BULLETIN DE LA S. M. F.

P. LÉVY

Sur la croissance des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 127-149
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__127_0>

SUR LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES

(*suite*);

PAR M. PAUL LÉVY.

CHAPITRE II.

L'influence des arguments des coefficients.

12. *La valeur de* $|f(z)|$ *en un point donné.* — Introduisant d'une manière essentielle les arguments α_ν des coefficients, nous supposerons les c_ν connus et chacun des α_ν sera choisi au hasard entre o et 2π; ces choix seront indépendants les uns des autres et effectués de manière à donner la même probabilité à des arcs égaux du cercle trigonométrique: à chaque arc $d\alpha$ correspondra une probabilité $\frac{d\alpha}{2\pi}$. Le premier problème qui se pose est celui d'étudier les probabilités des différentes valeurs possibles de $|f(z)|$ en un point donné $z = re^{i\theta}$.

Nous poserons

$$f(z) = u + iv = (\sigma + i\tau)M_2(r) = \rho M_2(r)e^{i\varphi}, \tag{38}$$

u et v ayant les valeurs

$$u = \Sigma c_\nu r^\nu \cos(\alpha_\nu + \nu\theta), \qquad v = \Sigma c_\nu r^\nu \sin(\alpha_\nu + \nu\theta). \tag{39}$$

Chaque terme de u ayant sa valeur probable nulle, on a

$$\text{val. pr. } u^2 = \Sigma \text{ val. pr. } c_\nu^2 r^{2\nu} \cos^2(\alpha_\nu + \nu\theta) = \frac{1}{2} M_2^2(r), \tag{40}$$

le symbole val. pr. désignant la valeur probable. Si d'ailleurs $\omega_2(r)$ est grand, le plus grand terme de cette somme est négligeable devant l'ensemble et, dans ces conditions, le second théorème fondamental du calcul des probabilités nous apprend que :

La probabilité de l'inégalité

$$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$$

est sensiblement égale à l'intégrale de Gauss

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{-\sigma^2}\,d\sigma. \tag{41}$$

L'erreur commise dans cette évaluation est d'ailleurs d'autant plus petite que $\omega_2(r)$ *est plus grand; si* $\omega_2(r)$ *augmente indéfiniment, elle tend vers zéro, et cela uniformément par rapport à* σ_1 *et* σ_2.

Si, au lieu d'ajouter des segments sur une même droite, on ajoute bout à bout dans le plan de la variable complexe $u+iv$ les vecteurs, très petits par rapport à $M_2(r)$, qui représentent les différents termes de $f(z)$, la direction de chacun de ces vecteurs étant choisie au hasard, une extension bien connue du théorème fondamental nous apprend que : *la loi de probabilité dont dépend asymptotiquement* $f(z)$ *s'obtient en considérant* σ *et* τ *comme deux variables indépendantes obéissant à la loi de Gauss* (41).

A une aire élémentaire $d\sigma\,d\tau$ correspond donc la probabilité

$$\frac{1}{\pi}e^{-(\sigma^2+\tau^2)}\,d\sigma\,d\tau = \frac{1}{\pi}e^{-\rho^2}\,d\sigma\,d\tau. \tag{42}$$

L'aire élémentaire en coordonnées polaires étant $\rho\,d\rho\,d\varphi$, la probabilité de l'inégalité $\rho > \rho_0$ est

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_0}^{\infty} \rho\, e^{-\rho^2}\,d\rho = e^{-\rho_0^2}. \tag{43}$$

Donc :

THÉORÈME XV. — *En un point déterminé, la probabilité de l'inégalité*

$$|f(z)| > \rho_0 M_2(r)$$

est peu différente de $e^{-\rho_0^2}$; *l'erreur commise dans cette évaluation a une borne supérieure, indépendante de* ρ_0, *et qui tend vers zéro quand* $\omega_2(r)$ *augmente indéfiniment.*

Il s'agit bien entendu de l'erreur absolue; comme les valeurs de $|f(z)|$ supérieures à $F(r)$ sont impossibles et qu'on leur trouve une probabilité positive, l'erreur relative n'est pas bornée.

Rappelons d'autre part que, le second théorème fondamental du calcul des probabilités étant admis, l'extension que nous venons d'appliquer est facile à obtenir; du moins il est facile, en supposant l'existence d'une loi limite, de former cette loi. Il est évident en effet que la loi de probabilité cherchée, dont $f(z)$ doit dépendre asymptotiquement, est indépendante de l'argument φ et permet de retrouver la loi de Gauss (41) si l'on cherche la loi de probabilité de la partie réelle $\sigma = \rho \cos\varphi$. La loi définie par la formule (42) vérifie bien ces deux propriétés. Il suffit donc de montrer que ces deux propriétés caractérisent une loi bien déterminée. Or, $K(\rho)\,d\rho$ désignant la probabilité de l'intervalle $d\rho$, $L(\sigma)\,d\sigma$ celle de l'intervalle $d\sigma$, elles s'expriment par l'équation intégrale

$$L(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{\sigma}^{\infty} K(\rho)\frac{d\rho}{\sqrt{\sigma^2-\rho^2}},$$

qui, aux notations près, n'est autre que celle étudiée par Abel à propos du problème de la courbe brachistochrone. Sous des conditions de continuité et de convergence à l'infini vérifiées par la fonction de Gauss $L(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\sigma^2}$, cette équation n'a qu'une solution, donnée par la formule

$$K(\rho) = -2\frac{d}{d\rho}\int_{\rho}^{\infty} L(\sigma)\frac{d\rho}{\sqrt{\sigma^2-\rho^2}}.$$

Le résultat énoncé est bien établi. Il est d'ailleurs facile de faire effectivement le calcul de $K(\rho)$ à l'aide de cette formule. Par une intégration par parties, $\sqrt{\sigma^2-\rho^2}\,L(\sigma)$ s'annulant à l'infini, il vient

$$\int_{\rho}^{\infty} L(\sigma)\frac{\rho}{\sqrt{\sigma^2-\rho^2}} = -\int_{\rho}^{\infty} L'(\sigma)\sqrt{\sigma^2-\rho^2}\,d\sigma,$$

d'où

$$K(\rho) = -2\int_{\rho}^{\infty} L'(\sigma)\frac{\rho}{\sqrt{\sigma^2-\rho^2}}\,d\sigma = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\rho\int_{\rho}^{\infty} e^{-\sigma^2}\frac{\sigma\,d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-\rho^2}},$$

ou, en posant $\sigma^2 = \rho^2 + \tau^2$,

$$K(\rho) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\rho e^{-\rho^2}\int_{0}^{\infty} e^{-\tau^2}d\tau = 2\rho e^{-\rho^2},$$

ce qui correspond bien à la formule (43) donnant la probabilité totale pour toutes les valeurs de ρ supérieures à ρ_0.

