BULLETIN DE LA S. M. F.

V. LALAN

# Les formes minima des surfaces d'Ossian Bonnet

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 77 (1949), p. 102-127
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1949__77__102_0>

# LES FORMES MINIMA DES SURFACES D'OSSIAN BONNET ;

PAR M. V. LALAN.

Dans un précédent travail, paru dans ce *Bulletin* (¹), j'ai envisagé les surfaces dans leurs rapports avec leurs lignes minima et défini les *formes minima* comme étant les pseudo-arcs élémentaires des lignes minima de la surface (²). On trouvera ici une application de cette notion à l'étude des surfaces qui se laissent déformer avec conservation des courbures principales, surfaces que, à la suite de M. E. Cartan (³), j'appelle les *surfaces d'Ossian Bonnet*. Ces surfaces peuvent être caractérisées analytiquement par deux équations qui concernent uniquement leurs formes minima. Grâce au calcul pfaffien absolu, convenablement adapté à l'emploi du repère biisotrope, ces équations se formulent tensoriellement et permettent de retrouver un beau résultat signalé naguère par M. H. W. Alexander (⁴).

Les surfaces d'O. Bonnet rentrent dans la catégorie, très intéressante, des surfaces à courbure moyenne isotherme (⁵); c'est en exploitant cette particularité que je détermine complètement leurs formes minima, suivant la classe et le type auxquels elles appartiennent. La détermination complète de leur élément linéaire et de leur forme asymptotique revient à l'intégration d'une seule équation différentielle ordinaire du troisième ordre, dont l'inconnue est la courbure moyenne. J'indique en terminant deux moyens de ramener cette intégration à celle d'une équation du second ordre (⁶).

**1.** On sait qu'une surface est, en général, essentiellement déterminée quand on se donne son $ds^2$ et sa courbure moyenne, mais il arrive que, pour certaines sur-

(¹) *Bull. Soc. Math.*, 75, 1947, p. 63-88. Les références à ce Mémoire seront indiquées par le chiffre I, suivi d'un numéro.

(²) Les formes minima peuvent aussi recevoir une définition réelle. *Voir* L. MANENG, *Sur les parties réelle et imaginaire des formes minima d'une surface* (*C. R. Acad. Sc.*, 225, 1947, p. 1115).

(³) *Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales* (*Bull. Sc. Math.*, 66, 1942, p. 55-85).

(⁴) *The role of the mean curvature in the immersion theory of surfaces* (*Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 47, 1940, p. 237).

(⁵) On trouvera une étude de ces surfaces dans notre Mémoire cité plus haut (I, nº 8), dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 223, 1946, p. 883 et t. 226, 1948, p. 1339, et dans un travail qui sera inséré au *Journal Canadien de Mathématiques*, 1, 1949.

(⁶) Le contenu de ce Mémoire a fait l'objet de trois Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 226, 1948, p. 214, 777 et 1950.

faces, ces données soient insuffisantes, en ce sens que la détermination de leurs directions principales, au lieu de se faire par des opérations finies, exige une intégration qui introduit un paramètre arbitraire : ce sont ces surfaces exceptionnelles que nous appelons les surfaces d'Ossian Bonnet. Si S est une de ces surfaces, il est possible de déterminer une infinité de surfaces $\overline{S}$, isométriques de S, et ayant, aux points homologues, les mêmes courbures principales que S, avec des directions principales différentes. Les formes fondamentales d'une surface S quelconque peuvent s'écrire, en désignant par H sa courbure moyenne et par A son asphéricité (demi-différence des courbures principales),

$$ds^2 = \frac{2\,\omega^1\omega^2}{A}, \qquad \Phi = (\omega^1)^2 + H\,ds^2 + (\omega^2)^2.$$

$\omega^1$ et $\omega^2$ sont deux formes linéaires, imaginaires conjuguées, que nous appelons les *formes minima* de la surface (I, n^os^ 1-3). Si $\overline{S}$ est isométrique de S et admet les mêmes courbures principales que S, on voit, en égalant leurs $ds^2$ et leurs asphéricités, que

$$\overline{\omega}^1\overline{\omega}^2 = \omega^1\omega^2. \tag{1.1}$$

J'ai établi (I, n° 3) que les équations de Codazzi de S se condensent en une seule équation aux différentielles totales

$$-dH = 2A(r\omega^1 + s\omega^2), \tag{1.2}$$

où $r$ et $s$ désignent les invariants qui satisfont à

$$d\omega^1 = r[\omega^1\omega^2], \qquad d\omega^2 = s[\omega^2\omega^1].$$

En rapprochant de (1.2) l'équation analogue concernant $\overline{S}$, on obtient

$$\overline{r}\,\overline{\omega}^1 + \overline{s}\,\overline{\omega}^2 = r\omega^1 + s\omega^2. \tag{1.3}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que S soit une surface d'O. B., c'est que les équations (1.1) et (1.3) admettent une infinité de solutions en $\overline{\omega}^1$, $\overline{\omega}^2$.

Comme $\omega^1$ et $\omega^2$ sont imaginaires conjuguées, ainsi que $\overline{\omega}^1$ et $\overline{\omega}^2$, (1.1) se résout par

$$\overline{\omega}^1 = e^{i\theta}\omega^1, \qquad \overline{\omega}^2 = e^{-i\theta}\omega^2. \tag{1.4}$$

Nos calculs antérieurs [I, n° 6, formule (42)] montrent que la quantité réelle $\theta$ est l'angle que ferait, après application à la Bonnet, la première direction principale de $\overline{S}$ avec la première direction principale de S. Portant (1.4) dans (1.3), il vient

$$\overline{r} = re^{-i\theta}, \qquad \overline{s} = se^{i\theta}. \tag{1.5}$$

D'autre part, en différentiant extérieurement (1.4) et en remarquant que

$$[\overline{\omega}^1\overline{\omega}^2] = [\omega^1\omega^2],$$

on obtient

$$\overline{r} = (r - i\theta_2)e^{i\theta}, \qquad \overline{s} = (s + i\theta_1)e^{-i\theta}. \tag{1.6}$$

On élimine ensuite $\bar{r}$ et $\bar{s}$ entre (1.5) et (1.6) et l'on résout par rapport aux dérivées pfaffiennes de $\theta$, ce qui donne

$$\theta_1 = is(1 - e^{2i\theta}), \qquad \theta_2 = ir(e^{-2i\theta} - 1), \tag{1.7}$$

d'où l'équation de Pfaff

$$d\theta = is(1 - e^{2i\theta})\omega^1 + ir(e^{-2i\theta} - 1)\omega^2. \tag{1.8}$$

Pour que $\theta$ contienne dans son expression un paramètre arbitraire, il faut que la condition d'intégrabilité

$$(1 - e^{-2i\theta})(r_1 + rs) + (1 - e^{2i\theta})(s_2 + rs) = 0, \tag{1.9}$$

soit satisfaite quel que soit $\theta$, donc que

$$r_1 + rs = 0, \qquad s_2 + rs = 0. \tag{1.10}$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface S soit surface d'O. B.; on remarquera qu'elles concernent uniquement les formes minima de la surface.

**2.** Les conditions (1.10) sont satisfaites en particulier si $r = s = 0$. Les surfaces correspondantes sont, d'après (1.2), à courbure moyenne constante : nous les appellerons les surfaces d'O. B. *de première classe.* Pour elles, l'équation (1.8) se réduit à $d\theta = 0$, ce qui démontre le théorème bien connu, dû à O. Bonnet : *si l'on déforme une surface à courbure moyenne constante sans en altérer les courbures principales, les nouvelles lignes de courbure coupent les anciennes sous un angle constant.*

Les formes minima $\omega^1$, $\omega^2$ sont alors des différentielles exactes $du$, $dv$ et les formes fondamentales s'écrivent

$$ds^2 = 2\frac{du\,dv}{A}, \qquad \Phi = du^2 + H\,ds^2 + dv^2.$$

La valeur constante de H étant choisie arbitrairement, on a, pour déterminer A, l'équation de Gauss

$$A\frac{\partial^2 \log A}{\partial u\,\partial v} = H^2 - A^2.$$

A chaque solution $A(u, v)$ correspondent une infinité de surfaces ayant le même $ds^2$ et, pour forme asymptotique,

$$\bar{\Phi} = du^2\,e^{2i\theta} + H\,ds^2 + dv^2\,e^{-2i\theta},$$

où $\theta$ est une constante quelconque.

Dans ce qui suit, nous ne nous occuperons plus des surfaces à courbure moyenne constante.

**3.** Proposons-nous de formuler tensoriellement les équations (1.10). Puisque, d'après (1.2), on a

$$H_1 = -2Ar, \qquad H_2 = -2As,$$

ces équations peuvent s'écrire

$$(3.1)\qquad \left(-\frac{H_1}{2A}\right)_1+\frac{H_1H_2}{4A^2}=0,\qquad \left(-\frac{H_2}{2A}\right)_2+\frac{H_1H_2}{4A^2}=0.$$

Considérons le tenseur symétrique

$$(3.2)\qquad l_{\alpha\beta}=H_{,\alpha\beta}-\frac{H_\alpha A_\beta+A_\alpha H_\beta}{A}.$$

La virgule indique une dérivation covariante. La surface étant rapportée aux paramètres $u^1$, $u^2$, et les rotations de la dérivation covariante désignées par $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$, on a donc

$$H_{,\alpha\beta}=\frac{\partial^2 H}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}-\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial u^\mu}.$$

Cette formule reste valable lorsque, pour composantes contrevariantes du vecteur infiniment $\varphi\, dM$, on prend des formes de Pfaff $\omega^1$, $\omega^2$, au lieu de différentielles exactes, à condition de remplacer la dérivation ordinaire par la dérivation pfaffienne; on aura

$$H_{,ij}=H_{ij}-\gamma^k_{ij}H_k.$$

$H_{,ij}$ est la dérivée pfaffienne seconde covariante, tandis que $H_{ij}$ est la dérivée pfaffienne seconde ordinaire. Si $\omega^1$ et $\omega^2$ sont les formes minima, les rotations $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ se calculent en tenant compte que, par définition, $g_{\alpha\beta,\mu}=0$ avec

$$(3.3)\qquad g_{11}=0,\qquad g_{12}=\frac{1}{A},\qquad g_{22}=0$$

et que

$$\begin{aligned} d\omega^1&=\quad r[\omega^1\omega^2]=[\omega^k\omega^1_k]=(\gamma_1{}^1_2-\gamma_2{}^1_1)[\omega^1\omega^2],\\ d\omega^2&=-s[\omega^1\omega^2]=[\omega^k\omega^2_k]=(\gamma_1{}^2_2-\gamma_2{}^2_1)[\omega^1\omega^2].\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\gamma_1{}^1_2=r,\qquad \gamma_2{}^2_1=s,\qquad \gamma_1{}^1_1=-s-\frac{A_1}{A},\qquad \gamma_2{}^2_2=-r-\frac{A_2}{A};$$

toutes les autres rotations sont nulles.

