BULLETIN DE LA S. M. F.

HADAMARD

Sur une propriété fonctionnelle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 59-60
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__59_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ FONCTIONNELLE DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN;

PAR M. HADAMARD.

M. Jensen a montré ([1]) que la fonction $\zeta(s)$ vérifie identiquement la relation

$$(1)\quad 2^{1-s} = (s-1)[\zeta(s)-1] - \frac{(s-1)s}{1.2}[\zeta(s+1)-1] + \frac{(s-1)s(s+1)}{1.2.3}[\zeta(s+2)-1] - \ldots.$$

La méthode par laquelle il arrive à cette formule peut être variée de plusieurs manières, de sorte qu'on obtient aisément les nouvelles relations suivantes :

$$(2)\quad 1 = (s-1)[\zeta(s)-1] + \frac{(s-1)s}{1.2}[\zeta(s+1)-1] + \frac{(s-1)s(s+1)}{1.2.3}[\zeta(s+2)-1] + \ldots,$$

puis

$$(3)\quad 1-\zeta(s)(1-2^{1-s}) = \frac{s}{1}\,\frac{\zeta(s+1)}{2^{s+1}} - \frac{s(s+1)}{1.2}\,\frac{\zeta(s+2)}{2^{s+2}} + \frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\,\frac{\zeta(s+3)}{2^{s+3}} - \ldots,$$

$$(4)\quad \zeta(s)(1-2^{1-s}) = \frac{s}{1}\,\frac{\zeta(s+1)}{2^{s+1}} + \frac{s(s+1)}{1.2}\,\frac{\zeta(s+2)}{2^{s+2}} + \frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\,\frac{\zeta(s+3)}{2^{s+3}} + \ldots.$$

Je n'insisterai pas sur la formule (2), toute semblable à celle de M. Jensen, non plus que sur certaines combinaisons auxquelles on pourrait être conduit en les considérant simultanément ([2]).

([1]) *Comptes rendus*, t. CIV, 1887, p. 1156.

([2]) En utilisant la relation qui existe entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$ on formerait d'autres identités dans lesquelles, aux seconds membres, les arguments de ζ successifs seraient en progression arithmétique *décroissante*.

Mais les formules (3) et (4) présentent une particularité qui me paraît digne d'attirer l'attention.

Chacune d'elles suffit [1] à caractériser la fonction $\zeta(s)$.

D'une manière plus précise :

Toute fonction ζ *qui vérifie la relation* (3) *et est, en outre, telle que*

$$\lim_{n=+\infty} \zeta(s+n) = 1 \tag{5}$$

coïncide avec la fonction de Riemann.

Il en est de même de toute fonction qui vérifie la relation (4) *et la condition* (5).

Pour démontrer ce double résultat, il suffit de remarquer tout d'abord que, dans la formule (4), tous les coefficients du second membre sont positifs. Cette formule est dès lors susceptible de fournir [lorsqu'on fait intervenir la condition (5)] une expression de la fonction considérée, expression toute théorique, il est vrai, et que je n'ai pu réussir jusqu'ici à former effectivement, mais dont l'existence suffit à établir notre conclusion. La convergence de cette expression est une conséquence de la circonstance qui vient d'être notée, relativement aux signes du second membre de (4).

Cette convergence entraîne, d'autre part, celle de l'expression analogue obtenue en partant de (3), le premier calcul étant *majorant* du second.

La démonstration est donc complète, et nous avons ainsi deux nouvelles définitions de $\zeta(s)$, toutes parallèles à la définition bien connue de $\Gamma(s)$ fondée sur les propriétés fonctionnelles de cette quantité.

---

(1) Je n'ai pas jusqu'ici décidé d'une manière certaine si les formules (1) et (2) sont ou non dans le même cas.