal à droite $\mathfrak{m}$ *soit fermé à droite par rapport à une partie quelconque* R *de* D, *il* SUFFIT *que l'on ait* $\mathfrak{m} \cdot . \ R = \mathfrak{m}$.

En effet, l'égalité $XR = \mathfrak{m}R (\subseteq \mathfrak{m})$ entraîne $X \subseteq \mathfrak{m} \cdot . \ R$, donc ici $X \subseteq \mathfrak{m}$: l'idéal $\mathfrak{m}$ est donc bien la partie maximum dans la classe $\bmod \mathcal{M}_R$ à laquelle il appartient.

Pour un idéal à droite premier $\mathfrak{p}$, *la condition* $\mathfrak{p} \cdot . \ R = \mathfrak{p}$ *est remplie dès que* R *n'est pas contenu dans* $\mathfrak{p}$. Soit en effet $r \in R$, $r \notin \mathfrak{p}$; si $x \in \mathfrak{p} \cdot . \ R$, on a $xr \in \mathfrak{p}$ d'où $x \in \mathfrak{p}$ donc $\mathfrak{p} \cdot . \ R \subseteq \mathfrak{p}$, ce qui entraîne l'égalité.

Si $R = D$, nous avons $\mathfrak{p} \cdot . \ D = \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq D$ et, puisque $D \cdot . \ D = D$, *nous avons*

$$\mathfrak{p} \cdot . \ D = \mathfrak{p}$$

pour tout idéal à droite premier $\mathfrak{p}$.

Nous avons obtenu la proposition suivante :

THÉORÈME 6. — *Les idéaux à droite* $\mathfrak{m}$ *vérifiant*

$$\mathfrak{m} \cdot . \ D = \mathfrak{m},$$

en particulier les idéaux à droite premiers, et les intersections d'idéaux à droite premiers, sont des idéaux fermés à droite.

Remarque. — Il est facile de montrer directement que tout idéal à droite premier $\mathfrak{p}$ est fermé à droite. Soit $X \equiv \mathfrak{p}\ (\mathcal{M}_D)$; si $x \in X$, on a $x^2 \in XD = \mathfrak{p}D \subseteq \mathfrak{p}$, d'où $x \in \mathfrak{p}$ et par conséquent $X \subseteq \mathfrak{p}$.

En résumé, nous avons établi qu'*il y a identité entre :*

les parties maximum appartenant aux classes $\mathcal{M}_D$, *ou parties fermées à droite* (*par rapport à* D) *caractérisées par la condition*

$$X = XD \cdot\!\!.\ D;$$

les idéaux fermés à droite $\mathfrak{f}$, *de la forme* $H \cdot\!\!.\ D$, $H \in \mathfrak{T}$;

les résidus à droite W_H des différentes parties H de D.

De plus, l'ensemble $\mathfrak{F}^*$ *des idéaux fermés à droite comprend les idéaux à droite* $\mathfrak{m}$ *vérifiant l'égalité* $\mathfrak{m} \cdot\!\!.\ D = \mathfrak{m}$, *en particulier les idéaux à droite premiers* $\mathfrak{p}$; *enfin* $\mathfrak{F}^*$ *est fermé par rapport à l'intersection des idéaux.*

Pour que tout idéal à droite de D *soit fermé à droite, il faut et il suffit que la condition* (S) *suivante soit remplie :*

(S) *Dans le demi-groupe multiplicatif* $\mathfrak{T}^*$ *des idéaux à droite*, D (*élément maximum de* $\mathfrak{T}$ *et de* $\mathfrak{T}^*$) *est simplifiable à droite.*

En effet, il faut et il suffit que chaque classe mod $\mathcal{M}_D$ contienne un seul idéal à droite, donc que l'égalité $\mathfrak{m}D = \mathfrak{m}'D$ entre idéaux à droite implique $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$.

Chacune des conditions suivantes, de plus en plus fortes, entraîne la condition (S), donc est *suffisante* pour que tout idéal à droite de D soit fermé à droite.