Il suit de là que

$$l_{11}=H_{11}-\frac{H_1H_2}{2A}-\frac{A_1H_1}{A},\qquad l_{22}=H_{22}-\frac{H_1H_2}{2A}-\frac{A_2H_2}{A}.$$

En développant (3.1), on constate que les premiers membres de (3.1) ne sont autres que $-\frac{1}{2A}l_{11}$ et $-\frac{1}{2A}l_{22}$. Donc les équations (1.10), qui caractérisent les surfaces d'O. B., s'écrivent aussi

$$(3.4)\qquad l_{11}=0,\qquad l_{22}=0.$$

Comparant avec le tenseur métrique (3,3), on voit que les directions-nulles du tenseur $l_{\alpha\beta}$ sont les directions isotropes, ce qui équivaut au résultat signalé par M. H. W. Alexander : *sur les surfaces d'O. B., et sur ces surfaces seulement, le tenseur $l_{\alpha\beta}$ est proportionnel au tenseur métrique*,

$$(3.5)\qquad l_{\alpha\beta}=\lambda g_{\alpha\beta}.$$

A partir de cette formule, on montre qu'en principe, la courbure moyenne d'une surface d'O. B. est calculable en termes finis en fonction des composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique et de leurs dérivées. En effet, le coefficient de proportionnalité $\lambda$ est égal à

$$\frac{l_{12}}{g_{12}} = A\, l_{12}.$$

Or

$$l_{12} = H_{,12} - \frac{H_1 A_2 + A_1 H_2}{A} = \frac{\Delta_2 H}{2A} - \frac{\Delta_1(H, A)}{A^2},$$

où l'on a posé

$$\Delta_2 H = g^{\alpha\beta} H_{,\alpha\beta} = 2 g^{12} H_{,12} = 2 A H_{,12},$$
$$\Delta_1(H, A) = g^{\alpha\beta} H_\alpha A_\beta = g^{12}(H_1 A_2 + A_1 H_2) = A(H_1 A_2 + A_1 H_2).$$

On a donc

$$\lambda = \frac{\Delta_2 H}{2} - \frac{\Delta_1(H, A)}{A}. \tag{3.6}$$

On peut donner de $\lambda$ une expression où n'interviennent, à côté de quantités ne dépendant que du $ds^2$, que les dérivées premières de H. Utilisons à cette fin notre formule [I, n° 3, formule (22)]

$$\frac{K}{A} = r_1 - p_2 + pr - rs,$$

où K désigne la courbure totale, et $p = \gamma^1_{11} = -s - \frac{A_1}{A}$; elle s'écrit aussi

$$\frac{K}{A} = r_1 + s_2 - 2rs + \frac{1}{2A}\Delta_2 \log A. \tag{3.7}$$

Elle est valable sur toute surface; ici, à cause de (1.10), on a

$$r_1 + s_2 - 2rs = -4rs = -\frac{H_1 H_2}{A^2} = -\frac{\Delta_1 H}{2A^3}.$$

Quant à $\Delta_2 \log A$, il se calcule à partir de $A^2 = H^2 - K$,

$$\Delta_2 \log A = \frac{1}{A^2}\left(H\,\Delta_2 H + \Delta_1 H - \frac{\Delta_2 K}{2} - 2\,\Delta_1 A\right).$$

Portant dans (3.7), et résolvant par rapport à $\Delta_2 H$, il vient

$$\Delta_2 H = \frac{1}{H}\left(2A^2 K + \frac{\Delta_2 K}{2} + 2\,\Delta_1 A\right),$$

donc

$$\lambda = \frac{1}{H}\left(A^2 K + \frac{\Delta_2 K}{4} + \Delta_1 A\right) - \frac{\Delta_1(H, A)}{A}. \tag{3.8}$$

Au second membre ne figurent que des quantités telles que K et $\Delta_2 K$, qui se calculent à partir du $ds^2$, et, en outre, H et ses dérivées premières, A étant $\sqrt{H^2 - K}$. Les équations (3.5), où $\lambda$ est remplacé par (3.8), forment un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre en H, pour déterminer H quand le $ds^2$ est connu. Ce système donne lieu à deux conditions d'intégrabilité, d'où l'on tire les dérivées partielles de H en fonction de H et de quantités connues. Ce nouveau système de deux équations du premier ordre donne lieu à son tour à une condition d'intégrabilité, d'où l'on tire H en fonction du $ds^2$. Si l'on savait effectuer ces opérations, il suffirait, une fois H exprimé en fonction du tenseur métrique et de ses dérivées, de porter cette expression dans (3.5) pour obtenir les équations que doit vérifier tout $ds^2$ d'O. B. En fait, cette méthode semble difficile à appliquer. C'est en revenant aux équations (1.10), c'est-à-dire en projetant le tenseur $l_{\alpha\beta}$ sur le repère biisotrope, que nous obtiendrons l'élément linéaire des surfaces d'O. B., ainsi que leur forme asymptotique.

4. Montrons d'abord que *les surfaces d'O. B. sont des surfaces à courbure moyenne isotherme.* Pour qu'une surface soit à c. m. i., il faut et il suffit que $\frac{\Delta_2 H}{\Delta_1 H}$ ne dépende que de H, donc, que $\frac{\Delta_2 H}{\Delta_1 H} dH$ soit une différentielle exacte. Or, utilisant la dérivation pfaffienne covariante, on a

$$\frac{\Delta_2 H}{\Delta_1 H} dH = \frac{H_{,12}}{H_1 H_2}(H_1 \omega^1 + H_2 \omega^2) = \frac{H_{,12}}{H_2}\omega^1 + \frac{H_{,12}}{H_1}\omega^2,$$

et

$$\frac{H_{,12}}{H_2} = \frac{H_{,21}}{H_2} = \frac{H_{21} - \gamma_{2\,1}^{\,2} H_2}{H_2} = \frac{H_{21}}{H_2} - s = (\log H_2)_1 - s$$
$$= [\log(-2As)]_1 - s = \frac{A_1}{A} + \frac{s_1}{s} - s,$$
$$\frac{H_{,12}}{H_1} = \frac{H_{12} - \gamma_{1\,2}^{\,1} H_1}{H_1} = (\log H_1)_2 - r = [\log(-2Ar)]_2 - r = \frac{A_2}{A} + \frac{r_2}{r} - r.$$

Sur une surface d'O. B., on a

$$s = -\frac{r_1}{r}, \qquad r = -\frac{s_2}{s},$$

donc

$$\frac{\Delta_2 H}{\Delta_1 H} dH = \left(\frac{A_1}{A} + \frac{s_1}{s} + \frac{r_1}{r}\right)\omega^1 + \left(\frac{A_2}{A} + \frac{r_2}{r} + \frac{s_2}{s}\right)\omega^2 = d\log(Ars), \tag{4.1}$$

ce qui établit la proposition.

Sur toute surface à c. m. i., il est possible (I, n° 8) de déterminer des coordonnées minima $u$, $v$, et une fonction $\psi(u, v)$ (fonction primitive) telles que les formes minima s'écrivent

$$\omega^1 = \sqrt{\psi_u}\, du, \qquad \omega^2 = \sqrt{\psi_v}\, dv, \tag{4.2}$$

d'où

$$r = -\frac{\psi_{uv}}{2\psi_u\sqrt{\psi_v}}, \qquad s = -\frac{\psi_{uv}}{2\psi_v\sqrt{\psi_u}} \tag{4.3}$$

et

$$\frac{dH}{2A} = \frac{\psi_{uv}}{2\sqrt{\psi_u\psi_v}}(du + dv).$$

On déduit de là

$$H = f(u+v), \qquad A = \frac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}} f'(u+v). \tag{4.4}$$

Sur les surfaces d'O. B., la fonction primitive $\psi(u, v)$ satisfait à une condition particulière, qu'on obtient en portant (4.3) et (4.4) dans (4.1). Le premier membre devient $\frac{f''}{f'}d(u+v)$. Au second,

$$\mathrm{A}\,rs = \frac{f'(u+v)}{4}\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}, \qquad d\log(\mathrm{A}\,rs) = \frac{f''}{f'}(du+dv) + d\log\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}.$$

La comparaison donne

$$(4.5) \qquad \frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v} = m, \qquad \text{ou encore} \quad \frac{\Delta_2\psi}{\Delta_1\psi} = m \qquad (m, \text{ const.}).$$

Donc, *sur toute surface d'O. B., la fonction primitive* $\psi(u, v)$ *a ses deux paramètres différentiels proportionnels.*