13. *La valeur de* $|f(z)|$ *au voisinage d'un point donné.* — Connaissant la valeur de $f(z)$ en un point, la première idée est d'utiliser une borne supérieure de $|f'(z)|$ pour être renseigné sur la valeur de $f(z)$ dans le voisinage de ce point. Mais nous n'aurions pas ainsi une précision suffisante; nous mettrons en facteur, dans $f(z)$, le terme maximum $c_n z^n$, dont la variation est bien connue, ou simplement z^n, et nous chercherons une borne supérieure de la dérivée

$$\frac{d}{dz}[z^{-n}f(z)] = \Sigma c_\nu(\nu - n)z^{\nu-n-1}.$$

Cette dérivée est majorée par la somme

$$\Sigma c_\nu\,|\nu - n|\,r^{\nu-n-1} \tag{44}$$

Plaçons-nous dans le cas des fonctions vérifiant les conditions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{D}$. La formule asymptotique (3) conduit à une représentation de la somme précédente par une intégrale. Il faut toutefois observer que le facteur e^ε n'est sûrement très voisin de l'unité que pour les termes de $F(r)$ du même ordre de grandeur que le terme maximum. Nous avons vu au n° 6, comme conséquence de la condition $\mathcal{C}$ qui elle-même, au moins pour ξ assez grand, résulte de la condition $\mathcal{R}$, qu'en négligeant les autres termes de $F(r)$ on commet une erreur relative négligeable. Il s'agit de montrer qu'il en est de même pour la série (44). En raisonnant comme au n° 6, cela revient à montrer que dans la série

$$q + 2q^2 + \ldots + pq^p + \ldots, \qquad (q < 1)$$

les termes pour lesquels $q^p < k$ constituent, si k est assez petit, une fraction très petite de la somme, et cela même si q diffère très peu de l'unité. La vérification est facile; l'erreur relative commise en négligeant ces termes tend, quand q tend vers 1, vers $k \log \frac{e}{k}$.

On peut alors raisonner comme au n° 3, et écrire

$$\Sigma c_\nu|\nu - n|\,r^{\nu-n-1} \sim \frac{c_n}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2}{2}g''(x)}|h|\,dh = \frac{2c_n}{rg''(x)},$$

c'est-à-dire, d'après (6'),

$$\Sigma c_\nu|\nu - n|\,r^{\nu-n-1} = \frac{2c_n}{\pi r}\,\omega_2^4(r)e^\varepsilon,$$

ε tendant vers zéro pour r infini. Il vient donc

$$(45)\qquad \left|z^n \frac{d}{dz}[z^{-n} f(z)]\right| > \frac{2m(r)}{\pi r}\,\omega_2^{\frac{1}{2}}(r)e^{\varepsilon} = \frac{2M_2(r)}{\pi r}\,\omega_2^{\frac{3}{2}}(r)e^{\varepsilon}.$$

Si l'on considère spécialement un déplacement sur le cercle $|z| = r$, il vient

$$(45')\qquad \left|\frac{d}{d\theta}[e^{-ni\theta} f(re^{i\theta})]\right| < \frac{2}{\pi} M_2(r)\omega_2^{\frac{3}{2}}(r)e^{\varepsilon}.$$

On obtient de même la formule

$$(46)\qquad \left|\frac{d^2}{d\theta^2}[e^{-ni\theta} f(re^{i\theta})]\right| < \frac{\sqrt{2}}{\pi} M_2(r)\omega_2^{\frac{5}{2}}(r)e^{\varepsilon}.$$

Par des raisonnements analogues à ceux du n° 6, on voit d'ailleurs aisément que les conditions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{O}$, que nous avons utilisées pour simplifier les calculs, ne sont pas essentielles. Si la condition $\mathcal{C}$ est vérifiée, le nombre de termes qu'il faut considérer de part et d'autre du terme maximum pour avoir des expressions asymptotiques exactes de la série $F(r)$ et des différentes dérivées que nous venons de considérer, est de l'ordre de grandeur de $K\omega_2(r)$, K désignant un facteur constant très grand, et l'on en déduit aisément des formules analogues aux précédentes, les facteurs constants $\frac{2}{\pi}$ et $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ étant seulement remplacés par des valeurs plus grandes; on peut, par contre, supprimer le facteur e^{ε}, ces formules n'ayant plus un caractère asymptotique.

14. *Conséquences relatives à* $M(r)$. — Sur le cercle $|z| = r$, considérons N points qui soient les sommets d'un polygone régulier. Supposons qu'en chacun de ces points, on ait

$$(47)\qquad |f(z)| \leqq \rho M_2(r),$$

et demandons-nous comment devront être choisis N et ρ' pour qu'on ait sur tout le cercle

$$(48)\qquad M(r) \leqq (\rho + \rho')M_2(r).$$

Une condition suffisante pour justifier cette conclusion est évidemment

$$\frac{\pi}{N}\,\mathrm{Max}\left|\frac{d}{d\theta}[e^{ni\theta} f(re^{i\theta})]\right| \leqq \rho' M_2(r),$$

c'est-à-dire, compte tenu de (45'),

$$N \geqq \frac{2}{\rho'}\omega_2^{\frac{3}{2}}(r)e^{\varepsilon}. \tag{49}$$

D'autre part, si l'on étudie la variation de $|f(z)|$ dans le voisinage du point où cette quantité atteint un maximum $M(r)$, le terme du premier degré dans le développement de $e^{-ni\theta}f(re^{i\theta})$ en série de Taylor ne pouvant entraîner qu'une augmentation du module, la formule (46) montre que ce module diminue au plus de

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2}} M_2(r)\omega_2^{\frac{5}{2}}(r)e^{\varepsilon}\,d\theta^2. \tag{50}$$

Il suffit que, pour la valeur $\frac{\pi}{N}$ de l'accroissement $d\theta$, cette diminution ne puisse dépasser $\rho' M_2(r)$, c'est-à-dire que

$$N \geqq \sqrt{\frac{\pi}{\rho'\sqrt{2}}}\,\omega^{\frac{5}{4}}(r)e^{\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{51}$$

Cette condition étant, pour $\omega_2(r)$ très grand, moins restrictive que la précédente, c'est elle que nous retiendrons. D'ailleurs, d'après la remarque finale du n° 13, si l'on remplace les facteurs numériques par une certaine constante absolue A, le résultat s'applique à toutes les fonctions vérifiant la condition $\mathcal{C}$. Donc, pour ces fonctions, N étant le plus petit entier supérieur à

$$\frac{A}{\sqrt{\rho'}}[\omega_2(r)]^{\frac{5}{2}},$$

l'inégalité (47), supposée vérifiée pour N points convenablement choisis, entraîne l'inégalité (48).