(S_1) $\mathfrak{m}D = \mathfrak{m}$, *ou* $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}D$, *pour tout idéal à droite* $\mathfrak{m}$.

(S_2) $X \subseteq XD$ *pour tout* $X \in \mathfrak{T}$; cette condition signifie que *l'idéal à droite* $|X) = X \cup XD$ *engendré par* X *et l'idéal à droite* XD *coïncident, quel que* soit $X \subseteq D$.

D'autre part, la condition (S_2) est une conséquence de chacune des conditions suivantes :

(I) D est *idempotent*, c'est-à-dire $x^2 = x$, pour tout $x \in D$;

(E_d) D possède au moins un élément neutre à droite;

(Q_d) Pour deux éléments a, m quelconques de D, il existe au moins un *quotient à droite* q ($m\,q = a$).

En résumé, nous avons les implications :

$$\begin{array}{l} (I)\searrow \\ (E_d)\rightarrow (S_2) \rightarrow (S_1) \rightarrow (S) \rightleftarrows \textit{Tout idéal à droite est fermé à droite.} \\ (Q_d)\nearrow \end{array}$$

3. **Idéaux à droite larges**. — Nous dirons qu'un demi-groupe D est *globalement idempotent* s'il vérifie la condition

(G I) $$D^2 = D,$$

en d'autres termes si tout élément x de D est obtenu comme produit, $x = r\,s$.

Si l'on désigne par (E_g), (Q_g) les conditions respectivement symétriques de (E_d), (Q_d), la propriété (G I) résulte de l'une ou l'autre des conditions (E_d), (E_g); elle résulte aussi de l'une ou l'autre des conditions (Q_d), (Q_g); elle résulte enfin de la condition (S_2) et, *a fortiori*, de (I).

THÉORÈME 7. — *Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal à droite dans un demi-groupe* D.

1° *Les relations*

$$\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m} \cdot . D \quad (\mathcal{M}_D), \tag{1}$$

$$\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m} D \quad ({}_D\mathcal{M}) \tag{2}$$

ont lieu en même temps.

2° *Tout idéal à droite* $\mathfrak{m}$ *vérifie les relations* (1) *et* (2) :

a. dès que le demi-groupe D *satisfait à la condition* (S_1), ou, naturellement, à une des conditions plus fortes mentionnées ci-dessus;

b. dès que D *est globalement idempotent.*

1° Nous avons $\mathfrak{m} D \subseteq \mathfrak{m}$, donc

$$\mathfrak{m} D \cdot . D \subseteq \mathfrak{m} \cdot . D.$$

Comme $\mathfrak{m} D \cdot . D$ est la fermeture à droite $\overline{\mathfrak{m}}$ de $\mathfrak{m}$, la congruence (1) exige que l'on ait $\mathfrak{m} \cdot . D \subseteq \mathfrak{m} D \cdot . D$, d'où l'égalité

$$\mathfrak{m} \cdot . D = \mathfrak{m} D \cdot . D, \tag{2'}$$

c'est-à-dire la congruence (2).

Inversement, (2), sous la forme (2'), entraîne $\mathfrak{m} \cdot . D = \overline{\mathfrak{m}} \equiv \mathfrak{m}$ $(\mathcal{M}_D)$ c'est-à-dire (1).

2° *a.* La condition (S_1), $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} D$, entraîne évidemment (2), donc (1).

b. La relation

$$(\mathfrak{m} \cdot . D) D \subseteq \mathfrak{m}$$

entraîne, si D est globalement idempotent,

$$(\mathfrak{m} \cdot . D) D = (\mathfrak{m} \cdot . D) D^2 \subseteq \mathfrak{m} D \subseteq (\mathfrak{m} \cdot . D) D,$$

d'où

$$(\mathfrak{m} \cdot . D) D = \mathfrak{m} D,$$

c'est-à-dire (1).