Cette condition nécessaire est aussi suffisante, car, de (4.5), on tire

$$r = -\frac{m}{2}\sqrt{\psi_v}, \qquad s = -\frac{m}{2}\sqrt{\psi_u}, \qquad rs = \frac{m^2}{4}\sqrt{\psi_u\psi_v},$$

puis

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{\psi_u}}\frac{\partial r}{\partial u} = -\frac{m}{4\sqrt{\psi_u}}\frac{\psi_{uv}}{\sqrt{\psi_v}} = -\frac{m^2}{4}\sqrt{\psi_u\psi_v}, \qquad s_2 = -\frac{m^2}{4}\sqrt{\psi_u\psi_v},$$

d'où

$$r_1 = -rs, \qquad s_2 = -rs.$$

Le choix des coordonnées isotropes imaginaires conjuguées $u$, $v$, et celui de la fonction primitive $\psi(u, v)$ qui s'ensuit, n'est pas unique. Par définition, $u+v$ est une fonction, harmonique sur la surface, qui reste constante le long des lignes $\mathrm{H}=\mathrm{C}$. On peut remplacer $u+v$ par $\bar{u}+\bar{v} = a(u+v)+b$, d'où, à cause de la réalité,

$$d\bar{u} = a\,du, \qquad d\bar{v} = a\,dv \qquad (a, \text{ réel}).$$

La nouvelle fonction primitive, $\bar{\psi}$, devra être telle que

$$\bar{\psi}_{\bar{u}}\,d\bar{u}^2 = \psi_u\,du^2, \qquad \bar{\psi}_{\bar{v}}\,d\bar{v}^2 = \psi_v\,dv^2,$$

ce qui donne, en négligeant une constante additive sans importance

$$\bar{\psi} = \frac{1}{a}\psi.$$

Avec ce nouveau choix, il vient

$$\frac{\bar{\psi}_{\bar{u}\bar{v}}}{\bar{\psi}_{\bar{u}}\bar{\psi}_{\bar{v}}} = a\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v} = am = \bar{m}.$$

On pourra disposer de $a$ pour que $\bar{m} = 1$ ; donc *il existe un choix de coordonnées isotropes* $u$, $v$ *tel que les deux paramètres différentiels de la fonction primitive* $\psi(u, v)$ *soient égaux.*

Ces coordonnées particulières $u$, $v$ peuvent être obtenues de la façon suivante. D'après les équations (1.10), $\frac{\omega^1}{s}$ et $\frac{\omega^2}{r}$ sont des différentielles exactes. En effet,

$$d\left(\frac{\omega^1}{s}\right) = \frac{s_2+rs}{s^2}[\omega^1\omega^2], \qquad d\left(\frac{\omega^2}{r}\right) = \frac{r_1+rs}{r^2}[\omega^2\omega^1],$$

quantités nulles d'après (1.10). On peut donc poser

$$(4.6)\qquad \omega^1 = -2s\,du, \qquad \omega^2 = -2r\,dv.$$

Il existe une fonction $\psi(u, v)$ telle que

$$\sqrt{\psi_u} = -2s, \qquad \sqrt{\psi_v} = -2r,$$

car cela équivaut à

$$(4.7)\qquad d\psi = 4(s^2\,du + r^2\,dv) = -2(s\omega^1 + r\omega^2),$$

et le second membre est bien une différentielle exacte, à cause de $r_1 = s_2$, conséquence de (1.10).

Si l'on différentie extérieurement $\omega^1 = -2s\,du$, il vient

$$4r^2 s[du\,dv] = 2s_v[du\,dv],$$

d'où

$$4r^2 = \frac{2s_v}{s} = (\log s^2)_v \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \psi_v = \left(\log\frac{\psi_u}{4}\right)_v = \frac{\psi_{uv}}{\psi_u},$$

donc

$$\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v} = 1,$$

(4.6) donne donc une définition intrinsèque de $du$ et $dv$, et (4.7) une définition intrinsèque de $d\psi$.

L'équation (4.5) s'intègre par

$$(4.8)\qquad \psi = -\frac{1}{m}\log(U + V),$$

où U est une fonction de $u$, et V, une fonction de $v$. V est imaginaire conjuguée de U; U + V est réel : c'est une fonction harmonique sur la surface, d'où il suit que les courbes $\psi = C$ sont des courbes isothermes.

5. Nous venons de voir incidemment que, sur une surface d'O. B., $s\omega^1 + r\omega^2$ est une différentielle exacte. Par suite, $\omega^1$ et $\omega^2$ admettent un facteur intégrant commun, à savoir $e^{\int s\omega^1 + r\omega^2}$. Il s'ensuit que *les surfaces d'O. B. sont isothermiques*, propriété d'ailleurs bien connue. On trouve que

$$(5.1)\qquad s\omega^1 + r\omega^2 = -\frac{m}{2}\,d\psi.$$

Un facteur intégrant commun à $\omega^1$ et $\omega^2$ est donc $e^{-\frac{m}{2}\psi}$, ce qui s'écrit, d'après (4.8), $\sqrt{U+V}$. Posons $U + V = Q$; Q est une fonction harmonique sur la surface, et l'on a

$$(5.2)\qquad s\omega^1 + r\omega^2 = \frac{dQ}{2Q};$$

donc, *sur toute surface d'O. B., la forme $s\omega^1 + r\omega^2$ est la demi-différentielle logarithmique d'une fonction harmonique sur la surface.*

Cette propriété n'appartient qu'aux surfaces d'O. B., car on déduit, de (5.2),

$$Q_1 = 2Qs, \qquad Q_2 = 2Qr, \qquad Q_{12} = 2Qs_2 + 4rsQ.$$

Par suite, la virgule indiquant une dérivation covariante,

$$Q_{,12} = Q_{12} - rQ_1 = 2\,Q\,s_2 + 4\,rs\,Q - 2\,rs\,Q = 2\,Q\,(s_2 + rs).$$

Or $Q_{,12} = 0$, puisque Q, par hypothèse, est une fonction harmonique sur la surface; donc $s_2 + rs = 0$. On démontrerait pareillement que $r_1 + rs = 0$, en exprimant que $Q_{,21}$, c'est-à-dire $Q_{21} - s\,Q_2$, est nul.

6. Une surface à c. m. i. est essentiellement connue quand on connaît sa fonction primitive $\psi(u, v)$ et sa courbure moyenne $H = f(u+v)$. Ses deux formes fondamentales s'écrivent alors, en effet,

$$(6.1) \qquad ds^2 = 2\frac{\psi_{uv}}{f'}\,du\,dv, \qquad \Phi = \psi_u\,du^2 + f\,ds^2 + \psi_v\,dv^2.$$

On ne peut pas choisir arbitrairement à la fois $\psi(u, v)\varphi$, et $f(u+v)$, car ces deux fonctions sont liées par l'équation de Gauss, $K = H^2 - A^2$, qui donne ici

$$(6.2) \qquad -\frac{f'}{\psi_{uv}}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{\psi_{uv}}{f'} = f^2 - \frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}^2}f'^2.$$

Dans le cas général, on peut choisir arbitrairement $f(u+v)$, et $\psi$ se détermine en intégrant cette équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, mais quand il s'agit des surfaces d'O. B., la forme générale de $\psi$ se trouve imposée par (4.8); (6.2) sert alors à déterminer $f(u+v)$. En dérivant (4.8), on trouve

$$(6.3) \qquad \psi_{uv} = \frac{U'V'}{m\,(U+V)^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\psi_{uv} = -\,2\,\psi_{uv},$$

si bien que (6.2) devient, en posant $u + v = x$,

$$(6.4) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\log f' = \psi_{uv}\left(\frac{f^2}{f'} + 2\,m\right) - \frac{f'}{m}.$$

L'étude de cette équation conduit à distinguer deux classes parmi les surfaces d'O. B. à courbure moyenne variable. Appliquons à (6.4) l'opération $D = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}$; il vient

$$(6.5) \qquad D\psi_{uv}\left(\frac{f^2}{f'} + 2\,m\right) = 0;$$

*ou bien* $\frac{f^2}{f'} + 2\,m = 0$, d'où $f = \frac{2\,m}{x + C}$. (6.4) est alors satisfaite quel que soit $\psi_{uv}$; aucune condition n'est imposée à la fonction harmonique $U + V$. Ces surfaces sont les surfaces d'O. B. *de seconde classe*. Elles sont imaginaires, car

$$ds^2 = \frac{2\,U'V'}{m\,(U+V)^2}\,\frac{-\,2\,m}{f^2}\,du\,dv = -\frac{4}{f^2}\,\frac{dU\,dV}{(U+V)^2},$$

quantité négative. Nous ne les étudierons pas davantage; signalons seulement qu'on peut expliciter les trois coordonnées du point courant d'une telle surface en fonction de $u$ et $v$;

*ou bien* $D\psi_{uv} = 0$, $\psi_{uv}$ ne dépend que de $u + v = x$, on a les surfaces d'O. B.

*de troisième classe.* Ce sont des surfaces W, puisque A ne dépend que de $u+v$, comme H. Nous achèverons leur détermination au numéro suivant.

Auparavant, revenons sur la formule (5.2), qui est vérifiée sur toute surface d'O. B. L'équation de Codazzi (1.2) montre que, sur toute surface W, A étant fonction de H, $r\omega^1+s\omega^2$ est aussi une différentielle exacte; posons

$$r\omega^1+s\omega^2=\frac{dR}{2R}. \tag{6.6}$$

Additionnons (5.2) et (6.6), puis retranchons; nous obtenons

$$(r+s)(\omega^1+\omega^2)=\frac{dQ}{2Q}+\frac{dR}{2R},$$
$$(s-r)(\omega^1+\omega^2)=\frac{dQ}{2Q}-\frac{dR}{2R}.$$

Or, en appelant $\xi$, $\eta$ un système de variables isométriques telles que $\xi=C$, $\eta=C$ soient les lignes de courbure, ce qui est possible, puisque la surface est isothermique, $\omega^1+\omega^2$ est proportionnel à $d\xi$, et $\omega^1-\omega^2$ à $d\eta$ [I, n° 6, formules (42)]. Il s'ensuit que QR est fonction de $\xi$ et $\frac{Q}{R}$ fonction de $\eta$; donc $Q=\lambda(\xi)\mu(\eta)$. Ainsi, sur les surfaces d'O. B. de troisième classe, la fonction Q de la formule (5.2) est égale à une fonction de $\xi$ multipliée par une fonction de $\eta$. Or Q est une fonction harmonique sur la surface; comme $\xi$, $\eta$ forment un système de variables isométriques, Q est une fonction harmonique de $\xi$, $\eta$. La condition, pour cette fonction harmonique de $\xi$ et $\eta$, de se réduire à un produit $\lambda(\xi)\mu(\eta)$ permettrait de la déterminer, mais nous ne suivrons pas cette méthode.