Désignons maintenant respectivement par β la probabilité que l'inégalité (48) soit en défaut et par γ la probabilité que l'inégalité (47) soit en défaut pour un point du cercle $|z| = r$; sans qu'il soit nécessaire d'étudier la correlation entre les lois de probabilité relatives aux valeurs de $|f(z)|$ aux N points considérés, on peut affirmer que

$$\beta \leqq N\gamma.$$

Pour que $\beta < \beta_0$, il suffit donc que

$$\gamma < \frac{\beta_0}{N},$$

c'est-à-dire

$$\log\frac{1}{\gamma} > \frac{5}{2}\log\omega_2(r) + \log\frac{A}{\beta_0\sqrt{\rho'}} + \varepsilon \tag{52}$$

(ε, provenant d'une erreur < 1 sur N, est infiniment petit de l'ordre de $\omega_2^{-\frac{5}{2}}$).

Si l'on pouvait considérer comme exacte l'évaluation de $\log\frac{1}{\gamma}$ donnée par le théorème XV, on pourrait conclure que : B *désignant une constante supérieure à* $\frac{5}{2}$, *la probabilité de l'inégalité*

$$M(r) \leqq M_2(r)\sqrt{B\log\omega_2(r)}$$

tend vers l'unité pour $\omega_2(r)$ *infini* [en effet l'inégalité (52) est vérifiée dans ces conditions pour $\frac{5}{2} < \rho < B$, $\rho' = B - \rho$, β_0 arbitrairement petit, et ensuite $\omega_2(r)$ suffisamment grand]. Il est bien entendu que ce résultat s'appliquerait à toutes les fonctions entières vérifiant la condition $\mathcal{C}$.

La difficulté d'une démonstration rigoureuse provient de ce qu'il faudrait connaître une limite supérieure de l'erreur commise dans l'évaluation de la probabilité γ par l'expression $e^{-\rho^2}$ qui résulte du théorème XV. Il est bien certain qu'en précisant convenablement les raisonnements qui conduisent au théorème fondamental du calcul des probabilités, on peut trouver une borne supérieure de la forme $\varphi[\omega_2(r)]$. Si elle est de la forme $a[\omega_2(r)]^{-b}$, avec $b \leqq \frac{5}{2}$, l'énoncé précédent est établi; si $b > \frac{5}{2}$, il faut le modifier en remplaçant $\frac{5}{2}$ par b.

Il semble préférable d'employer une méthode reposant sur un théorème établi dans le cas des polynomes par J. E. Littlewood [3] mais qui s'étend sans difficulté aux fonctions entières vérifiant la condition $\mathcal{C}$.

15. *Application de la méthode de Littlewood.* — Indiquons d'abord les idées directrices; cette méthode repose sur la considération de l'intégrale

$$J_{2p}(r) = [M_{2p}(r)]^{2p} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{2p}\,d\theta.$$

Cette intégrale dépendant des arguments α_ν (du moins si $p > 1$)

il y a lieu de considérer sa valeur probable

$$I_{2p}(r) = [\mathfrak{M}_{2p}(r)]^{2p} = \text{val. pr.}\, J_{2p}(r).$$

Il faut remarquer que le fait qu'il y ait une infinité de variables α_ν, et que cette valeur probable soit en réalité une intégrale d'ordre infini, n'empêche pas qu'elle soit définie avec précision. En se bornant aux termes de $f(z)$ dont les degrés ne dépassent pas une valeur très grande ν', on commet sur $|f^{2p}(z)|$, et par suite sur $J_{2p}(r)$ et sur $I_{2p}(r)$, une erreur au plus égale à celle commise dans ces conditions sur $F^{2p}(r)$; pour chaque valeur de r, si ν' est assez grand, on obtient par une intégrale d'ordre ν' une expression de $I_{2p}(r)$ aussi approchée qu'on veut.

En raison du rôle prépondérant des grandes valeurs dans le calcul des moyennes d'ordres élevés, $M_{2p}(r)$ tend vers $M(r)$, et $\mathfrak{M}_{2p}(r)$ vers $F(r)$, pour p infini. Notre but étant de montrer la possibilité de valeurs de $M(r)$ dépassant à peine l'ordre de grandeur de $M_2(r)$, nous devons considérer surtout les valeurs moyennes de p; si p est très grand, $\mathfrak{M}_{2p}(r)$ est voisin de $F(r)$, et l'on ne peut pas par ce moyen conclure à l'existence de valeurs beaucoup plus petites de $M_{2p}(r)$; si p est trop petit, $M_{2p}(r)$ est bien de l'ordre de grandeur voulu, mais il ne donne qu'une borne inférieure de $M(r)$ qui peut être beaucoup plus grand. Au contraire la considération de valeurs moyennes, c'est-à-dire croissant indéfiniment, mais lentement, avec $\omega_2(r)$, nous donnera le résultat voulu.

Calculons d'abord, en fonction de $J_{2p}(r)$, une borne supérieure de $M(r)$.

Nous utiliserons les résultats du n° 13 sous la forme suivante : si les c_ν vérifient la condition $\mathcal{C}$, on a

$$\left|\frac{d}{d\theta}[e^{-ni\theta}f(re^{i\theta})]\right| < A M_2(r)\omega_2^3(r),$$

A désignant une constante absolue, et par suite

$$|f(re^{i\theta})| > M(r)[1 - \lambda\,|\theta - \theta_0|],$$

θ_0 désignant l'argument du point (ou d'un des points) de la circonférence $|z| = r$ où $|f(z)| = M(r)$, et λ ayant la valeur

$$\lambda = A\frac{M_2(r)}{M(r)}\omega_2^3(r) < A\,\omega_2^3(r).$$

Comme on n'obtient qu'une partie de l'intégrale $J_{2p}(r)$ en intégrant par rapport à $\theta' = \theta - \theta_0$ de $-\frac{1}{\lambda}$ à $+\frac{1}{\lambda}$, il vient

$$J_{2p}(r) > \frac{1}{\pi} M^{2p}(r) \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (1-\lambda\theta')^{2p} d\theta' = \frac{1}{\lambda\pi} \frac{M^{2p}(r)}{(2p+1)},$$

et par suite, A' désignant une nouvelle constante,

$$J_{2p}(r) > \frac{A' M^{2p}(r)}{p\,\omega_2^3(r)}. \tag{53}$$

En faisant intervenir des dérivées secondes, comme aux nos 13 et 14, on obtiendrait de même la formule plus précise

$$J_{2p}(r) > \frac{A' M^{2p}(r)}{\sqrt{p\,\omega_2^5(r)}}. \tag{53'}$$

D'autre part Littlewood a montré que

$$I_{2p}(r) \leqq p' [M_2(r)]^{2p}. \tag{54}$$

Son calcul, fait dans le cas d'un polynome, s'applique sans modification au cas qui nous intéresse. On peut d'ailleurs, sans reprendre le calcul, en appliquer le résultat au polynome formé par un nombre fini de termes de $f(z)$, et passer à la limite. Les valeurs de $J_{2p}(r)$ supérieures à $K I_{2p}(r)$ ont évidemment une probabilité inférieure à $\frac{1}{K}$, et, si K est grand, les valeurs de $J_{2p}(r)$ au plus égales à $K I_{2p}(r)$ sont très probables.