Dans l'ensemble $\mathfrak{T}^*$ des idéaux à droite, considérons la relation d'équivalence $\mathcal{J}$ définie en posant

$$\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m}' \quad (\mathcal{J}) \qquad \text{si et seulement si} \quad \mathfrak{m} \cap D^2 = \mathfrak{m}' \cap D^2.$$

$\mathcal{J}$ se réduit à l'égalité si D est globalement idempotent. Banales dans ce cas, les considérations suivantes prennent leur intérêt dans les *demi-groupes qui ne sont pas globalement idempotents* ([8]).

([8]) D'après les tables de K. S. CARMAN, J. C. HARDEN et E.-E. POSEY il y a 11 demi-groupes globalement idempotent d'ordre 3 sur 18, 75 demi-groupes d'ordre 4 globalement idempotents sur 121.

L'intersection $\mathfrak{m} \cap D^2$ *est un idéal à droite*, qu'il sera commode de désigner par $\mathfrak{m}_2$ et d'appeler *trace* de l'idéal $\mathfrak{m}$ (sur D^2).

On a

$$\mathfrak{m}_2 \cdot . D = (\mathfrak{m} \cdot . D) \cap (D^2 \cdot . D) = \mathfrak{m} \cdot . D$$

puisque $D^2 \cdot . D = D$; *de cette propriété résulte l'inclusion*

$$\mathcal{J} \subseteq {}_D\mathcal{M}.$$

Remarque. — Pour tout idéal à droite $\mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{m} D \subseteq \mathfrak{m} \cap D^2 = \mathfrak{m}_2$. S'il s'agit d'un idéal premier $\mathfrak{p}$, la relation $a\, b \in \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}$ entraîne que l'un au moins des éléments a, b appartient à $\mathfrak{p}$, d'où $a\, b \in \mathfrak{p} D \cup D\, \mathfrak{p}$, et nous avons

$$\mathfrak{p}\, D \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}\, D \cup D\, \mathfrak{p}.$$

Si $\mathfrak{p}$ *est permutable à droite avec* D (c'est-à-dire si l'on a $D\, \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}\, D$), *il vient*

$$\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}\, D.$$

Or, l'idéal $\mathfrak{p}$, fermé à droite, est déterminé d'une façon unique par la classe mod $\mathcal{M}_D$ à laquelle il appartient, c'est-à-dire par le produit $\mathfrak{p}\, D$. Les idéaux à droite qui sont à la fois premiers et permutables à droite avec D, en particulier les idéaux premiers d'un demi-groupe abélien, sont donc déterminés d'une façon unique par leur trace.

L'équivalence $\mathcal{J}$ est régulière par rapport à la réunion et à l'intersection des idéaux à droite; les classes mod $\mathcal{J}$, évidemment convexes, contiennent un idéal à droite minimum qui est la trace commune $\mathfrak{m}_2$, et un idéal à droite *maximum* $\mathfrak{m}_1$, réunion de tous les idéaux de la classe. L'application $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}_1$ est d'ailleurs, dans $\mathfrak{T}^*$, une fermeture (au sens de E. H. Moore), car on a par construction $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_1$ et $(\mathfrak{m}_1)_1 = \mathfrak{m}_1$, et d'autre part l'inclusion $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$ entraîne

$$\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{n}_1 \equiv \mathfrak{m} \cup \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n}_1 \quad (\mathcal{J}),$$

donc $\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{n}_1 \subseteq \mathfrak{n}_1$ (d'où l'égalité), et enfin $\mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{n}_1$.