**7.** Sur les surfaces d'O. B. de troisième classe, les fonctions $U(u)$ et $V(v)$, imaginaires conjuguées, sont telles que $\frac{U'V'}{(U+V)^2}$ ne dépende que de $u+v$; nous allons montrer que cette propriété suffit à déterminer les expressions possibles de $\frac{U'V'}{(U+V)^2}$.

Remarquons que $U'V'=|U'|^2$ et $U+V=2\,\mathcal{R}U$. Posons

$$u+v=x,\qquad u-v=iy,$$

d'où

$$u=\frac{x+iy}{2},\qquad v=\frac{x-iy}{2}. \tag{7.1}$$

On doit avoir

$$\frac{U'V'}{(U+V)^2}=X^2(x). \tag{7.2}$$

Or, pour une fonction $f(u, v)$ quelconque, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}.$$

Si $f$ ne dépend que de $x$, on aura donc

$$\frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}.$$

Prenons en particulier $f = \log \dfrac{U'V'}{(U+V)^2} = \log X^2$; il viendra

$$\frac{d^2 \log X^2}{dx^2} = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{U'V'}{(U+V)^2} = -2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log (U+V) = \frac{2\, U'V'}{(U+V)^2} = 2\, X^2.$$

Donc la fonction $X(x)$ qui figure dans (7.2) doit vérifier

$$\frac{d^2 \log X}{dx^2} = X^2. \tag{7.3}$$

Multiplions les deux membres par $\dfrac{d}{dx} \log X$, et intégrons; il vient

$$\left(\frac{d}{dx} \log X\right)^2 = X^2 - C,$$

ou

$$\left(\frac{1}{X}\right)'^2 = 1 - \frac{C}{X^2}.$$

Les solutions ont des formes différentes suivant le signe de C. Selon que $C = k^2$, $C = -k^2$, ou $C = O$, on obtient, en négligeant une constante additive à $x$

$$X^2 = \frac{k^2}{\sin^2 kx} \qquad (\text{type } \mathbf{A}); \tag{7.4}$$

$$X^2 = \frac{k^2}{\text{sh}^2 kx} \qquad (\text{type } \mathbf{B}); \tag{7.5}$$

$$X^2 = \frac{1}{x^2} \qquad (\text{type } \mathbf{C}). \tag{7.6}$$

Nous sommes donc dès maintenant en mesure d'expliciter complètement l'équation de Gauss (6.4) sous trois formes différentes, en y remplaçant $\psi_{uv}$ soit par $\dfrac{k^2}{\sin^2 kx}$, soit par $\dfrac{k^2}{\text{sh}^2 kx}$, soit par $\dfrac{1}{x^2}$ (on fait partout $m = 1$, comme il est loisible, d'après le n° 4). Appelant $f(x)$ une intégrale de (6.4), nous pourrons écrire le $ds^2$ de la surface d'O. B. sous l'une des formes suivantes

$$ds^2 = \frac{2\, k^2\, du\, dv}{f'(x) \sin^2 kx} \quad (\text{type } \mathbf{A}); \qquad ds^2 = \frac{2\, k^2\, du\, dv}{f'(x)\, \text{sh}^2 kx} \quad (\text{type } \mathbf{B});$$

$$ds^2 = \frac{2\, du\, dv}{x^2 f'(x)} \quad (\text{type } \mathbf{C}).$$

Notons que le problème qui vient d'être traité est identique en substance à celui qui consiste à déterminer un $ds^2$ de révolution ayant la courbure $-1$. Posons, en effet,

$$U = Q - iP, \qquad u = \frac{x + iy}{2} = \frac{z}{2};$$

il vient

$$\left|\frac{dU}{du}\right|^2 = 4 \frac{dP^2 + dQ^2}{dx^2 + dy^2}, \qquad U + V = 2Q,$$

d'où

$$\frac{U'V'}{(U+V)^2} = \frac{1}{4\, Q^2} \left|\frac{dU}{du}\right|^2 = \frac{dP^2 + dQ^2}{Q^2 (dx^2 + dy^2)}.$$

Nous avons donc déterminé $X(x)$ telle qu'on ait

$$\frac{dP^2+dQ^2}{P^2} = X^2(x)(dx^2+dy^2).$$

Le premier membre est un $ds^2$ pseudosphérique de courbure $-1$; le second est un $ds^2$ de révolution; nous avons donc obtenu, dans les formules (7.4), (7.5), (7.6), les formes que l'on peut donner à $X(x)$ pour que le $ds^2$ de révolution soit un $ds^2$ pseudosphérique de courbure $-1$.

8. La forme asymptotique s'écrit, d'après (6.1),

$$\Phi = -\frac{U'}{U+V}du^2 + f ds^2 - \frac{V'}{U+V}dv^2. \tag{8.1}$$

Il ne suffit plus de connaître $\frac{U'V'}{(U+V)^2}$; il faut connaître séparément chacun des facteurs de ce produit, $\frac{U'}{U+V}$ et $\frac{V'}{U+V}$. Nous déterminerons U et V en exprimant que les dérivées logarithmiques de $\frac{U'V'}{(U+V)^2}$ par rapport à $u$ et par par rapport à $v$ sont égales, ce qui donne

$$\frac{U''}{U} - \frac{2U'}{U+V} = \frac{V''}{V} - \frac{2V'}{U+V}. \tag{8.2}$$

Abaissons l'ordre en posant

$$U' = \lambda(U), \qquad V' = \mu(V);$$

il vient

$$(\lambda' - \mu')(U+V) = 2(\lambda - \mu). \tag{8.3}$$

Des dérivations par rapport à U, puis par rapport à V, conduisent à

$$\lambda''(U+V) = \mu''(U+V) = \lambda' + \mu'. \tag{8.4}$$

On en déduit

$$\lambda'' = \mu'' = 2a \qquad (a, \text{ const. réelle}),$$

puis

$$\lambda' = 2aU + b_1, \qquad \mu' = 2aV + b_2.$$

Portant dans (8.4), il vient $b_1 + b_2 = 0$, donc

$$b_1 = 2ib, \qquad b_2 = -2ib \qquad (b, \text{ const. réelle}).$$

Ensuite (8.3) donne

$$\lambda = aU^2 + 2ibU + c, \qquad \mu = aV^2 - 2ibV + c \qquad (c, \text{ const. réelle}).$$

Il suffit d'étudier la fonction $U(u)$, puisque V en est l'imaginaire conjuguée; elle doit vérifier

$$\frac{dU}{du} = aU^2 + 2ibU + c. \tag{8.5}$$

On distingue trois cas, suivant que $b^2 + ac$ est positif, négatif, ou nul; ces trois cas, nous le constaterons, correspondent aux types **A**, **B**, **C** déjà introduits.

On remarque, sur (8.5), que, si $b^2+ac>0$, les lignes $u+v=C$, c'est-à-dire les lignes $H=C$, sont représentées dans le plan complexe (U) par un faisceau de cercles ayant pour points de base deux points de l'axe imaginaire, cela, en supposant $a\neq 0$; si $a=0$, on obtient un faisceau de droites rayonnant d'un point de l'axe imaginaire;

Si $b^2+ac<0$, les lignes $H=C$ sont représentées dans le plan (U) par un faisceau de cercles ayant pour points de Poncelet deux points symétriques par rapport à l'axe imaginaire;

Si $b^2+ac=0$, avec $a\neq 0$, les lignes $H=C$ sont représentées, dans le même plan, par un faisceau de cercles tangents à l'axe imaginaire; si $a=0$, et $b$ aussi par conséquent, ces lignes sont représentées par des parallèles à l'axe imaginaire.

Le plan (U), où nous venons de faire la carte des lignes $H=C$, est celui où les lignes $\psi=C$, c'est-à-dire $U+V=C$, sont représentées par des parallèles à l'axe imaginaire.