Étudions en particulier la probabilité de l'inégalité

$$J_{2p}(r) \leqq \left(\frac{p}{e}\right)^p [M_2(r)]^{2p} e^{ap}, \tag{55}$$

a étant positif. Elle est très probable, si p est grand, la probabilité de l'hypothèse contraire étant inférieure à

$$\frac{p'.e^p}{p^p} e^{-ap} \sim \sqrt{2\pi p}\, e^{-ap}, \tag{56}$$

et *a fortiori*, pour p assez grand, à $e^{-a'p}$, a' étant inférieur à a d'une quantité arbitrairement petite.

Or, compte tenu de (53′), l'inégalité (55) donne

$$M^2(r) < \frac{p}{e} e^a M_2^2(r) \left[\frac{p^2 \omega_2^5(r)}{A'^2}\right]^{\frac{1}{2p}},$$

L'entier p étant à notre disposition, nous pouvons prendre celui qui rend le second membre minimum; il est pour $\omega_2(r)$ infini équivalent à $\frac{5}{2}\log\omega_2(r)$, et l'inégalité précédente s'écrit

$$(57) \qquad M^2(r) < e^a M_2^2(r)\varphi[\omega_2(r)],$$

φ désignant une fonction, bornée tant que $\omega_2(r)$ est borné, et équivalente à l'infini à $\frac{5}{2}\log\omega_2(r)$. La probabilité (56) est alors, pour $\omega_2(r)$ très grand, comparable à

$$(58) \qquad \frac{\sqrt{5\pi\log\omega_2(r)}}{[\omega_2(r)]^{\frac{5a}{2}}}.$$

On a ainsi le résultat suivant :

Théorème XVI. — *Il existe une fonction* $\varphi(\omega)$, *croissant avec* ω *et équivalente à l'infini à* $\frac{5}{2}\log\omega$, *jouissant des propriétés suivantes : les coefficients* c_ν *étant donnés et les arguments* α_ν *choisis au hasard, l'inégalité*

$$M^2(r) < e^a M_2^2(r)\varphi[\omega_2(r)]$$

est possible, pour chaque valeur de r *considérée indépendamment des autres, pourvu que* a *soit positif. La probabilité que cette inégalité soit en défaut est inférieure à une fonction de* a *et de* $\omega_2(r)$, *équivalente pour* $\omega_2(r)$ *infini à l'expression* (58).

16. *La croissance de* $M(r)$. — Il nous reste à passer du cas de l'étude d'une circonférence $|z| = r$ à celle de l'ensemble du plan par un procédé analogue à celui qui nous a servi au n° 14 à passer de l'étude des valeurs possibles de $f(z)$ en un point à celle des valeurs possibles de $M(r)$ sur la circonférence.

Considérons une infinité de cercles de rayons

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_h, \quad \ldots,$$

indéfiniment croissants. Si la série

$$(59) \qquad \sum \frac{1}{[\omega_2(r_h)]^{\frac{5a}{2}}}$$

est convergente pour $a > a'$, la somme de la série

$$(60) \qquad \sum \frac{\sqrt{5\pi \log \omega_2(r_h)}}{[\omega_2(r_h)]^{\frac{5a}{2}}}$$

peut être rendue aussi petite que l'on veut, pour n'importe quelle valeur de a supérieure à a', par la suppression d'un nombre fini de termes. Par suite, pour une fonction vérifiant la condition $\mathcal{C}$, la probabilité que l'équation (57) soit vérifiée pour tous les r_h supérieurs à R tend vers l'unité pour R infini. Pour que cette équation soit, avec la même probabilité, vérifiée pour tout r assez grand, il suffit qu'entre deux r_h consécutifs la variation de $\frac{M(r)}{m(r)}$ soit au plus de l'ordre de grandeur de $\omega_2(r)$; l'effet de cette variation, au point de vue de l'inégalité (57), est alors inférieur à celui d'une petite variation de a. Or la formule (45) et les remarques finales du n° 13 permettent d'écrire

$$\frac{d}{dr}\frac{M(r)}{m(r)} < \frac{A}{r}\omega_2^4(r),$$

r désignant une constante absolue. Il suffit donc, pour l'objet qui nous occupe, que la variation $r_{h+1} - r_h$ de r soit de l'ordre de grandeur de $r\omega_2^{-3}(r)$. Or il sera sûrement possible de déterminer les r_h vérifiant cette condition et assurant la convergence de la série (59), si l'integrale

$$(61) \qquad \int \frac{dr}{r}[\omega_2(r)]^{3-\frac{5a}{2}}$$

est convergente. Donc :

Théorème XVII. — *Les c_ν étant tels que $g''(x) \geqq 0$ et que l'intégrale* (56) *converge pour tout $a > a'$, les a_ν étant choisis arbitrairement, et la fonction $\varphi(\omega)$ étant la même que dans l'énoncé du théorème* XVI, *il est infiniment probable que l'inégalité* (57) *soit vérifiée pour tout a supérieur à a' et pour r assez grand.*

On peut d'ailleurs transformer l'intégrale (61) en introduisant la fonction $g''(\xi)$. D'après (2), on a

$$\frac{dr}{r} = g''(x)\,dx,$$

et, si la condition $\mathcal{R}$ est vérifiée, l'ordre de grandeur de $\omega_2^{-4}(r)$ est celui de $g''(x)$. Sous des conditions beaucoup moins restrictives que la condition $\mathcal{R}$, cela reste vrai en moyenne pour tout intervalle assez grand. La convergence de l'intégrale (61) est alors liée à celle de l'intégrale

$$\int [g''(x)]^{\frac{5a+2}{8}} dx. \tag{62}$$

Nous allons appliquer ces résultats de deux manières différentes :

1° Pour que l'intégrale (61) converge, il suffit que $a > \frac{6}{5}$ et que $\omega_2(r)$ croisse plus vite qu'une puissance de r, d'exposant d'ailleurs arbitrairement petit. Pour les fonctions suffisamment régulières, cela revient à dire qu'elles sont d'ordre positif.

En faisant intervenir $g''(x)$, il suffit pour que ces conclusions soient exactes que $xg''(x)$ soit positif et borné. L'intégrale (62) converge sûrement dans ces conditions; si l'on se reporte à l'intégrale (61), sa convergence résulte de ce que, d'après le n° 6,

$$\frac{dr}{r} < K\frac{dx}{x}, \qquad \frac{1}{\omega_2^4(r)} < \frac{KA'}{x},$$

K désignant la borne supérieure de $xg''(x)$ et A′ une constante absolue.