Cet idéal $\mathfrak{m}_1$, qui sera dit *large*, est de la forme

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 + M,$$

et on doit avoir

$$\mathfrak{m}_1 D \subseteq \mathfrak{m}_1,$$

ou, puisque $\mathfrak{m}_1 D$ est contenu aussi dans D^2,

$$\mathfrak{m}_1 D \subseteq \mathfrak{m}_2.$$

Or, on a $\mathfrak{m}_1 D = \mathfrak{m}_2 D \cup MD$, avec $\mathfrak{m}_2 D \subseteq \mathfrak{m}_2$, la condition précédente se réduit donc à

$$MD \subseteq \mathfrak{m}_2$$

et il faut prendre pour M *la plus grande partie de* $D - D^2$ vérifiant cette relation, d'où

$$M = (\mathfrak{m}_2 \cdot . D) \cap (D - D^2),$$

et enfin

(3) $$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 + (\mathfrak{m}_2 \cdot . \, D) \cap (D - D^2).$$

Pour qu'un idéal à droite donné, $\mathfrak{m}$, *soit large, il faut et il suffit qu'en posant* $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m} \cap D^2$, *on ait*

(4) $$(\mathfrak{m}_2 \cdot . \, D) \cap (D - D^2) \subseteq \mathfrak{m}.$$

Cette condition (4) équivaut en effet à $\mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{m}$, donc à l'égalité $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}$.

Il *suffit* en particulier que l'on ait

(5) $$\mathfrak{m}_2 \cdot . \, D \subseteq \mathfrak{m}.$$

Comme on a $\mathfrak{m} \cdot . \, D = \mathfrak{m}_2 \cdot . \, D$, la condition nécessaire et suffisante (4) s'écrit encore

(4') $$(\mathfrak{m} \cdot . \, D) \cap (D - D^2) \subseteq \mathfrak{m}$$

et la condition suffisante (5) peut s'écrire sous l'une des formes

(5') $$\mathfrak{m} \cdot . \, D \subseteq \mathfrak{m},$$

(5'') $$\mathfrak{m} \cdot . \, D = \mathfrak{m}$$

(puisqu'on a toujours $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \cdot . \, D$); ces conditions sont remplies par tout idéal premier et par toute intersection finie de tels idéaux premiers.

En résumé, nous avons la proposition suivante :

THÉORÈME 8. — *Pour qu'un idéal à droite* $\mathfrak{m}$ *soit large, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions* (4) *ou* (4'); *il suffit qu'il vérifie l'une des conditions* (5), (5') *ou* (5''). *En particulier, tout idéal à droite premier* $\mathfrak{p}$ *est large.*

Moyennant une hypothèse simple, le résidu à droite W_H d'un complexe H est un idéal à droite large. Soient $H_2 = D^2 \cap H$, $W_2 = D^2 \cap W_H$ les traces respectives de H et de W_H sur D : nous dirons que H est *dégagé de son résidu à droite* W_H si

$$H_2 \cap W_2 = H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$$

(cette condition est plus faible que $H \cap W_H = \emptyset$, elle-même plus faible que $W_H = \emptyset$, c'est-à-dire H net à droite).

THÉORÈME 9. — *Si le complexe* H *est dégagé de son résidu à droite, on a*

$$W_2 \cdot . \, D = W_H \cdot . \, D = W_H$$

et l'idéal à droite W_H *est un idéal large.*

D'après l'équation (6), (§ 2), on a $W_H = (D^2 - H_2) \cdot . \, D$. Soit $a \in W_2 \cdot . \, D$, nous avons, d'après l'hypothèse, $a\, D \subseteq W_2 \subseteq D^2 - H_2$, donc $a \in W_H$, et par suite $W_H \cdot . \, D = W_2 \cdot . \, D \subseteq W_H \subseteq W_H \cdot . \, D$, d'où l'égalité. L'idéal à droite W_H est large d'après le théorème 8.

COROLLAIRE. — *Si* H *est un sous-demi-groupe de* D, W_H *est un idéal à droite large.*

En effet, H et W_H sont alors disjoints, et le théorème précédent s'applique.

Remarque. — Pour que W_H soit un idéal large, H étant un complexe quelconque, il faut et il suffit, d'après la condition (4′), que l'on ait

$$[(D^2 - H_2) \cdot . D^2] \cap (D - D^2) \subseteq W_H,$$

mais cette condition nécessaire et suffisante semble peu maniable.