9. (Type **A**.) $b^2+ac>0$. — Supposons d'abord $a\neq 0$. Du fait que, seule, la somme $U+V$ figure dans la fonction primitive $\psi=-\log(U+V)$, on peut ajouter à U une constante imaginaire pure, pourvu qu'on retranche de V la même quantité. On peut aussi multiplier U et V par une même constante réelle, car $\psi$ se trouve ainsi simplement augmenté d'une constante, et, seules, ses dérivées figurent dans les formes fondamentales. Grâce à ces changements, (8.5) est réductible à

$$\frac{dU}{du}=k(U^2+1). \tag{9.1}$$

On ne peut simplifier davantage, car si l'on changeait $ku$ en $u$, la constante $m$ ne conserverait plus la valeur 1 que nous lui avons attribuée. Intégrant, il vient

$$U=\operatorname{tg}k(u+\alpha+i\beta) \qquad \text{d'où} \quad V=\operatorname{tg}k(v+\alpha-i\beta).$$

Cela donne

$$\frac{U'}{U+V}=\frac{\cos k(v+\alpha-i\beta)}{\cos k(u+\alpha+i\beta)}\,\frac{k}{\sin k(u+v+2\alpha)},$$
$$\frac{V'}{U+V}=\frac{\cos k(u+\alpha+i\beta)}{\cos k(v+\alpha-i\beta)}\,\frac{k}{\sin k(u+v+2\alpha)},$$

d'où

$$\frac{U'V'}{(U+V)^2}=\frac{k^2}{\sin^2 k(u+v+2\alpha)}.$$

Pour rejoindre (7.4), on doit faire soit $\alpha=0$, soit $\alpha=\frac{\pi}{2k}$. $\alpha=0$ donne

$$U=\operatorname{tg}k(u+i\beta), \qquad V=\operatorname{tg}k(v-i\beta) \tag{9.2}$$

et, par suite,

$$ds^2=\frac{2k^2\,du\,dv}{f'(x)\sin^2 kx}, \qquad \Phi_1=-\frac{\cos k(v-i\beta)}{\cos k(u+i\beta)}\,\frac{k\,du^2}{\sin kx}+f\,ds^2-\frac{\cos k(u+i\beta)}{\cos k(v-i\beta)}\,\frac{k\,dv^2}{\sin kx}. \tag{9.3}$$

$\alpha=\frac{\pi}{2k}$ donne, en changeant le signe de U, qui n'a pas d'importance,

$$U=\cot k(u+i\beta), \qquad V=\cot k(v-i\beta), \tag{9.4}$$

d'où

$$(9.5)\qquad ds^2 = \frac{2k^2\,du\,dv}{f'(x)\sin^2 kx}, \qquad \Phi_2 = \frac{\sin k(v-i\beta)}{\sin k(u+i\beta)}\,\frac{k\,du^2}{\sin kx} + f\,ds^2 + \frac{\sin k(u+i\beta)}{\sin k(v-i\beta)}\,\frac{k\,dv^2}{\sin kx}.$$

Supposons maintenant $a = 0$; (8.5) est réductible à

$$(9.6)\qquad \frac{dU}{du} = 2ikU,$$

d'où

$$U = e^{2ik(u+\alpha+i\beta)}, \qquad V = e^{-2ik(v+\alpha-i\beta)},$$

et

$$\frac{U'V'}{(U+V)^2} = \frac{k^2}{\cos^2 k(u+v+2\alpha)}.$$

On rejoint (7.4) en prenant $\alpha = \pm \frac{\pi}{4k}$, les deux signes donnant le même résultat :

$$(9.7)\qquad \frac{U'}{U+V} = \frac{k e^{ik(u+v)}}{\sin k(u+v)}, \qquad \frac{V'}{U+V} = \frac{k e^{-ik(u+v)}}{\sin k(u+v)}, \qquad \frac{U'V'}{(U+V)^2} = \frac{k^2}{\sin^2 k(u+v)}$$

et, en conséquence,

$$(9.8)\qquad ds^2 = \frac{2k^2\,du\,dv}{f'(x)\sin^2 kx}, \qquad \Phi_3 = -\frac{k e^{ikx}}{\sin kx}\,du^2 + f\,ds^2 - \frac{k e^{-ikx}}{\sin kx}\,dv^2.$$

On remarque que, dans ce cas singulier où $a = 0$, $\beta$ ne figure dans aucune des deux formes fondamentales, ce qui nous autorise à faire $\beta = 0$ dans l'expression de $U\,(U = -ie^{2iku})$. Les deux formes fondamentales ne dépendent que de $x = u + v$; par conséquent la surface correspondante admet un groupe de mouvements à un paramètre et, comme les lignes $H = C$, c'est-à-dire $x = C$, ne sont pas lignes de courbure, c'est un *hélicoïde*. En réalité, nous avons à envisager deux hélicoïdes, suivant le signe de $k$ dans (9.6). Si l'on change $k$ en $-k$, le $ds^2$ n'est pas altéré, mais la forme asymptotique devient

$$\Phi_4 = -\frac{k e^{-ikx}}{\sin kx}\,du^2 + f\,ds^2 - \frac{k e^{ikx}}{\sin kx}\,dv^2,$$

$\Phi_3$ ne diffère de $\Phi_4$ que par une permutation effectuée sur $u$ et $v$. Une telle transformation étant de jacobien négatif, on voit que le second hélicoïde n'est pas superposable au premier, mais à un symétrique du premier par rapport à un plan.

En résumé, pour le type **A**, les surfaces d'O. B. ont pour $ds^2$

$$(9.9)\qquad ds^2 = \frac{2k^2\,du\,dv}{f'(x)\sin^2 kx} \qquad (x = u+v)$$

où $f(x)$ est une intégrale de

$$(9.10)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\log f' = \frac{k^2}{\sin^2 kx}\left(\frac{f^2}{f'} + 2\right) - f',$$

et, pour forme asymptotique, l'une des formes $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ ou $\Phi_4$. Il semblerait, d'après cela, que le $ds^2$ donné en (9.9) fût susceptible d'une infinité d'immersions correspondant à la même courbure moyenne $f(x)$, en raison du paramètre $\beta$ qui figure dans $\Phi_1$ et $\Phi_2$. Il n'en est rien. On peut voir, en effet, que, quelle que soit la valeur que l'on donne à $\beta$ dans $\Phi_1$, par exemple, c'est toujours la même surface $S_1$ que l'on obtient. Posons, en effet, $\bar{u} = u + i\beta$, $\bar{v} = v - i\beta$, ce qui ne change pas $x$. Le $ds^2$ reste invariant; $\Phi_1$ devient

$$\bar{\Phi}_1 = -\frac{\cos k\bar{v}}{\cos k\bar{u}}\,\frac{k\,d\bar{u}^2}{\sin kx} + f\,ds^2 - \frac{\cos k\bar{u}}{\cos k\bar{v}}\,\frac{k\,d\bar{v}^2}{\sin kx}.$$

Par ce simple changement de paramètres, de jacobien positif, nous avons fait disparaître $\beta$ des formes fondamentales de $S_1$, ce qui démontre que nous n'avons affaire, essentiellement, qu'à une seule surface. Soit $S_0$ la surface ayant comme forme asymptotique $\Phi_1$ où l'on fait $\beta = 0$. Cette surface est susceptible d'une infinité continue de déformations avec conservation des courbures principales. Si l'on met $S_0$ et $S_1$ en correspondance, les points homologues étant ceux qui ont les mêmes paramètres $u$, $v$, on réalise une application à la Bonnet; si, en revanche, on met en correspondance les points $u$, $v$ de $S_0$ et $u + i\beta$, $v - i\beta$ de $S_1$, on réalise une superposition de $S_0$ sur $S_1$. $S_0$ a donc la propriété remarquable de rester superposable à elle-même après toute déformation qui conserve ses courbures principales.

Des considérations analogues s'appliquent à $\Phi_2$. Donc le $ds^2$ (9.9) du type **A** étant donné, et $f(x)$ étant la courbure moyenne, il n'y a que quatre surfaces essentiellement distinctes dont deux hélicoïdes symétriques, qui admettent ce $ds^2$ et cette courbure moyenne. Ces quatre surfaces constituent ce que M. E. Cartan appelle une *famille* d'Ossian Bonnet.

10. (Type **B**) $b^2 + ac < 0$. — On réduit (8.5) à

$$\frac{dU}{du} = k(1 - U^2),$$

d'où

$$U = \operatorname{th} k(u + \alpha + i\beta), \qquad V = \operatorname{th} k(v + \alpha - i\beta), \qquad \frac{U'V'}{(U+V)^2} = \frac{k^2}{\operatorname{sh}^2 k(u + v + 2\alpha)}.$$

Il n'y a ici qu'une façon d'obtenir (7.5), c'est de faire $\alpha = 0$, d'où

$$(10.1) \qquad ds^2 = \frac{2k^2\,du\,dv}{f'(x)\operatorname{sh}^2 kx}, \qquad \Phi = -\frac{\operatorname{ch} k(v - i\beta)}{\operatorname{ch} k(u + i\beta)}\,\frac{k\,du^2}{\operatorname{sh} kx} + f\,ds^2 - \frac{\operatorname{ch} k(u + i\beta)}{\operatorname{ch} k(v - i\beta)}\,\frac{k\,dv^2}{\operatorname{sh} kx},$$

où $f(x)$ est une solution de

$$(10.2) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\log f' = \frac{k^2}{\operatorname{sh}^2 kx}\left(\frac{f^2}{f'} + 2\right) - f'.$$

Pour ce type, on n'obtient essentiellement qu'une seule surface, quelle que soit la valeur que l'on donne à $\beta$.

11. (Type **C**) $b^2 + ac = 0$. — Supposons d'abord $a \neq 0$. (8.5) est réductible à

$$\frac{dU}{du} = -U^2,$$

d'où

$$U = \frac{1}{u+\alpha+i\beta}, \qquad V = \frac{1}{v+\alpha-i\beta}, \qquad \frac{U'V'}{(U+V)^2} = \frac{1}{(u+v+2\alpha)^2}.$$

On obtient la forme (7.6) en posant $\alpha = 0$, d'où

(11.1) $$ds^2 = \frac{2\,du\,dv}{x^2 f'(x)}, \qquad \Phi = \frac{v-i\beta}{u+i\beta}\frac{du^2}{x} + f\,ds^2 + \frac{u+i\beta}{v-i\beta}\frac{dv^2}{x}.$$

où $f(x)$ est une solution de

(11.2) $$\frac{d^2}{dx^2}\log f' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{f^2}{f'}+2\right) - f'.$$

Dans le cas singulier où $a = 0$, on se ramène à

$$dU = du,$$

d'où

$$U = u+\alpha+i\beta, \qquad V = v+\alpha-i\beta, \qquad \frac{U'V'}{(U+V)^2} = \frac{1}{(u+v+2\alpha)^2}.$$

L'identification avec (7.6) exige $\alpha = 0$, d'où

(11.3) $$ds^2 = \frac{2\,du\,dv}{x^2 f'(x)}, \qquad \Phi = -\frac{du^2}{x} + f\,ds^2 - \frac{dv^2}{x},$$

où $f(x)$ est une solution de (11.2). Les deux formes ne dépendant que d'un seul paramètre $x = u + v$, la surface admet un groupe de mouvements à un paramètre; c'est une surface de révolution, car les lignes d'égale courbure moyenne, $x = C$, sont aussi lignes de courbure.

