BULLETIN DE LA S. M. F.

POTRON

Sur une formule générale d'interpolation

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 52-60

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__52_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE FORMULE GÉNÉRALE D'INTERPOLATION;

Par M. Potron.

1. M. Borel a démontré (1) le théorème suivant :

Soit $\varphi_{p,q}(x)$ (p *et* q *étant deux nombres entiers et* $p \leq q$) *une fonction égale à* 0 *pour* $0 \leq x \leq \frac{p-1}{q}$ *et pour* $\frac{p+1}{q} \leq x \leq 1$, *à* $qx - p + 1$ *pour* $\frac{p-1}{q} \leq x \leq \frac{p}{q}$, *à* $-qx + p + 1$ *pour* $\frac{p}{q} \leq x \leq \frac{p+1}{q}$; *soit* $P_{p,q}(x)$ *un polynome tel que l'on ait, entre* 0 *et* 1, $|\varphi_{p,q}(x) - P_{p,q}(x)| < \frac{1}{q^2}$; *si* $f(x)$ *désigne une fonction définie et continue entre* 0 *et* 1; *si* ε_q *est un nombre tel que l'inégalité* $|x_1 - x_2| < \frac{1}{q}$ *entraîne partout, entre* 0 *et* 1, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_q$; *on a toujours, entre* 0 *et* 1,

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x) \right| < \varepsilon_q + M \frac{q+1}{q^2},$$

M *étant la limite supérieure de* $f(x)$ *entre* 0 *et* 1. Je me propose de donner une expression générale des polynomes $P_{p,q}(x)$.

2. L'équation de la ligne brisée $y = \varphi_{p,q}(x)$ peut, d'après une

(1) *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Chap. IV, p. 82.

formule de M. S. Bernstein (¹), s'écrire

$$y = \sum_{h=0}^{h=q} A_h \left| x - \frac{h}{q} \right|,$$

$$A_0 = \frac{1}{2}\left[\varphi_{p,q}(1) + q\,\varphi_{p,q}\left(\frac{1}{q}\right) - (q-1)\,\varphi_{p,q}(0)\right],$$

$$A_h = \frac{q}{2}\left[\varphi_{p,q}\left(\frac{h+1}{q}\right) + \varphi_{p,q}\left(\frac{h-1}{q}\right) - 2\varphi_{p,q}\left(\frac{h}{q}\right)\right], \qquad h = 1, 2, \ldots, q-1,$$

$$A_q = \frac{1}{2}\left[\varphi_{p,q}(0) + q\,\varphi_{p,q}\left(\frac{q-1}{q}\right) - (q-1)\,\varphi_{p,q}(1)\right].$$

En appliquant ces formules et remarquant que

$$\varphi_{p,q}\left(\frac{h}{q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } h \neq p, \\ 1, & \text{si } h = p, \end{cases}$$

on trouve

$$\varphi_{0,q}(x) = -\frac{q-1}{2}|x| + \frac{q}{2}\left|x - \frac{1}{q}\right| + \frac{1}{2}|x-1|,$$

$$\varphi_{p,q}(x) = \frac{q}{2}\left|x - \frac{p-1}{q}\right| - q\left|x - \frac{p}{q}\right| + \frac{q}{2}\left|x - \frac{p+1}{q}\right|, \qquad p = 1, 2, \ldots, q-1,$$

$$\varphi_{q,q}(x) = \frac{1}{2}|x| + \frac{q}{2}\left|x - \frac{q-1}{q}\right| - \frac{q-1}{2}|x-1|.$$

Si je remplace chacune des expressions $\left|x - \frac{k}{q}\right|$ par un polynome $\Pi_k(x)$ tel que l'on ait, entre 0 et 1,

$$\left|\Pi_k(x) - \left|x - \frac{k}{q}\right|\right| < \frac{1}{2q^2},$$

les expressions obtenues seront les polynomes $P_{p,q}(x)$ cherchés, car l'erreur commise sur chaque second membre sera toujours en valeur absolue $< \frac{1}{q^2}$. On aura donc

$$(1) \qquad \begin{cases} P_{0,q} = -\frac{q-1}{2}\Pi_0 + \frac{q}{2}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_q, \\ P_{p,q} = \frac{q}{2}(\Pi_{p-1} + \Pi_{p+1}) - q\,\Pi_p, \qquad p = 1, 2, \ldots, q-1, \\ P_{q,q} = \frac{1}{2}\Pi_0 + \frac{q}{2}\Pi_{q-1} - \frac{q-1}{2}\Pi_q. \end{cases}$$

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIII, 1905, p. 33.

3. Pour déterminer $\Pi_k(x)$ je pose, suivant une remarque de M. Lebesgue (¹),

$$\left(x-\frac{k}{q}\right)^2 = 1+z, \qquad \left|x-\frac{k}{q}\right| = \sqrt{\left(x-\frac{k}{q}\right)^2} = \sqrt{1+z}.$$

Comme x et $\frac{k}{q}$ sont compris entre o et 1, il en est de même de $1+z$, et par suite z est compris entre o et -1. J'ai donc pour $\sqrt{1+z}$ le développement en série

$$1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2.4}z^2+\frac{1.3}{2.4.6}z^3-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}z^n+R_n(z)$$

convergente pour $z=-1$ et, par suite, absolument et uniformément convergente pour $-1\leqq z\leqq 1$. Il est aisé de trouver une limite supérieure de $|R_n(z)|$. J'ai, en effet,

$$|R_n(z)|\leqq \sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_h,$$

en posant

$$u_h=\frac{1.3\ldots(2h-3)}{2.4\ldots 2h} \qquad \left(h\geqq 2,\ u_0=1,\ u_1=\frac{1}{2}\right).$$