4. Complexes unitaires; complexes forts. — Théorème 10. — 1° *Pour toute partie* K *d'un demi-groupe* D, $K \cdot . K = U$ *est un sous-demi-groupe de* D *fermé à droite par rapport à* K.

2° *Tout complexe* V *unitaire à droite contenant* K *contient* U.

3° *Si l'on a* $uK = K$ *pour tout* $u \in U$, U *est unitaire à droite.*

4° *Si* K *est un sous-demi-groupe* S, *on a* $S \subseteq S \cdot . S = U$. *Si* S *est globalement idempotent, on a* $U \equiv S(\mathcal{M}_S)$.

1° Soient $u_1 \in U$, $u_2 \in U$; nous avons

$$u_1 u_2 . K = u_1 . u_2 K \subseteq u_1 K \subseteq K,$$

donc $u_1 u_2 \in U$. L'égalité $XK = UK$ entraîne

$$X \subseteq UK \cdot . K \subseteq K \cdot . K = U,$$

U est donc fermé à droite par rapport à K.

2° Soit $u \in U$; les relations $k \in K \subseteq V$ et $uk \in K \subseteq V$, où V est unitaire à droite, entraînent $u \in V$.

3° Soit $xu \in U$, avec $u \in U$; nous avons $xuK \subseteq K$ avec, par hypothèse $uK = K$; il en résulte $x \in U$, et U est unitaire à droite.

4° S étant un sous-demi-groupe, nous avons $S^2 \subseteq S$ d'où $S \subseteq S \cdot . S = U$. Il en résulte

$$S^2 \subseteq US \subseteq S,$$

d'où, si S est globalement idempotent, $S^2 = US (= S)$, c'est-à-dire $U \equiv S(\mathcal{M}_S)$; U est alors la fermeture à droite $\bar{S}$ de S par rapport à S.

N. B. — Dans un travail non encore publié, M. G. Thierrin établit en outre les propriétés suivantes.

1° U est saturé mod $\mathcal{R}_K$, où $\mathcal{R}_K$ est l'équivalence principale à droite définie par K.

2° Si K est un complexe fort et si U n'est pas vide, U est une classe mod $\mathcal{R}_K$.

La définition suivante, qui généralise la notion de complexe unitaire à droite, va permettre d'étendre les propriétés des sous-demi-groupes forts ([1], chap. I, § 3, p. 14) *aux complexes forts contenant un sous-demi-groupe.*

Nous dirons qu'un complexe S est *unitaire à droite par rapport à un complexe* H si les relations

$$s \in S, \qquad xs \in H$$

entraînent

$$x \in H,$$

en d'autres termes si l'on a

$$H \cdot . s \subseteq H \quad \textit{pour tout} \quad s \in S.$$

S'il en est ainsi, toute partie non vide S' de S est encore un complexe unitaire à droite par rapport à H.

Soit $\mathcal{R}_H$ l'équivalence principale à droite définie par H,

$$x \equiv y(\mathcal{R}_H) \rightleftarrows H \cdot . x = H \cdot . y.$$

THÉORÈME 11. — *Soient* H *un complexe fort d'un demi-groupe* D *et* S *un sous-demi-groupe* (*non vide*) *contenu dans* H.

1° S *est contenu dans une classe* A mod $\mathcal{R}_H$ *distincte de* W_H, *et l'on a*

$$(1) \qquad A = H \cdot . S = H \cdot . s_1. \quad \text{pour tout} \quad s_1 \in S.$$

Pour que la classe A *soit contenue dans* H, *il faut et il suffit que* S *soit unitaire à droite par rapport à* H.

2° *Le sous-demi-groupe* $U = S \cdot . S (\neq \emptyset)$ *est compris entre* S *et* A :

$$(2) \qquad S \subseteq U \subseteq A,$$

U, *donc aussi* S, *est unitaire à droite par rapport à* A.

3° *Si l'on a* $S \subseteq H \cdot . H$ (9), A *est un sous-demi-groupe de* D.