En conclusion, dans le type C, pour un $ds^2$ donné et une courbure moyenne donnée, il y a deux immersions possibles : l'une donne une surface de révolution, l'autre une surface qui peut être déformée à la Bonnet, et qui reste égale à elle-même au cours d'une telle déformation.

12. Nous avons vu au n° 1 que, si deux surfaces S et $\bar{S}$ ont même $ds^2$ et même courbure moyenne, il existe, entre leurs formes minima respectives, les relations

$$\bar{\omega}^1 = \omega^1 e^{i\theta}, \qquad \bar{\omega}^2 = \omega^2 e^{-i\theta},$$

et que, sur les surfaces d'O. B., $\theta$ vérifie l'équation complètement intégrable

$$d\theta = is(1-e^{2i\theta})\,\omega^1 + ir(e^{-2i\theta}-1)\,\omega^2.$$

En tenant compte de

$$r = -\frac{\psi_{uv}}{2\psi_u\sqrt{\psi_v}}, \qquad s = -\frac{\psi_{uv}}{2\psi_v\sqrt{\psi_u}}, \qquad \psi_{uv} = \psi_u\psi_v,$$

cette équation s'écrit

$$d\theta = -\sin\theta\,(e^{i\theta}\psi_u\,du + e^{-i\theta}\psi_v\,dv),$$

ou, puisque

$$\psi_u = -\frac{U'}{U+V}, \qquad \psi_v = -\frac{V'}{U+V},$$

$$d\theta = \frac{\sin\theta}{U+V}(e^{i\theta}dU + e^{-i\theta}dV).$$

Mais on a posé $U = Q - iP$, $V = Q + iP$; il vient donc finalement

$$d\theta = \sin\theta\left(\frac{dQ}{Q}\cos\theta + \frac{dP}{Q}\sin\theta\right). \tag{12.1}$$

La solution générale est, comme on le voit en divisant par $\frac{\sin^2\theta}{Q}$,

$$\theta = -\operatorname{arctg}\frac{CQ}{CP-1}. \tag{12.2}$$

$\theta$ est l'angle que fait la première direction principale de $\overline{S}$ avec la première direction principale de S, quand on applique $\overline{S}$ sur S avec conservation des courbures principales, en mettant en correspondance les points qui ont les mêmes valeurs de $u$, $v$. On voit que $\theta$ est l'agument de

$$CP - 1 - iCQ = -iC(Q + iP) - 1 = -iCV - 1.$$

La solution (12.2) s'écrit aussi

$$e^{2i\theta} = \frac{1 + iCV}{1 - iCU},$$

ce qui montre que $\theta$ est la somme d'une fonction de $u$ et d'une fonction de $v$, c'est-à-dire, une fonction harmonique sur la surface; c'était à prévoir, puisque $\theta$ est l'angle de deux réseaux isothermes.

Cherchons la relation qui existe entre la constante d'intégration C et les paramètres $\beta$, $\overline{\beta}$ dont dépendent S et $\overline{S}$.

Plaçons-nous d'abord dans le type **A**, et supposons que S et $\overline{S}$ correspondent respectivement à

$$U = \operatorname{tg}k(u + i\beta), \qquad \overline{U} = \operatorname{tg}k(u + i\overline{\beta}).$$

$\overline{U}$ est une fonction homographique de U

$$\overline{U} = \frac{U + i\operatorname{th}k(\overline{\beta} - \beta)}{1 - iU\operatorname{th}k(\overline{\beta} - \beta)}.$$

La nature de cette transformation apparaîtra plus clairement si, tenant compte que $u = \frac{x + iy}{2} = \frac{z}{2}$, on pose

$$U = -iw(z), \quad \overline{U} = -i\overline{w}(z) \qquad \text{avec } w = P + iQ, \quad \overline{w} = \overline{P} + i\overline{Q};$$

on obtient alors

$$\overline{w} = \frac{w\operatorname{ch}k(\overline{\beta} - \beta) - \operatorname{sh}k(\overline{\beta} - \beta)}{-w\operatorname{sh}k(\overline{\beta} - \beta) + \operatorname{ch}k(\overline{\beta} - \beta)}. \tag{12.3}$$

C'est un groupe de transformations à un paramètre, $\overline{\beta} - \beta$, sous-groupe du groupe fuchsien. On pouvait prévoir que le passage de $w$ à $\overline{w}$ se ferait par une transformation fuchsienne, car ce passage conserve $\frac{U'V'}{(U+V)^2}$, c'est-à-dire

$\frac{1}{Q^2}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2$, et, seules, les transformations fuchsiennes laissent invariant $\frac{|dw|^2}{Q^2}$. Sous forme canonique, (12.3) s'écrit

$$\frac{\overline{w}-1}{\overline{w}+1}=e^{2k(\overline{\beta}-\beta)}\frac{w-1}{w+1},$$

ce qui montre que $\overline{w}$ est sur le cercle passant par $-1$, $+1$, et $w$.

On déduit de (12.3)

$$\overline{Q}=\frac{Q}{|-w\,\mathrm{sh}\,k(\overline{\beta}-\beta)+\mathrm{ch}\,k(\overline{\beta}-\beta)|^2},\qquad d\overline{w}=\frac{dw}{[-w\,\mathrm{sh}\,k(\overline{\beta}-\beta)+\mathrm{ch}\,k(\overline{\beta}-\beta)]^2}.$$

Appelons $\alpha$ l'argument de $-w\,\mathrm{sh}\,k(\overline{\beta}-\beta)+\mathrm{ch}\,k(\overline{\beta}-\beta)$, nous aurons

$$\frac{d\overline{w}}{\overline{Q}}=e^{-2i\alpha}\frac{dw}{Q}. \tag{12.4}$$

Or

$$\frac{1}{Q}\frac{dw}{dz}=\frac{iU'}{U+V}=-i\psi_u=-i\frac{(\omega^1)^2}{du^2}.$$

La relation (12.4) donne donc

$$\overline{\omega}^1=e^{-i\alpha}\omega^1\quad\text{et, par suite,}\quad\overline{\omega}^2=e^{i\alpha}\omega^2.$$

Donc l'angle $\theta$, correspondant au passage de S à $\overline{S}$, est

$$\theta=-\alpha=-\mathrm{arctg}\frac{Q\,\mathrm{sh}\,k(\overline{\beta}-\beta)}{P\,\mathrm{sh}\,k(\overline{\beta}-\beta)-\mathrm{ch}\,k(\overline{\beta}-\beta)}. \tag{12.5}$$

Comparons avec (12.2); nous voyons que, dans ce cas,

$$C=\mathrm{th}\,k(\overline{\beta}-\beta).$$

C ne varie qu'entre $-1$ et $1$, pour un tel couple de surfaces; $\theta$ varie seulement entre $-\mathrm{arctg}\frac{Q}{P+1}$ et $-\mathrm{arctg}\frac{Q}{P-1}$, en passant par zéro. Les deux surfaces de ce couple sont égales entre elles, comme nous l'avons vu au n° 9, mais $\overline{S}$ peut aussi être considérée comme provenant de S par une déformation continue à la Bonnet.

Supposons maintenant que, S correspondant toujours à $U=\mathrm{tg}\,k(u+i\beta)$, $\overline{S}$ corresponde à $\overline{U}=\cot k(u+i\overline{\beta})$. $\overline{S}$, dans ce cas, n'est pas égale à S. On aura alors

$$\overline{w}=\frac{w\,\mathrm{sh}\,k(\overline{\beta}-\beta)-\mathrm{ch}\,k(\overline{\beta}-\beta)}{w\,\mathrm{ch}\,k(\overline{\beta}-\beta)-\mathrm{sh}\,k(\overline{\beta}-\beta)};$$

$\alpha$ sera l'argument de $w\,\mathrm{ch}\,k(\overline{\beta}-\beta)-\mathrm{sh}\,k(\overline{\beta}-\beta)$, ce qui donne

$$\theta=-\alpha=-\mathrm{arctg}\frac{Q\,\mathrm{ch}\,k(\overline{\beta}-\beta)}{P\,\mathrm{ch}\,k(\overline{\beta}-\beta)-\mathrm{sh}\,k(\overline{\beta}-\beta)}.$$

Comparant avec (12.2), nous voyons que

$$C=\mathrm{cth}\,k(\overline{\beta}-\beta);$$

C est toujours supérieur à 1 en valeur absolue; $\overline{S}$ ne provient pas par déformation continue de S.

Enfin, U étant toujours $\operatorname{tg} k(u+i\beta)$, prenons $\overline{U} = -ie^{2ik(u+i\beta)}$ (ce qui, nous l'avons vu au n° 9, donne le même résultat que $-ie^{2iku}$). Nous aurons

$$\overline{w} = \frac{1+w}{1-w},$$

d'où

$$\overline{Q} = \frac{2Q}{|1-P-iQ|^2}, \qquad d\overline{w} = \frac{2\,dw}{(1-P-iQ)^2}.$$

Appelons $\alpha$ l'argument de $1-P-iQ$; nous obtenons

$$\frac{d\overline{w}}{\overline{Q}} = e^{-2i\alpha}\frac{dw}{Q}$$

et

$$\theta = -\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{Q}{P-1}.$$

La comparaison avec (12.2) montre qu'ici $C = 1$.

Si l'on avait pris $\overline{U} = ie^{-2ik(u+i\beta)}$, on aurait eu

$$\overline{w} = \frac{w-1}{w+1},$$

d'où

$$\theta = -\alpha = -\arg(w+1) = -\operatorname{arctg}\frac{Q}{P+1},$$

ce qui correspond à $C = -1$ dans (12.2). Un hélicoïde de Bonnet ne peut donc s'obtenir par déformation continue d'une surface de la même famille.