D'autre part, $\omega_2(r)$ augmentant indéfiniment, $\varphi[\omega_2(r)]$ est équivalent à $\frac{5}{2}\log\omega_2(r)$. Par suite :

Théorème XVIII. — *Les c_ν étant tels que $xg''(x)$ soit positif et borné, les a_ν étant choisis arbitrairement, et A étant une constante supérieure à $e^{\frac{6}{5}}\sqrt{\frac{5}{2}}$, il est infiniment probable que l'on ait, pour tout r assez grand,*

$$M(r) < AM_2(r)\sqrt{\log\omega_2(r)}.$$

2° Si $\omega_2(r)$ croît au moins comme une puissance de $\log r$, l'intégrale (61) converge pour a assez grand. En faisant intervenir $g''(x)$ et l'intégrale (62), on arrive à la même conclusion en supposant que $g''(x)$ tende vers zéro au moins comme une certaine puissance de $\frac{1}{x}$. Cette condition, moins restrictive que la précédente, comprend certaines fonctions d'ordre nul; elle exclut pourtant encore les fonctions de croissance trop lente, et les fonctions trop irrégulières.

Le résultat obtenu est alors le suivant :

Théorème XIX. — *Les* c_ν *étant tels que* $\frac{\log g''(x)}{\log x}$ *ait une borne supérieure négative* $-K$, *les* a_ν *étant choisis arbitrairement, et* A *étant une constante supérieure à* $\sqrt{\frac{5}{2}}\,e^{\frac{8}{5K}-\frac{2}{5}}$, *il est infiniment probable que l'on ait, pour tout* r *assez grand,*

$$M(r) < AM_2(r)\sqrt{\log \omega_2(r)}.$$

Ce théorème comprend le précédent *comme* cas particulier. On peut résumer ces résultats en disant qu'en général l'ordre de grandeur de $M(r)$ ne dépasse pas celui de $M_2(r)\sqrt{\log \omega_2(r)}$. Il semble même qu'on puisse dire qu'en général l'ordre de grandeur de $M(r)$ est celui de $M_2(r)\sqrt{\log \omega_2(r)}$, et peut-être même que $M(r)$ est en général équivalent à $AM_2(r)\sqrt{\log \omega_2(r)}$, A désignant une constante. Mais ce point n'est pas démontré.

17. *Recherche de suite d'arguments abaissant l'ordre de* $M(r)$ *pour toutes les fonctions formées avec une suite suffisamment régulière de modules.* — Dans ce qui précède, nous avons considéré les modules c_ν comme donnés, sans nous demander dans quelle mesure cette donnée influait sur le choix d'une suite d'arguments de nature à réduire autant que possible la rapidité de croissance de $M(r)$. Il est clair que ce choix est dans une certaine mesure indépendant de la suite des modules; la réduction de l'ordre de grandeur de $M(r)$ provient en effet de ce que, quel que soit l'argument θ de z, la suite des arguments $\alpha_\nu + \nu\theta$ des termes de $f(z)$ définit des points se répartissant sur le cercle trigonométrique d'une manière à peu près uniforme, ou du moins de telle manière que leur centre de gravité soit voisin du centre du cercle; il se produit alors une compensation entre les vecteurs différemment orientés dont la somme représente $f(z)$.

Cette propriété est indépendante des modules. Mais la conclusion relative à l'abaissement de l'ordre de grandeur de $M(r)$ ne s'applique que si les modules forment une suite régulière. Dans le cas contraire, on peut en effet, quelle que soit la suite des α_ν, supposer que les termes pour lesquels $\alpha_\nu + \nu\theta_0$ (θ_0 étant une valeur de θ arbitrairement choisie) tombe dans une certaine région du cercle trigonométrique aient des coefficients c_ν assez grands pour l'emporter sur les autres; alors la compensation indiquée ne peut pas se produire, et $\mathrm{M}(r)$ est du même ordre de grandeur que $\mathrm{F}(r)$. Il n'existe donc aucune suite d'arguments ayant pour effet de réduire l'ordre de grandeur de $\mathrm{M}(r)$, quelle que soit la suite des modules des coefficients. Mais on peut penser que les suites d'arguments pour lesquelles, quel que soit θ, les points $\alpha_\nu + \nu\theta$ se répartissent d'une manière assez régulière sur le cercle trigonométrique, produiront un abaissement de l'ordre de grandeur de $\mathrm{M}(r)$ toutes les fois que la suite des modules sera régulière. C'est ce point que nous nous proposons de préciser.

En ce qui concerne la régularité des coefficients, nous ferons une hypothèse $\mathcal{R}'$ un peu plus restrictive que $\mathcal{R}$. Elle s'exprime par la formule

$$(\mathcal{R}') \qquad g'''(\xi) = [g''(\xi)]^{\frac{3}{2}} \frac{o(1)}{\sqrt{|\log g''(\xi)|}}.$$

On vérifie aisément, comme nous l'avons fait dans l'introduction pour la condition $\mathcal{R}$, que c'est bien une condition de régularité. D'autre part, elle exprime que pour un accroissement $d\xi$ de l'ordre de grandeur de

$$\frac{1}{\sqrt{g''(\xi)|\log g''(\xi)|}},$$

la variation relative de $g''(x)$ est négligeable; on en déduit aisément que la formule asymptotique (3) est valable, ε étant infiniment petit non seulement jusqu'au moment où les termes négligés seront infiniment petits par rapport à $(m\, r)$ et leur somme par rapport à $\mathrm{F}(r)$, mais jusqu'au moment où cette somme sera négligeable par rapport à $m(r)$.

Nous supposerons donc, dans la suite, la condition $\mathcal{R}'$ réalisée. En outre, la question de l'ordre de grandeur de $\mathrm{M}(r)$ ne pouvant se poser que lorsque $\omega(r)$ augmente indéfiniment, nous supposerons qu'il en est ainsi, c'est-à-dire que $a = g''(x)$ tend vers zéro. Mais il est clair que les résultats tels que le suivant « $\mathrm{M}(r)$ est, sous certaines conditions, au plus de l'ordre de grandeur de $M_2(r)\log\omega_2(r)$ » sont indépendants de cette hypothèse. Les raisonnements qui suivent s'appliquent en effet pour toute suite de valeurs de r pour laquelle $\omega_2(r)$ augmente indéfiniment, et si $\omega_2(r)$ est borné, $\omega(r)$ l'étant alors aussi d'après l'hypothése $\mathcal{R}'$, le résultat énoncé est banal.

