BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PETROVITCH

Propriétés arithmétiques d’une classe de nombres rationnels

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 27-32

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__27_1>

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES D'UNE CLASSE DE NOMBRES RATIONNELS;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

Désignons par 9_k l'entier qu'on obtient en écrivant le chiffre 9 k fois consécutivement, par exemple

$$9_1 = 9, \qquad 9_2 = 99, \qquad 9_3 = 999, \qquad \text{etc.}$$

L'Arithmétique élémentaire enseigne des propriétés curieuses de nombres ainsi composés et de leurs combinaisons. J'y ajouterai quelques propriétés que je crois nouvelles.

I. Soient

$$(1) \qquad a,\ b,\ c,\ \ldots,\ g,$$

$$(2) \qquad m,\ n,\ p,\ \ldots,\ s$$

deux suites données d'entiers positifs, les entiers (1) étant premiers entre eux, et soit h un entier positif variable. L'expression

$$(3) \qquad N = \frac{9_{(m+1)ah}}{9_{ak}} \times \frac{9_{(n+1)bh}}{9_{bk}} \cdots \frac{9_{(s+1)gh}}{9_{gh}}$$

représente un entier à λh chiffres, où

$$(4) \qquad \lambda = ma + nb + \ldots + sg$$

jouissant de la propriété suivante :

Désignons par $P(k)$ l'entier positif indiquant de combien de manières l'entier k peut s'écrire sous la forme

$$K = ax + by + \ldots + gt, \tag{5}$$

lorsque $x, y, \ldots, t$ parcourrent la suite de valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0, 1, 2, \ldots, m, \\ y = 0, 1, 2, \ldots, n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t = 0, 1, 2, \ldots, s. \end{array}\right. \tag{6}$$

Dès que h surpasse une certaine limite déterminée par la suite (1), *l'entier formé du groupe de chiffres significatifs de* N, *commençant par le* $(kh+1)^{ième}$ *et terminé par le* $(k+1)h^{ième}$ *chiffre de* N, *coïncide avec le nombre* $P(k)$, *et cela pour toute valeur de k ne surpassant pas λh.*

Pour le faire voir, je considère le polynome

$$V(x, \alpha, \mu) = \frac{x^{(\mu+1)\alpha} - 1}{x^\alpha - 1} = 1 + x^\alpha + x^{2\alpha} + \ldots + x^{\mu\alpha}, \tag{7}$$

α et μ étant deux entiers positifs arbitraires. On a

$$V(10^{-h}, \alpha, \mu) = 10^{-m\alpha h}\, \frac{9_{(\mu+1)\alpha h}}{9_{\alpha h}} \tag{8}$$

et, par suite,

$$N = 10^{\lambda h} W(10^{-h}), \tag{9}$$

où $W(x)$ désigne le polynome de degré λ:

$$W(x) = V(x, a, m) \times V(x, b, n) \ldots V(x, g, s). \tag{10}$$

Or, le coefficient de x^α dans le polynome $W(x)$ est précisément le nombre désigné par $P(k)$. Si donc l'on désigne par l_k le nombre de chiffres de l'entier $P(k)$, et si l'on prend pour h l'une quelconque parmi les limites supérieures de $\log P(k)$, on aura

$$W(10^{-h}) = 0,\underbrace{00\ldots0}_{h-l_1 \text{ zéros}}P(0)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_2 \text{ zéros}}P(1)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_3 \text{ zéros}}P(2)0\ldots0P(\lambda h), \tag{11}$$

et comme $h - l_k \geqq 0$, le résultat énoncé se trouve démontré.

Laguerre (¹) a établi une formule générale donnant une valeur

---

(¹) *Sur la partition des nombres* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. V, 1877; *Œuvres*, t. I, p. 218-220).

approchée du nombre $P(k)$ pour un système donné $(k, a, b, c, \ldots, g)$ et pour tous les systèmes possibles $(x, y, \ldots, t)$, avec l'erreur commise ayant une limite supérieure *indépendante de k*.

Dans le cas, par exemple, de l'équation à deux inconnues

$$k = ax + by,$$

la formule de Laguerre fournit

$$P(k) = \frac{k}{ab} + \delta,$$

où la valeur absolue de δ est plus petite que 1; pour l'équation à trois inconnues

$$k = ax + by + cz,$$

elle fournit

$$P(k) = \frac{k^2}{2abc} + \frac{k(a+b+c)}{2abc} + \delta,$$

le terme complémentaire δ étant en valeur absolue plus petit qu'une certaine quantité fixe pour tous les k.

Ces formules permettent d'assigner à h l'une des valeurs que suppose la proposition précédente.

Remarquons que

$$(12) \qquad \frac{9^{(\mu+1)\alpha h}}{9^{\alpha h}}$$

est l'entier à $\mu\alpha h$ chiffres ayant pour valeur

$$(13) \qquad 1\underbrace{00\ldots0}_{\alpha h - 1 \text{ zéros}}1\underbrace{00\ldots0}_{\alpha h - 1 \text{ zéros}}1\underbrace{00\ldots0}_{\alpha h - 1 \text{ zéros}}10\ldots,$$

où le groupe de chiffres $00\ldots01$ se répète μ fois. Ceci permet de calculer le nombre N en additionnant les unités convenablement distribuées et d'imaginer même un appareil simple effectuant rapidement ce calcul.

Pour l'équation, par exemple

$$3x + 2y = k,$$
$$0 \leqq x \leqq 10, \qquad 0 \leqq y \leqq 9,$$

comme le nombre

$$\log\left(1 + \frac{\lambda}{ab}\right) = \log\left(1 + \frac{48}{6}\right) = \log 9$$

est plus petit que 1, on peut prendre $h = 1$, ce qui fournit

$$N = 10111121222232333343433343334\ldots$$

et le nombre $P(k)$ coïncide avec le $(k+1)^{\text{ième}}$ chiffre de N. Ainsi, l'équation

$$3x + 2y = 19$$

a exactement trois solutions en $x \leqq 10$ et $y \leqq 9$: ce nombre est bien indiqué par le vingtième chiffre de N.