13. Dans le type **B**, soient S et $\overline{S}$ correspondant à

$$U = \operatorname{th}(u+i\beta) \qquad \text{et} \qquad \overline{U} = \operatorname{th}(u+i\overline{\beta}).$$

Posant toujours $w = iU$, $\overline{w} = i\overline{U}$, il vient en éliminant $u$,

$$\overline{w} = \frac{w\cos(\overline{\beta}-\beta) - \sin(\overline{\beta}-\beta)}{w\sin(\overline{\beta}-\beta) + \cos(\overline{\beta}-\beta)}.$$

Il s'ensuit que

$$\theta = -\arg[w\sin(\overline{\beta}-\beta) + \cos(\overline{\beta}-\beta)] = -\operatorname{arctg}\frac{Q\sin(\overline{\beta}-\beta)}{P\sin(\overline{\beta}-\beta)+\cos(\overline{\beta}-\beta)};$$

c'est la formule (12.2) avec

$$C = -\operatorname{tg}(\overline{\beta}-\beta).$$

Cette fois, C parcourt toutes les valeurs quand $\overline{\beta}$ varie de $\beta - \frac{\pi}{2}$ à $\beta + \frac{\pi}{2}$.

14. Dans le type **C**, soit

$$U = \frac{1}{u+i\beta}, \qquad \overline{U} = \frac{1}{u+i\overline{\beta}},$$

L'élimination de $u$ donne

$$\bar{w} = \frac{w}{1 + w(\bar{\beta} - \beta)},$$

d'où

$$\theta = -\arg[1 + w(\bar{\beta} - \beta)] = -\operatorname{arctg}\frac{(\bar{\beta} - \beta)Q}{(\bar{\beta} - \beta)P + 1}.$$

L'identification avec (12.2) donne

$$C = -(\bar{\beta} - \beta).$$

Si l'on prend

$$U = \frac{1}{u + i\beta} \qquad \text{et} \qquad \bar{U} = u + i\beta,$$

il vient

$$\bar{w} = -\frac{1}{w},$$

d'où

$$\theta = -\arg w = -\operatorname{arctg}\frac{Q}{P},$$

ce qui correspond à $C = \infty$. La surface de révolution de Bonnet ne peut donc s'obtenir par une déformation continue de l'autre surface de la même famille.

15. On doit à M. É. Cartan un théorème remarquable concernant les lignes de courbure des surfaces d'O. B. *Il est possible de faire la représentation conforme d'une telle surface de façon que, sur le plan de la carte, ses lignes de courbure, ainsi que ses lignes de courbure virtuelles, soient représentées par des cercles (ou des droites).*

Nous appelons évidemment *lignes de courbure virtuelles* d'une surface d'O. B. les différents réseaux orthogonaux sur lesquels viennent s'appliquer les lignes de courbure des surfaces isométriques, quand on réalise une application à la Bonnet.

Pour le démontrer simplement, nous établissons d'abord la propriété suivante : *sur toute surface d'O. B., les lignes de courbure bissectent les lignes* $H = C$ *et les lignes* $\psi = C$.

En effet, les lignes $H = C$, d'après l'équation de Codazzi (1.2) ont pour équation

$$r\omega^1 + s\omega^2 = 0.$$

Les lignes $\psi = C$, d'après (5.1), ont pour équation

$$s\omega^1 + r\omega^2 = 0.$$

Comme les lignes de courbure, de leur côté, sont définies par

$$\omega^1 + \omega^2 = 0, \qquad \omega^1 - \omega^2 = 0,$$

on voit que la proposition est exacte.

Il suit de là qu'on peut attacher au réseau isotherme des lignes de courbure une variable complexe sur la surface, Z, liée aux variables complexes U et $u$, qui sont respectivement attachées aux réseaux définis l'un par les lignes $\psi = C$ et leurs trajectoires orthogonales, l'autre par les lignes $H = C$ et leurs trajectoires orthogonales, par la relation

(15.1) $$dZ^2 = m\, dU\, du \qquad (m, \text{ const. réelle}).$$

Si l'on faisait la carte de la surface sur le plan $(Z)$ les lignes de courbure seraient représentées par les parallèles aux axes. Calculons $Z$ pour les différents types.

*Type* **A**. — $\alpha$. Si $U = \operatorname{tg} k(u + i\beta)$, on trouve, par (15.1), où $m = k$,

$$Z = \log \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{k}{2}(u + i\beta)\right].$$

$\beta$. Si $U' = \cot k(u + i\beta)$, on trouve, en faisant $m = -k$

$$Z' = \log \operatorname{tg} \frac{k}{2}(u + i\beta).$$

$\gamma$. Si $U'' = -i\, e^{2iku}$, en posant $m = -\frac{k}{2}$, on aura

$$Z'' = e^{iku}.$$

$\delta$. Si $U''' = -i e^{-2iku}$, en posant $m = \frac{k}{2}$, on aura

$$Z''' = e^{-iku}.$$

Pour les cas $\alpha$ et $\beta$, nous poserons encore

$$\zeta = e^{Z}; \qquad \zeta' = e^{Z'}.$$

Les lignes de courbure de la surface S, dans le plan $(\zeta)$, seront représentées par les demi-droites rayonnant de l'origine et les cercles centrés à l'origine. Or les quatre variables complexes $\zeta$, $\zeta'$, $Z''$ et $Z'''$ sont fonctions homographiques les unes des autres. Tout faisceau de cercles (ou de droites) tracé dans un des plans correspondants est représenté aussi par un faisceau de cercles (ou de droites) dans chacun des trois autres. Adoptons comme plan de la carte le plan de la variable $(Z'')$, où les lignes de courbure de l'hélicoïde $S''$ sont représentées par les parallèles aux axes. Dans ce plan, les lignes de courbure de S seront représentées par deux faisceaux de cercles orthogonaux, admettant comme points de base, ou comme points de Poncelet, les points de $(Z'')$ qui correspondent à $\zeta = 0$ et $\zeta = \infty$, c'est-à-dire, $Z'' = i e^{k\beta}$, et $Z'' = -i e^{k\beta}$, deux points situés sur l'axe imaginaire, symétriques par rapport à l'origine. Pour $S'$, résultat analogue, mais les points de base deviennent $e^{k\beta}$ et $-e^{k\beta}$, symétriques par rapport à l'origine sur l'axe réel. Enfin, pour $S'''$, comme $Z''' = \frac{1}{Z''}$, les lignes de courbure sont représentées par les cercles tangents en O, soit à l'axe réel, soit à l'axe imaginaire.

*Type* **B**. — Dans ce cas, $U = \operatorname{th}(u + i\beta)$, et l'on obtient

$$Z = \frac{1}{i} \log \frac{i - e^{u+i\beta}}{i + e^{u+i\beta}}.$$

Nous prendrons, comme plan de la carte, le plan de

$$t = e^u.$$

$t$ est une fonction homographique de $e^{iZ} = \zeta$, qui, pour $\zeta = 0$ et $\zeta = \infty$, prend les valeurs

$$t_0 = e^{-i\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}, \qquad t_\infty = e^{-i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Dans le plan $(\zeta)$, les lignes de courbure ont pour image les droites rayonnant de l'origine et les cercles orthogonaux; dans le plan $(t)$, elles seront représentées par les faisceaux de cercles ayant comme points de base ou points de Poncelet les points $t_0$ et $t_\infty$, diamétralement opposés sur la circonférence unité.

*Type* **C**. — $\alpha$. Si $U = -\frac{1}{u + i\beta}$, on trouve

$$Z = \log(u + i\beta)$$

et l'on pose

$$\zeta = e^Z = u + i\beta.$$

$\beta$. Si $U' = u + i\beta$, on peut prendre

$$Z' = u.$$

Dans le plan $(Z')$, où les lignes de courbure de la surface de révolution $\beta$ sont représentées par les parallèles aux axes, les lignes de courbure de la surface $\alpha$, à cause de $\zeta = Z' + i\beta$, ont pour image les droites rayonnant du point $-i\beta$, et les cercles orthogonaux.

Sur les formules précédentes, on vérifie ce qui a été dit à la fin du n° 6. En posant $Z = \xi + i\eta$, la partie réelle de U, Q, se présente comme le produit d'une fonction de $\xi$ par une fonction de $\eta$.

Notons enfin que si l'on avait fait la carte de la surface d'O. B. sur le plan de la variable (U), c'est-à-dire sur le plan où les lignes $\psi = C$ sont représentées par des parallèles à l'axe imaginaire, on aurait obtenu, comme images des lignes de courbure, des coniques homofocales ayant leurs foyers soit sur l'axe imaginaire, soit en des positions symétriques par rapport à l'axe imaginaire. C'est une conséquence du fait que les lignes de courbure bissectent les lignes $\psi = C$ et $H = C$, et de la nature de l'image des courbes $H = C$, qui a été indiquée au n° 8.

16. L'équation de Gauss des surfaces d'O. B. est une équation du troisième ordre dont l'inconnue est la courbure moyenne $f(x)$. On peut en obtenir une intégrale première de la manière suivante.

Prenons-la sous la forme (6.4), où nous faisons $m = 1$

$$\frac{d^2}{dx^2} \log f' = \psi_{uv}\left(\frac{f^2}{f'} + 2\right) - f'.$$

Dans le type **A**, on a

$$\psi_{uv} = \frac{k^2}{\sin^2 kx},$$

ce qui peut s'écrire

$$\psi_{uv} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log\sin^2 kx;$$

l'équation devient donc

$$(16.1)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\log(f'\sin^2 kx) = \frac{k^2 f^2}{f'\sin^2 kx} - f'.$$

Multiplions les deux membres par

$$\frac{d}{dx}\log(f'\sin^2 kx) = \frac{f''}{f'} + 2k\cot kx;$$

il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\log(f'\sin^2 kx)\right]^2 = \frac{k^2 f^2 f''}{f'^2\sin^2 kx} + \frac{2k^3 f^2\cos kx}{f'\sin^3 kx} - f'' - 2kf'\cot kx,$$

et, en intégrant,

$$(16.2)\qquad \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\log(f'\sin^2 kx)\right]^2 + f' + 2kf\cot kx + \frac{k^2 f^2}{f'\sin^2 kx} = \mathrm{C}.$$

Dans le type **B**, il suffit de remplacer $\sin kx$ et $\cot kx$ par $\operatorname{sh} kx$ et $\operatorname{cth} kx$.