4° *Si* $D^2 \cap H (= T)$ *est contenu dans* S *et si* S *est unitaire à droite, on a*

$$S = U = A.$$

1° Quel que soit $s \in S$, nous avons $sS \subseteq S \subseteq H$, d'où $S \subseteq H \cdot . s$; les quotients à droite de H par deux éléments s_1, s_2 de S se coupent, donc coïncident (puisque H est fort); nous avons

$$s_1 \equiv s_2 \quad (\mathcal{R}_H)$$

et S est contenu dans une classe A mod $\mathcal{R}_H$ (avec $A \neq W_H$).

Si $a \in A$, nous avons $H \cdot . a = H \cdot . s$, donc $S \subseteq H \cdot . a$, $aS \subseteq H$, d'où $a \in H \cdot . S$ et $A \subseteq H \cdot . S \subseteq H \cdot . s_1$ pour tout $s_1 \in S$. Mais d'autre part $x \in H \cdot . s_1$ entraîne $s_1 \in H \cdot . x$; comme $s_1 \in H \cdot . s$ pour tout $s \in S$, nous avons $x \equiv s(\mathcal{R}_H)$, c'est-à-dire $x \in A$, d'où $H \cdot . s_1 \subseteq A$, et les égalités (1).

D'après ces égalités, les deux propositions : $A \subseteq H$ et « S est unitaire à droite par rapport à H » sont équivalentes.

2° On a $S \subseteq U$ d'après le théorème 9; d'autre part $US \subseteq S \subseteq H$ entraîne $U \subseteq H \cdot . S = A$. Soit $xu = a \in A$, où $u \in U$; il en résulte, pour tout $s \in S$,

$$x . us \in xu . S = aS \subseteq H, \qquad \text{où} \quad us = s_1 \in S,$$

donc $x \in H \cdot . s_1 = A$; U est donc unitaire à droite par rapport à A.

3° Soient $a_1 \in A$, $a_2 \in A = H \cdot . S$, et s un élément quelconque de S. Nous

(9) Cette condition s'écrit encore $SH \subseteq H$; elle est remplie dans les deux cas suivants :

1° H *est un sous-demi-groupe* de D : $SH \subseteq H^2 \subseteq H$;

2° S *est permis à droite dans* H, $SH \subseteq S \subseteq H$; en particulier, S est un *idéal à droite* de D.

avons $a_1 \equiv s(\mathcal{R}_H)$, d'où puisque, $\mathcal{R}_H$ est régulière à droite, $a_1 . a_2 \equiv s . a_2 (\mathcal{R}_H)$. Or nous avons $a_2 S \subseteq H$, d'où, en raison de l'hypothèse $S \subseteq H \cdot . H$,

$$sa_2 . S = s . a_2 S \subseteq s . H \subseteq H.$$

Il s'ensuit $sa_2 \in A$ et $a_1 a_2 \in A$; A est un sous-demi-groupe.

4° Si $a \in A$, nous avons $aS \subseteq H$, donc $aS \subseteq T = D^2 \cap H$ et, puisque nous supposons $T \subseteq S$, $aS \subseteq S$; S étant supposé unitaire à droite, il en résulte $a \in S$. donc $A \subseteq S$ et, d'après (2),

$$S = U = A.$$

Remarques. — 1. Un élément-unité à gauche, e, de D, s'il en existe, appartient à $U = S \cdot . S$ et à A.

2° Si S est contenu dans D^2, ce qui à lieu toutes les fois que S est globalement idempotent, on a $S \subseteq T$, et les hypothèses de la quatrième partie du théorème 11 ($T \subseteq S$, S unitaire à droite) entraînent $T = S = U = A$.

3° Pour un sous-demi-groupe fort ($S = H$), le théorème précédent redonne le théorème 16 de [1].

Dans un demi-groupe D qui n'est pas globalement idempotent, $D^2 \subset D$, le théorème suivant précise le rôle joué par la trace $T = D^2 \cap H$ d'un complexe H sur D; nous supposons H *non trivial*, c'est-à-dire $T \neq \emptyset$. Il est clair que $H . \cdot a = T . \cdot a$ et $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_T$ ([2], chap. I, § 2).