Supposons donc a très petit et la condition $\mathcal{R}'$ réalisée; $f(z)$, à une erreur près très petite par rapport à $m_1(r)$, a la valeur

$$m_1(r)\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{i(\alpha_\nu+\nu\theta)e-\frac{a}{2}(\nu-x)^2}.$$

On peut d'ailleurs dans cette expression remplacer $m_1(r)$ par la quantité équivalente $m(r)$, et x par le rang n du terme maximum. Supposons alors que la somme

$$(63)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{i(\alpha_\nu+\nu\theta)-\frac{a}{2}(\nu-n)^2}$$

soit, quel que soit θ entre o et 2π et quel que soit l'entier positif n, inférieure en module à une certaine expression $\varphi(a)$ elle-même infiniment petite par rapport à $\frac{1}{\sqrt{a}}$ quand a tend vers zéro. Alors $|f(z)|$, et par suite $M(r)$, sont très petits par rapport à $\frac{m(r)}{\sqrt{a}}$, c'est-à-dire par rapport à $F(r)$. On voit donc qu'une condition très peu restrictive, et qui a toute chance d'être réalisée pour une suite d'arguments choisis au hasard, suffit pour produire l'abaissement de l'ordre de grandeur de $M(r)$ toutes les fois que les modules vérifient les conditions $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{D}$.

18. *Définition des suites $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.* — MM. Hardy et Littlewood ont montré que, si $\alpha_\nu = \nu^2\pi\alpha$, α étaat un nombre irrationnel dont le développement en fraction continue a ses quotients incomplets bornés, on a

$$(64)\qquad |e^{\pi i\alpha}z + e^{2^2\pi i\alpha}z^2 + \ldots + e^{p^2\pi i\alpha}z^p| < A\sqrt{p}, \quad \text{pour} \quad |z| \leqq 1,$$

A étant une constante indépendante de p et de z, fonction seulement de α. Comme d'ailleurs

$$(65)\qquad \begin{aligned} &e^{(n+1)^2\pi i\alpha}z^{n+1} + \ldots + e^{(n+p)^2\pi i\alpha}z^{n+p} \\ &= z^n e^{n^2\pi i\alpha}[e^{\pi i\alpha}(z.e^{2n\pi i\alpha}) + \ldots + e^{p^2\pi i\alpha}(z.e^{2n\pi i\alpha})^p], \end{aligned}$$

la somme de p termes consécutifs quelconques de la suite

$$e^{\nu^2 \pi i \alpha} z^\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

a sur la circonférence $|z| = 1$ même module maximum que la somme des p premiers. Ce module maximum est donc inférieur à $A\sqrt{p}$.

Nous appellerons suite de Hardy et Littlewood, ou suite $\mathcal{H}$, toute suite d'arguments α_ν pour laquelle on ait, pour $|z| = 1$,

$$|e^{i\alpha_{n+1}} z^{n+1} + \ldots + e^{i\alpha_{n+p}} z^{n+p}| < A\sqrt{p},$$

A étant indépendant de n, de p, et de l'argument de z. Nous appellerons suite $\mathcal{H}'$ toute suite pour laquelle la somme considérée est majorée, pour $|z| = 1$, par une expression indépendante de n, p, et de l'argument de z, et de la forme $p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, ε tendant vers zéro pour p infini (1).

On peut montrer, par des raisonnements analogues à ceux des n^{os} 14 et 16, que, si l'on choisit au hasard une suite d'arguments, la probabilité d'obtenir une suite $\mathcal{H}$ est nulle, celle d'obtenir une suite $\mathcal{H}'$ étant égale à l'unité. L'existence des suites $\mathcal{H}'$ est donc évidente *a priori*, par le calcul des probabilités, tandis que celle des suites $\mathcal{H}$ résulte seulement des raisonnements très difficiles développés par MM. Hardy et Littlewood (2).

Un exemple de suite $\mathcal{H}'$ semble être obtenu en prenant

$$e^{i\alpha_\nu} = \mu(\nu),$$

$\mu(\nu)$ étant la fonction arithmétique connue pour laquelle

$$\sum \frac{\mu(\nu)}{\nu^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Le fait que cette fonction soit nulle pour certains entiers ν, dont la densité moyenne est $1 - \frac{6}{\pi^2}$, et qu'en conséquence certains

(1) Précisons bien pour la suite que ε désigne une quantité tendant vers zéro suivant une loi sur laquelle on ne suppose rien.

(2) On peut observer que des modifications $\delta\alpha_\nu$ des arguments telles que $\Sigma\,|\delta\alpha_\nu|$ soit borné ne modifient pas le caractère d'une suite $\mathcal{H}$. Il suffit donc d'avoir formé une telle suite pour être assuré qu'il en existe qui dépendent d'une infinité dénombrable de paramètres.

termes manqueront dans les sommes considérées, ne change rien d'essentiel. Pour les autres termes, on sait que les progrès récents de la théorie de la fonction de Riemann conduisent à considérer que la fréquence des deux valeurs $+1$ et -1 que prend $\mu(\nu)$ est assimilable à celle qui résulterait d'un tirage au sort, la différence des réalisations des deux cas sur p nombres consécutifs pouvant sans doute dépasser l'ordre de grandeur de $\sqrt{p}$, mais en restant de la forme $p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Un résultat analogue s'appliquerait à la répartition sur le cercle trigonométrique des valeurs de $\mu(\nu)e^{\nu\theta i}$, quel que soit θ rationnel ou irrationnel par rapport à π (l'énoncé précis n'étant naturellement pas le même dans les deux cas; dans le premier on n'aurait le choix qu'entre les sommets d'un polygone régulier tandis que dans le second on peut calculer la probabilité relative à un arc quelconque et la calculer comme s'il s'agissait de points choisis au hasard sur toute la circonférence). Alors la suite des arguments $+\pi i$ et $-\pi i$ des valeurs de $\mu(\nu)$, compte tenu des lacunes, aurait tous les caractères d'une suite $\mathcal{H}'$ et les conclusions que nous allons établir pour les fonctions entières formées avec des suites $\mathcal{H}'$ s'appliqueraient aux séries entières du type

$$\Sigma \mu(\nu) c_\nu z^\nu.$$

Mais, comme on le sait, une démonstration rigoureuse dépend de la démonstration de l'hypothèse de Riemann sur $\zeta(s)$.

19. *Propriétés des suites $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.* — Proposons-nous de mettre en évidence l'abaissement de l'ordre de grandeur du maximum $\varphi(a)$ de la somme (63) pour les suites d'arguments $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

Groupons à cet effet les termes de cette somme en groupes de p termes consécutifs. La somme des modules de ces termes étant asymptotiquement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}h^2} dh = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sim \omega(r),$$

l'erreur commise dans un tel groupement en remplaçant tous les modules $c_\nu r^\nu$ par l'un d'entre eux est majorée au point de vue asymptotique par l'expression

$$ap \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}h^2} |h| dh = 2p,$$

du moins si p est petit par rapport à ω; on peut alors en effet limiter l'erreur commise sur chaque terme par celle provenant d'une variation de h égale à p, et calculer cette erreur par le premier terme de la formule de Taylor; les termes correspondant aux grandes valeurs de $h\sqrt{a}$, pour lesquelles cette approximation est défectueuse, sont sans influence sur l'ensemble.