II. Considérons le nombre rationnel

$$S_{m,h} = M_{m,h} Q_h, \tag{14}$$

où

$$M_{m,h} = \frac{1}{9^h} + \frac{1}{9^{2h}} + \ldots + \frac{1}{9^{mh}}, \tag{15}$$

$$Q_h \quad = 10^{-h} \frac{9^{2h}}{9 \cdot 9^h} \tag{16}$$

et où m et h sont deux entiers positifs arbitraires. Convertis en fractions décimales, $M_{m,h}$ est une fraction périodique *simple* ayant une période de mh chiffres, et Q_h est une fraction périodique *mixte* dont la partie non périodique et la période ont chacune h chiffres. Le nombre $S_{m,h}$ lui-même, converti en fraction décimale, sera donc une fraction périodique *mixte* dont la partie non périodique a h chiffres et la période mh chiffres.

Partageons la suite S de décimales de $S_{m,h}$ formant l'ensemble de sa partie non périodique et la première période, en tranches successives T_1, T_2, ..., T_{m+1} à h chiffres, de sorte que la tranche T_k ($k = 1, 2, \ldots, m+1$) commence par le $[(k-1)h+1]^{\text{ième}}$ et se termine par la $kh^{\text{ième}}$ décimale de $S_{m,h}$, et considérons les tranches $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Dès que h surpasse une certaine valeur, l'entier formé du groupe de chiffres significatifs de la tranche T_k *coïncide avec le nombre de diviseurs de k autres que* 1 *et k, et cela pour toute valeur de* $k \leqq m$.

Pour le faire voir, je remarque que $S_{m,h}$ représente la valeur numérique que prend pour $x = 10^{-h}$ la fraction rationnelle

$$F(x) = f(x) - (x)\varphi, \tag{15}$$

où $f(x)$ est la série de Lambert limitée

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^m}{1-x^m} \tag{16}$$

et

$$\varphi(x) = \frac{x(x+1)}{1-x} = x + 2(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots). \tag{17}$$

D'après la propriété bien connue de la série de Lambert, le coefficient $N(k)$ du développement

$$F(x) = N(1)x + N(2)x^2 + N(3)x^3 + \ldots \tag{18}$$

coïncidera avec le nombre de diviseurs de k autres que 1 et k.

Prenons pour h un entier quelconque tel que 10^h ne soit inférieur au nombre de diviseurs d'aucun entier $k < m$. Le produit $10^{-hk}N(k)$ sera alors le nombre $0,00\ldots0N(k)$ où la partie significative $N(k)$, composée de l_k chiffres, est précédée d'un nombre de zéros égal à $h - l_k$ et toujours positifs pour $k = 1, 2, \ldots, m$. Il s'ensuit que

$$F(10^{-h}) = 0,\underbrace{00\ldots0}_{h-l_1 \text{ zéros}}N(1)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_2 \text{ zéros}}N(2)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_3 \text{ zéros}}N(3)0\ldots, \tag{19}$$

ce qui démontre le résultat énoncé.

En désignant comme *lacune* toute tranche T_k formée exclusivement de zéros, on en tire le corollaire suivant :

Le nombre de lacunes que présente l'ensemble de k premières tranches $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *de la période de* $S_{m,a}$ *est égal au nombre des nombres premiers inférieurs à k, et cela pour toute valeur de k plus petite ou égale à m.*

Si l'on remarque que

$$\frac{1}{9kh} = 0,\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1,$$

$$10^{-h}\frac{9_{2h}}{9 \times 9_h} = 0,\underbrace{0\ldots0}_{h-1}1\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\ldots,$$

on voit que la suite S se calculerait, pour tout m et h donnés, par la seule addition d'unités, par exemple à l'aide d'un appareil simple à imaginer.

Le nombre h remplissant les conditions précédentes peut être déterminé de diverses manières. Comme l'on a

$$N(k) < k < m,$$

on peut prendre pour h un entier quelconque supérieur ou égal à m.

On peut aussi le choisir de la manière suivante : en prenant pour m une factorielle

$$m = 1.2.3 \ldots \lambda,$$

on s'assure par des considérations arithmétiques élémentaires que le nombre de diviseurs (autres que 1 et k) d'un entier $k \leqq m$ ne surpasse jamais $2^{\lambda-1}$, et comme

$$2^{\lambda-1} < 10^{\frac{\lambda-1}{3}},$$

on peut prendre pour h un entier quelconque supérieur ou égal à $\frac{\lambda-1}{3}$.

Je rappelle aussi l'inégalité de M. Wigert :

$$N(k) < 2^{(1+\varepsilon)\frac{\log k}{\log\log k}},$$

valable pour $\varepsilon > 0$ et arbitraire, pourvu que k soit assez grand.

On trouve, par exemple, pour $m = 100$ (ce qui fournit $h \leqq 2$):

$$S_{100,2} = 0,00000001000200020102000400020203000400040002000601\ldots.$$

Les 20 premières tranches à deux chiffres contiennent 9 lacunes, les 100 premières tranches en contiennent 26, indiquant qu'il y a 9 nombres premiers inférieurs à 20, qu'il y en a 26 inférieurs à 100, etc.

Le même procédé, appliqué à diverses fonctions rationnelles analogues aux précédentes, conduit à d'autres nombres entiers ou rationnels, composé de chiffre 9 et jouissant des propriétés arithmétiques intéressantes.