Dans le type **C**, on a

$$\psi_{uv} = \frac{1}{x^2}, \qquad \text{ou} \qquad \psi_{uv} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log x^2,$$

ce qui permet d'écrire l'équation de Gauss

$$(16.3)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\log(x^2 f') = \frac{f^2}{x^2 f'} - f'.$$

Multiplions les deux membres par

$$\frac{d}{dx}\log(x^2 f') = \frac{f''}{f'} + \frac{2}{x};$$

nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\log(x^2 f')\right]^2 = \frac{f^2 f''}{x^2 f'^2} + \frac{2f^2}{x^3 f'} - f'' - \frac{2f'}{x},$$

et par intégration,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\log(x^2 f')\right]^2 + f' + \frac{2f}{x} + \frac{f^2}{x^2 f'} = \mathrm{C}.$$

**17.** Par le calcul précédent, la recherche de $f$ se trouve ramenée à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre contenant la constante arbitraire C. On peut encore ramener le problème à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre par une méthode toute différente, basée sur la considération des hélicoïdes de Bonnet.

Nous avons vu au n° 9 que, dans le type **A**, figurent des hélicoïdes, pour lesquels $\mathrm{U} = -ie^{2iku}$. On obtient donc, pour ces hélicoïdes,

$$\psi_u = -\frac{k\,e^{ik(u+v)}}{\sin k(u+v)}, \qquad \psi_v = -\frac{k\,e^{-ik(u+v)}}{\sin k(u+v)},$$

ce qui s'écrit encore, puisque $u+v=x$,

$$\psi_u = -k \cot kx - ik. \qquad \psi_v = -k \cot kx + ik.$$

Les deux formes fondamentales d'une telle surface sont donc

$$(17.1) \qquad ds^2 = \frac{2k^2\,du\,dv}{f' \sin^2 kx}, \qquad \Phi = (-k\cot kx - ik)\,du^2 + f\,ds^2 + (-k\cot kx + ik)\,dv^2.$$

Or, partons des équations paramétriques d'un hélicoïde quelconque

$$X = r\cos\omega, \qquad Y = r\sin\omega, \qquad Z = \zeta + h\omega.$$

$r$ et $\zeta$ sont fonction d'un même paramètre. Définissons le paramètre $\varphi$ par

$$(17.2) \qquad d\varphi = \frac{\sqrt{(h^2+r^2)\,dr^2 + r^2\,d\zeta^2}}{h^2+r^2}$$

et posons, en outre,

$$d\theta = d\omega + \frac{h\,d\zeta}{h^2+r^2};$$

le $ds^2$ prendra la forme isotherme

$$ds^2 = (h^2+r^2)(d\varphi^2 + d\theta^2).$$

$\varphi$ et $\theta$ sont donc des paramètres harmoniques sur la surface. Posons

$$\varphi = \alpha + \beta, \qquad \theta = i(\alpha - \beta).$$

Nous obtiendrons, pour notre hélicoïde générique, les formes fondamentales

$$(17.3) \qquad ds^2 = 4(h^2+r^2)\,d\alpha\,d\beta, \qquad \Phi = (g - 2ih)\,d\alpha^2 + f\,ds^2 + (g+2ih)\,d\beta^2,$$

$f$ désigne la courbure moyenne et a pour expression, en désignant par un accent les dérivées relatives à $\varphi$,

$$(17.4) \qquad f = \frac{1}{2rr'}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r^2\zeta'}{h^2+r^2}\right),$$

et $g$ s'exprime par

$$(17.5) \qquad g = \frac{(h^2+r^2)^2}{rr'}\,\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{r^2\zeta'}{(h^2+r^2)^2}\right].$$

On constate que

$$\frac{g'}{f'} = 2(h^2+r^2),$$

si bien que le $ds^2$ s'écrit aussi

$$(17.6) \qquad ds^2 = 2\,\frac{g'}{f'}\,d\alpha\,d\beta.$$

Il est clair que si, pour cet hélicoïde, on connaît l'expression de $g$ en fonction de $\varphi$, l'équation (17.5) déterminera $r(\varphi)$, car, au second membre, $\zeta'$ peut être remplacé en fonction de $r$ et $r'$ au moyen de (17.2), et l'on obtient ainsi une équation du second ordre en $r(\varphi)$. Une fois intégrée cette équation, (17.4) donnerait $f(\varphi)$.

Or d'après l'expression (17.3) de la forme asymptotique, il est manifeste que $g$

est liée à la fonction primitive $\psi(\alpha, \beta)$ relative aux choix du paramètre harmonique $\varphi$ par

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = g - 2ih, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = g + 2ih, \qquad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = g'.$$

Pour que l'hélicoïde soit un hélicoïde de Bonnet, il suffit qu'on ait

$$\frac{\psi_{\alpha\beta}}{\psi_\alpha\psi_\beta} = m, \tag{17.7}$$

$m$ peut être une constante quelconque, car il n'est pas nécessaire que $\varphi$ soit le paramètre canonique $x = u + v$. Cette équation (17.7) s'écrit

$$\frac{g'}{g^2 + 4h^2} = m,$$

et s'intègre, en négligeant une constante additive à $\varphi$, par

$$g = -2h\cot 2hm\varphi. \tag{17.8}$$

A la constante arbitraire $m$ près, nous connaissons donc $g(\varphi)$ pour tout hélicoïde de Bonnet; donc, d'après ce qui a été dit plus haut, la détermination de la courbure moyenne $f$ d'un tel hélicoïde est ramenée à l'intégration de l'équation du second ordre (17.5), où $g$ a l'expression (17.8). Cette équation contient le paramètre arbitraire $m$; l'intégration introduira deux constantes nouvelles : nous aurons bien, par (17.4), $f(\varphi)$ avec trois constantes arbitraires, et cette expression de $f$ sera la solution générale de l'équation de Gauss des surfaces d'O. B. du type **A**, puisque cette équation est identique à celle des hélicoïdes d'O. B. Il est toutefois nécessaire d'indiquer le lien exact qui existe entre $x$ et $\varphi$, ainsi qu'entre la constante $k$, qui figure dans l'équation de Gauss, et les nouvelles constantes $h$ et $m$. Récrivons les deux formes fondamentales de l'hélicoïde de Bonnet, en prenant pour le $ds^2$ l'expression (17.6), et compte tenu de (17.8)

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= 2\frac{4h^2 m\,d\alpha\,d\beta}{f'(\varphi)\sin^2 2hm\varphi}, \\ \Phi &= (-2h\cot 2hm\varphi - 2ih)\,d\alpha^2 + f\,ds^2 + (-2h\cot 2hm\varphi + 2ih)\,d\beta^2. \end{aligned}\right. \tag{17.9}$$

L'identification avec (17.1) s'obtient en posant

$$2hm\varphi = kx \qquad \text{et} \qquad k = 2hm^2,$$

d'où

$$\varphi = mx, \qquad \alpha = mu, \qquad \beta = mv.$$

Donc, une fois $f$ déterminée en fonction de $\varphi$, $h$, $m$, et de deux constantes d'intégration, on aura $f$ en fonction de $x$, de $m$, et de deux constantes d'intégration en remplaçant $\varphi$ par $mx$, et $h$ par $\frac{k}{2m^2}$ : l'expression obtenue sera l'intégrale générale de (16.1).

**18.** Dans le type **C**, nous avons vu au n° 11 qu'il y avait des surfaces de révolution, pour lesquelles $U = u$, d'où

$$ds^2 = 2\frac{du\,dv}{x^2 f'(x)}, \qquad \Phi = -\frac{du^2}{x} + f\,ds^2 - \frac{dv^2}{x}.$$

Or, dans les formules que nous avons utilisées au numéro précédent, il suffit de faire $h = 0$ pour obtenir celles qui correspondent à la surface de révolution; le paramètre harmonique $\varphi$ vérifie alors

$$d\varphi = \frac{\sqrt{dr^2 + d\zeta^2}}{r} \tag{18.1}$$

et l'on a

$$ds^2 = 2\frac{g'}{f'}\,d\alpha\,d\beta, \qquad \Phi = g\,d\alpha^2 + f\,ds^2 + g\,d\beta^2,$$

avec

$$f = \frac{\zeta''}{2rr'}, \qquad g = \frac{r^4}{rr'}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\zeta'}{r^2}\right) = \frac{r\zeta''}{r'} - 2\zeta'. \tag{18.2}$$

La fonction primitive $\psi(\alpha, \beta)$ vérifie

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = g, \qquad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = g',$$

et l'on a une surface de révolution de Bonnet si

$$\frac{g'}{g^2} = m, \qquad \text{d'où} \quad g = -\frac{1}{m\varphi}.$$

L'équation déterminant $r(\varphi)$ est donc, d'après la seconde des formules (18.2),

$$-\frac{1}{m\varphi} = \frac{r\zeta''}{r'} - 2\zeta', \tag{18.3}$$

où $\zeta'$ doit être remplacé en fonction de $r$ et $r'$ au moyen de (18.1). Quant à la relation entre $x$ et $\varphi$, on trouve, en opérant comme ci-dessus, que $\varphi = mx$, si bien que, une fois intégrée l'équation (18.3), la première formule (18.2) donnera la solution générale de l'équation (16.3).

(Manuscrit reçu le 12 décembre 1948.)