D'autre part, d'après la définition des suites $\mathcal{H}$, dans chaque groupe de termes ainsi modifiés, et par suite dans l'ensemble de tous les termes, les arguments ont pour effet de multiplier la somme par un facteur au plus égal en module à $\frac{A}{\sqrt{p}}$ $\left(\text{ou } A p^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right.$ pour les suites $\left.\mathcal{H}'\right)$. La somme modifiée, dans le cas des suites $\mathcal{H}$, est donc de l'ordre de grandeur de $\frac{A\omega}{\sqrt{p}}$ au plus, et la somme primitive est au plus de l'ordre de

$$2p + \frac{A\omega}{\sqrt{p}}.$$

En prenant p de l'ordre de grandeur de $\omega^{\frac{2}{3}}$, on voit que les arguments abaissent au moins l'ordre de grandeur de la somme de ω à $\omega^{\frac{2}{3}}$ $\left(\text{pour les suites } \mathcal{H}, \text{ et } \omega^{\frac{2}{3}+\varepsilon} \text{ pour les suites } \mathcal{H}'\right)$.

On peut d'ailleurs obtenir plus de précision par des groupements successifs comprenant, d'abord des groupes de p_1 termes, puis des groupes de p_2 termes, et ainsi de suite, chacun des nombres p_1, p_2, ... étant multiple du précédent. Les termes étant supposés d'abord égaux en module dans chaque groupe de p_1 termes, il est facile de limiter l'erreur commise en les égalant dans les groupes de p_2 termes. L'erreur relative $\frac{2p_2}{\omega}$ s'applique ici, non seulement à chaque terme, mais à chaque groupe de p_1 termes qui restent groupés. L'erreur cherchée est donc au plus, dans le cas des suites $\mathcal{H}$, de l'ordre

$$\frac{A\omega}{\sqrt{p_1}}\,\frac{2p_2}{\omega} = 2A\frac{p_2}{\sqrt{p_1}},$$

et l'on trouve que la somme primitive (63) est au plus de l'ordre de

$$2A\left(p_1 + \frac{p_2}{\sqrt{p_1}} + \frac{p_3}{\sqrt{p_2}} + \ldots + \frac{p_h}{\sqrt{p_{h-1}}}\right) + \frac{A\omega}{\sqrt{p_h}}. \tag{66}$$

Prenons alors p_1 de l'ordre de grandeur de $\omega^{\frac{1}{2}}$, p_2 de l'ordre de grandeur de $\omega^{\frac{3}{4}}$, p_3 de l'ordre de grandeur de $\omega^{\frac{7}{8}}$, et ainsi de suite. On trouve, à condition que h soit assez grand, un ordre de grandeur inférieur à $\omega^{\frac{1}{2}+\eta}$, η étant un nombre positif arbitrairement petit; en d'autres termes la somme (63), qui ne peut sûrement croître moins vite que $\sqrt{\omega}$, est de la forme $\omega^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Ce résultat s'étend sans modification aux suites $\mathcal{H}'$. Pour les suites $\mathcal{H}$, on peut préciser un peu plus, en prenant par exemple $p_i = 10^{2i}$, et pour h la partie entière de $\frac{1}{2}\log_{10}\omega$, de sorte que $p_h = 10^{2h} = \omega'$ est de l'ordre de grandeur de ω. La somme (66) s'écrit alors

$$20\,\mathrm{A}\sqrt{\omega'}\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{h-1}}\right) + \mathrm{A}\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\sqrt{\omega},$$

de sorte que la somme (66) est de l'ordre de grandeur de $\mathrm{A}\sqrt{\omega}$ et que par suite la suite de la somme (63) et son maximum $\varphi(a)$ sont au plus de cet ordre de grandeur.

L'ordre de grandeur de $\mathrm{M}(r)$ est d'ailleurs au plus égal à celui de $m(r)\varphi(a)$, et $\mathrm{M}_2(r)$ est du même ordre de grandeur que $m(r)\sqrt{\omega}(r)$. Par suite :

Théorème XX. — *Pour une suite de module c_ν vérifiant la condition $\mathcal{R}'$, et une suite d'arguments α_ν vérifiant la condition $\mathcal{H}$, $\mathrm{M}(r)$ est du même ordre de grandeur que sa borne inférieure $\mathrm{M}_2(r)$* $\left(\text{c'est-à-dire que le rapport } \frac{\mathrm{M}(r)}{\mathrm{M}_2(r)} \text{ est borné}\right)$.

Théorème XXI. — *Pour une suite de modules c_ν vérifiant la condition $\mathcal{R}'$ et une suite d'argument vérifiant la condition $\mathcal{H}'$, $\mathrm{M}(r)$ de la forme $\mathrm{M}_2(r)\,\omega_2^{\varepsilon}(r)$, ε tendant vers zéro pour ω_2 infini.*

Pour la raison indiquée au n° 17, nous n'avons pas fait mention de la condition $\mathcal{D}$, bien qu'elle intervienne dans nos raisonnements. Ces théorèmes sont toujours vrais, mais c'est seulement si cette condition est vérifiée qu'ils impliquent un abaissement de l'ordre de grandeur de $\mathrm{M}(r)$ par l'effet des arguments. Une suite d'argu-

ments choisis au hasard ayant toute chance d'être une suite $\mathcal{H}'$, mais non une suite $\mathcal{H}$, ces théorèmes impliquent que l'ordre de grandeur probable de $M(r)$ soit de la forme $M_2(r)\,\omega_2^{\varepsilon}(r)$, ε tendant vers zéro; c'est bien ce qui résulte du n° 16, d'après lequel, d'une manière plus précise, on peut sans doute écrire $\sqrt{\log\omega_2(r)}$ au lieu de $\omega_2^{\varepsilon}(r)$.

20. *Exemples de fonctions particulières.* — Considérons d'abord la fonction

$$(67)\qquad f_1(z)=\Sigma q^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2\nu+1},\qquad (\nu=0,1,\ldots,\infty;\ |q|<1).$$

Cette fonction ne vérifie pas la condition $\mathcal{D}$; $m(r)$ et $F(r)$ étant du même ordre de grandeur, l'introduction d'arguments quelconques est sans effet sur l'ordre de grandeur de $M(r)$. En particulier, en modifiant l'argument de q sans changer son module, on ne modifie pas l'ordre de grandeur de $M(r)$.

On le vérifie aisément en remarquant que la fonction

$$(68)\qquad \Phi(z)=f_1(z)+f_1\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2\nu+1},$$

qui pour z infini diffère infiniment peu de $f(z)$, est une fonction thêta de $\log z$. On a la relation bien connue

$$(69)\qquad \Phi(qz)=qz^2\Phi(z),$$

ou, si $\overline{M}(r)$ désigne le module maximum de $\Phi(z)$ pour $|z|=r$,

$$(70)\qquad \overline{M}(|q|r)=|q|r^2\overline{M}(r).$$

Si donc on donne à q deux déterminations différentes de même module, on obtient deux déterminations de $\overline{M}(r)$ dont le rapport ne change pas par le changement de r en $|q|r$; c'est une fonction périodique de $\log r$. On vérifie bien ainsi que $M(r)$, qui diffère infiniment peu de $\overline{M}(r)$, est d'un ordre de grandeur qui ne dépend que du module de q, et non de son argument.