Théorème 12. — *Soient* H *un complexe fort* (*non trivial*), $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_T$ *l'équivalence principale à droite correspondante*, $\mathfrak{T}$ *la trace de cette équivalence sur* D^2, $\mathcal{R}'_T$ *l'équivalence principale à droite définie, dans* D^2, *par* $T (= D^2 \cap H)$. W'_T *le résidu à droite de* T *dans* D^2.

1° T *est un complexe fort, non seulement dans* D, *mais dans* D^2; *on a*

$$W_H \cap D^2 \subseteq W'_T, \qquad \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{R}'_T,$$

$\mathfrak{T}$ *et* $\mathcal{R}'_T$ *ont même trace sur* $D^2 - W'_T$;

2° *Si de plus* H *est dégagé de son résidu à droite* : $H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$, *on a les égalités*

$$W_H \cap D^2 = W'_T, \qquad \mathfrak{T} = \mathcal{R}'_T;$$

3° *Si en outre* H *est dégagé de son résidu à gauche* : $H \cap D^2 \cap {}_H W = \emptyset$, *en particulier si* H *est net* ($W_H = {}_H W = \emptyset$), *on a la correspondance biunivoque*

$$D/\mathcal{R}_H \longleftrightarrow D^2/\mathcal{R}'_T,$$

qui est un isomorphisme si $\mathcal{R}_H$ (*donc aussi* $\mathcal{R}'_T$) *est régulière des deux côtés.*

1° Soient Q_a, Q'_a les quotients à droite de T, respectivement *dans* D et *dans* D^2, par un élément a de D^2. Nous avons $Q'_a = Q_a \cap D^2$, $Q_a = \emptyset$ entraîne $Q'_a = \emptyset$ d'où $W_H \cap D^2 \subseteq W'_T$. Si Q'_a coupe Q'_b, Q_a coupe Q_b, d'où $Q_a = Q_b$, puis $Q'_a = Q'_b$: T *est donc fort dans* D^2. Si a, b sont deux éléments de D^2,

$a \equiv b\,(\mathcal{T})$ ou $(\mathcal{R}_H)$ entraîne $Q'_a = Q'_b$ donc $a \equiv b\ (\mathcal{R}'_T)$: nous avons $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}'_T$. Puisque $Q'_a \between Q'_b$ entraîne $Q_a \between Q_b$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}'_T$ ont mêmes traces sur $D^2 - W'_T$.

2° Soit $w = pq \in W'_T$. S'il existait un élément x de D vérifiant $wx = h \in H$, où, par hypothèse, h, élément de T, n'appartient pas à W_H, on pourrait trouver $y \in D$ vérifiant $hy \in H$, d'où $w.xy \in D^2 \cap H = T$, avec $xy \in D^2$, ce qui est contradictoire. Nous avons donc $w \in W_H$ d'où $W'_T \subseteq W_H \cap D^2$ et par conséquent l'égalité.

W'_T étant alors une classe mod $\mathcal{T}$ et mod $\mathcal{R}'_T$, ces deux équivalences, qui ont même trace sur $D^2 - W'_T$, coïncident : $\mathcal{T} = \mathcal{R}'_T$.

3° *Toute classe* mod $\mathcal{R}_H$ *contient un élément de* D^2, car, en premier lieu, le résidu W_H, s'il n'est pas vide, est permis à droite, donc contient des produits; si maintenant A est une classe distincte de W_H et contenant l'élément a, on a une relation de la forme $a.x = h \in T \subseteq H$, avec par hypothèse, $h \notin {}_H W$. Il existe donc un élément m de D tel que $mh = ma.x \in H$ d'où, puisque H est fort, $ma \equiv a\,(\mathcal{R}_H)$ c'est-à-dire $ma \in A$.