Considérons d'autre part la fonction

$$(71)\qquad f(z)=\Sigma e^{\nu^2 i\alpha}\frac{z^\nu}{\nu!}.$$

Si $\frac{\alpha}{\pi}$ est un nombre irrationnel ayant la propriété indiquée au n° 18, la suite des arguments est une suite $\mathcal{H}$, de sorte que $M(r)$ est, pour cette fonction, de l'ordre de grandeur de $M_2(r)$, c'est-à-dire de $r^{-\frac{1}{4}}e^r$.

Cette fonction a pour dérivée l'expression

$$f'(z) = \Sigma e^{(\nu+1)^2 i\alpha}\frac{z^\nu}{\nu!} = e^{i\alpha}f(ze^{2i\alpha}). \tag{72}$$

Par suite $f(z)$, $f'(z)$, et toutes les dérivées successives de $f(z)$, ont pour $|z| = r$ le même module maximum $M(r)$.

Or $M'(r)$ est la valeur de $|f'(z)|$ au point du cercle $|r| = r$ où $f(z)$ atteint son maximum $M(r)$. Par suite

$$M'(r) \leqq M(r), \tag{73}$$

de sorte que $M(r)e^{-r}$ est une fonction monotone décroissante.

On a ainsi, dans le cas de la fonction (71), des renseignements assez nombreux sur la croissance de $M(r)$, dont l'ordre de grandeur est assez bien connu, et qui croît nécessairement d'une manière assez régulière. Compte tenu du théorème de M. Hadamard d'après lequel $\log M(r)$ est une fonction convexe de $\log r$, on voit d'une part que $r\frac{M'(r)}{M(r)}$ est une fonction croissante et inférieure à r, d'autre part que $r^{\frac{1}{4}}e^{-r}M(r)$ est compris entre deux nombres positifs bornés.

Pour terminer cette étude, revenons sur le point admis sans démonstration au n° 10, à propos de la formule (33). Nous considérions les nombres ρ_ν définis par

$$\rho_\nu\frac{M'(\rho_\nu)}{M(\rho_\nu)} = \nu, \tag{74}$$

et il s'agissait de trouver l'exemple d'une fonction pour laquelle on ait à la fois

$$M(r) = F(r)o(1), \qquad \rho_{\nu+1} = \rho_\nu O(1). \tag{75}$$

La première de ces conditions est sûrement vérifiée, d'après le théorème XX, pour les fonctions dont les modules vérifient les conditions $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{D}$, tandis que leurs arguments forment une suite $\mathcal{H}$. Alors la différence

$$\log M(r) - \log M_2(r) = \Phi(r)$$

est bornée.

Or des conditions de régularité assez peu restrictives, jointes à la condition $\mathcal{O}$, suffisent pour affirmer que la variation de $\frac{rM_2'(r)}{M_2(r)}$ ne peut être bornée que dans un intervalle où la variation de $\log r$ soit bornée $\Big($ainsi, dans le cas de la fonction exponentielle, cette fonction diffère infiniment peu de $r - \frac{1}{4}$; il faut même que la variation de r soit bornée$\Big)$.

Si la même conclusion ne s'appliquait pas à $\frac{rM'(r)}{M(r)}$, cela impliquerait que dans certains intervalles (r', r'') où la variation de $\log r$ serait arbitrairement grande, la croissance de $r\frac{M_2'(r)}{M_2(r)}$ serait compensée par la décroissance de $r\Phi'(r)$; on pourrait donc, en divisant s'il y a lieu l'intervalle (r', r'') en intervalles partiels dans chacun desquels $r\Phi'(r) - 1$ et $r\Phi'(r) + 1$ auraient un signe constant, trouver un intervalle où la variation de $\log r$ serait arbitrairement grande et où $r\Phi'(r)$ serait, soit constamment $\geqq 1$, soit constamment $\leqq 1$. Cela est en contradiction avec le fait que $\Phi(r)$ soit borné.

La fonction $r\frac{M'(r)}{M(r)}$, dans les conditions où nous nous plaçons, ne peut donc être comprise entre ν et $\nu + 1$ que dans un intervalle $(\rho_\nu, \rho_{\nu+1})$ tel que $\frac{\rho_{\nu+1}}{\rho_\nu}$ soit borné. Cela montre bien que les hypothèses (75) sont compatibles. Les hypothèses du théorème XIV sont donc aussi compatibles; elles sont vérifiées en particulier pour la fonction (71) si $\frac{\alpha}{\pi}$ vérifie la propriété considérée par MM. Hardy et Littlewood et rappelée au n° 18.

Bibliographie.

1] BRINKMEIER. — Ueber das Masz der Bestimmtheit des Wachstums einer ganzen transzendenten Funktion durch die absoluten Beträge der Koeffizienten ihrer Potenzreihe (*Mathematische Annalen*, t. 96, 1927, p. 108-118).

[2] HARDY (G. H) and LITTLEWOD (J. E.). — Some Problems of diophantine approximation (*Acta mathematica*, t. 37, 1914, p. 155-239).

[3] LITTLEWOOD (J. E). — A theorem on power series (*Proceedings of the London Mathematical society*, 2e série, t. 23, p. 94-103).

[4] LÉVY (Paul). — Trois Notes présentées à l'Académie des Sciences : *a*, le 21 décembre 1925; *b*, le 22 mai 1929; *c*, le 17 février 1930.

[5] VALIRON. — Note présentée à l'Académie des Sciences, le 18 janvier 1926.

[6] VALIRON. — Les théorèmes généraux de M. Borel dans la théorie des fonctions entières (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, p. 219 à 253).

[7] WIMAN (A). — Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylor'schen Reihe (*Acta mathematica*, t. 37, 1914 p. 305-326).

Voir aussi sur le même sujet un Mémoire de *G. Pólya* (*Acta mathematica*, t. 40. p. 311-319).

[8] LE ROY (E.). — Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXIV, 1900, p. 245-268).

[9] DENJOY (A.). — Sur les produits canoniques d'ordre infini (*Thèse*, et *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. VI, 1910, p. 1-136; notamment page 91-95).

[10] VALIRON (G.). — Sur le calcul approché de certaines fonctions entières (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XLII, 1914, p. 252-264).

Ces trois derniers Mémoires, sur lesquels notre attention a été attirée depuis la rédaction du présent travail, introduisent des conditions de régularité à peu près équivalentes à notre condition R et en développant les conséquences.

Indiquons enfin que dans la première partie du présent travail, au bas de la page 41, nous avons cité incomplètement les résultats de M. Valiron, qui a considéré aussi les inégalités plus précises utilisant les logarithmes itérés.