En associant à chaque classe $X \in D/\mathcal{R}_H$ son intersection avec D^2,

$$X \cap D^2 = X' \in D^2/\mathcal{T} = D^2/\mathcal{R}'_T$$

nous définissons entre les ensembles-quotients $D/\mathcal{R}_H$ et $D^2/\mathcal{R}'_T$ une correspondance biunivoque. Cette correspondance est un isomorphisme si $\mathcal{R}_H$ est régulière non seulement à droite, mais à gauche, car $\mathcal{T} = \mathcal{R}'_T$ est alors régulière elle aussi, et les classes X ou X′ se multiplient comme des représentants qu'on peut, d'après ce qui précède, prendre dans D^2.

Remarque. — Les différentes hypothèses faites dans le théorème précédent sont simultanément vérifiées, et par conséquent toutes les conclusions sont valables, lorsque H est un *complexe symétrique fort dégagé de son résidu* W. Des progrès importants dans l'étude des complexes symétriques forts ont été réalisés récemment par R. Croisot [3].

5. Analogies avec les groupes. — Soit S un sous-demi-groupe fort du demi-groupe D; moyennant des hypothèses convenables, la partition de D réalisée par l'équivalence principale à droite $\mathcal{R}_S$ présente d'intéressantes analogies avec la décomposition d'un groupe en classes à droite par rapport à un sous groupe ([10]).

THÉORÈME 13. — *Soit* S *un sous-demi-groupe fort de* D.

([10]) Rappelons que pour tout complexe fort H, les ensembles-quotients relatifs aux équivalences principales à droite $\mathcal{R}_H$ et à gauche ${}_H\mathcal{R}$ ont la même puissance :

$$D/\mathcal{R}_H \longleftrightarrow D/{}_H\mathcal{R},$$

ce qui résulte immédiatement de la considération des applications principales à droite f_H et à gauche ${}_Hf$ associées à H ([2], chap. I, § 1), et de la correspondance biunivoque très générale obtenue, dans l'étude des applications multiformes, à partir des propriétés des *parties stables*, par M. L. DUBREIL-JACOTIN, *Quelques propriétés des applications multiformes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 806).

1° *Pour tout quotient non vide* $S \cdot . a$ *ou* $S . \cdot a$ *et pour toute classe* X mod $\mathcal{R}_S$ *distincte du résidu* W_S ([11]), *on a*

$$(S . \cdot a) S \subseteq S . \cdot a, \qquad S(S \cdot . a) \subseteq S \cdot . a, \qquad SX \subseteq X.$$

2° *Si* D *vérifie la règle de simplification à droite et si, dans* S, *deux éléments quelconques* s, s_1 *ont un quotient à gauche,*

$$s_1 = q s, \qquad q \in S,$$

on a, pour toute classe $X \neq W_S$ *et pour tout* $x \in X$,

$$X = S X = S x,$$

X *a même puissance que* S.

1° Nous avons $a(S . \cdot a) \subseteq S$, donc $a(S . \cdot a) S \subseteq S$ et par conséquent $(S . \cdot a) S \subseteq S . \cdot a$. De même, $S(S \cdot . a) \subseteq S \cdot . a$. S étant fort, la classe $X \neq W_S$ est un quotient à gauche non vide ([1], théorème 5, p. 9) et nous avons $SX \subseteq X$.

2° Soient x, $x_1 \in X (\neq W_S)$, et $y \in S . \cdot x = S . \cdot x_1$, donc $xy = s \in S$, $x_1 y = s_1 \in S$, d'où, avec les notations de l'énoncé, $x_1 y = qxy$, donc $x_1 = qx$, où $q \in S$. Nous avons donc $x_1 \in Sx$ ce qui permet d'écrire

$$X \subseteq S x \subseteq S X (\subseteq X),$$

d'où la double égalité

$$X = S X = S x.$$

L'application $s \rightarrow sx$ de S sur $X = Sx$ est biunivoque puisque D vérifie la règle de simplification à droite.

([11]) Cette condition $X \neq W_S$ est remplie d'elle-même si $W_S = \emptyset$ (« S net à droite) ».