Je vais chercher deux entiers α et $\beta>\alpha$ tels que, à partir d'un certain rang, on ait

$$\left(\frac{u_{h+1}}{u_h}\right)^\alpha<\left(\frac{h}{h+1}\right)^\beta \qquad \text{ou} \qquad h\beta-(h+1)^{\beta-\alpha}\left(h-\frac{1}{2}\right)^\alpha>0.$$

Le terme de plus haut degré en h est $\frac{1}{2}(3\alpha-2\beta)h^{\beta-1}$. Si donc $\frac{\beta}{\alpha}>\frac{3}{2}$, l'inégalité cesse d'avoir lieu à partir d'un certain rang. Si $\alpha=2$, $\beta=3$, le premier membre devient $\frac{1}{4}(3h-1)$; l'inégalité est donc vérifiée pour $h\geqq 1$. Or, $u_2=\frac{1}{2^3}$, donc, pour $h>2$, on a

$$u_h<\frac{1}{(2h)^{\frac{3}{2}}} \quad (^2).$$

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1898, p. 278.

(²) Ce résultat peut encore s'établir au moyen de la formule de Stirling

$$n!=\sqrt{2\pi}\,e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{12n}}, \qquad 0<\theta<1;$$

Je dis maintenant que

$$\sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_h = \mathrm{R}_n = (2n-1)u_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}.$$

Ce théorème est d'abord vrai pour $n=1$. En effet, si je fais

---

on a, en effet,

$$u_h = \frac{1}{2h}\,\frac{(2h-2)!}{2^{2h-2}[(h-1)!]^2}.$$

Remplaçant le numérateur et le dénominateur par leurs limites supérieure et inférieure données par la formule de Stirling, on trouve, après simplification,

$$u_h < \frac{e^{\frac{1}{24(h-1)}}}{2\sqrt{\pi}\,h\sqrt{h-1}} = v_h.$$

Posons

$$\frac{1}{h} = t,$$

il vient

$$h^{\frac{3}{2}} v_h = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{\frac{1}{24(1-t)}}}{\sqrt{1-t}} = \frac{\mathrm{T}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Lorsque t tend vers o par valeurs constamment décroissantes à partir de 1, T tend vers 1 par valeurs constamment décroissantes, donc $h^{\frac{3}{2}} v_h$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ par valeurs constamment décroissantes. *Ainsi,* T_n *désignant la valeur de* T *pour* $h=n$, *on a, pour* $h>n$,

$$h^{\frac{3}{2}} u_h < h^{\frac{3}{2}} v_h < \frac{\mathrm{T}_n}{2\sqrt{\pi}}.$$

On a, par exemple,

$$\mathrm{T}_2 = 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{24}}.$$

En intervertissant les limites, on trouve de même

$$u_h > \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,h\sqrt{h-1}\,e^{\frac{t}{6(h-1)}}} = v'_h$$

et, en posant $h = \frac{1}{t}$,

$$h^{\frac{3}{2}} v'_h = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-t}\,e^{\frac{1}{6(1-t)}}} = \frac{\mathrm{T}'}{2\sqrt{\pi}}.$$

La dérivée de $\frac{1}{\mathrm{T}'}$ a le signe de $t-\frac{5}{6}$. Donc, lorsque t tend vers o par valeurs constamment décroissantes à partir de $\frac{1}{2}$, T′ tend vers 1 par valeurs constamment

tendre z vers -1 dans le développement (absolument et uniformément convergent pour $-1 \leqq z \leqq 1$) de la fonction continue $\sqrt{1+z}$, j'obtiens, à la limite,

$$0 = 1 - \sum_{h=1}^{h=\infty} u_h,$$

d'où, comme $u_0 = 1$, je conclus

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} u_h = 2;$$

alors

$$R_1 = 2 - (u_0 + u_1) = \frac{1}{2}.$$

Si maintenant la formule est vraie pour R_n, on a

$$u_{n+1} = \frac{(2n-1)u_n}{2n+2} = \frac{R_n}{2n+2};$$

or

$$R_{n+1} = R_n - u_{n+1} = \frac{(2n+1)R_n}{2n+2} = (2n+1)\,u_{n+1} \quad (1).$$

---

décroissantes. *On a donc, pour* $h \geqq 2$,

$$h^{\frac{3}{2}} u_h > h^{\frac{3}{2}} v'_h > \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

et, par suite, pour $h > n \geqq 2$,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} < h^{\frac{3}{2}} u_h < \frac{T_n}{2\sqrt{\pi}}.$$

(1) On peut encore écrire

$$R_n = \frac{(2n)!}{(2.4\ldots 2n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Or $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, nombre des combinaisons de $2n$ objets n à n, est entier, donc *la fraction irréductible égale à* R_n *a pour dénominateur une puissance de* 2. Comme $u_n = R_{n-1} - R_n$, *il en est de même pour* u_n. En procédant de proche en proche, on voit qu'*en général, si l'on pose*

$$u_{n,p} = \frac{1.3\ldots(2p-1).1.3\ldots(2n-2p-1)}{2.4\ldots 2n} \qquad \left(p < \frac{n+1}{2},\ u_{n,0} = R_n,\ u_{n,1} = u_n\right),$$

on a

$$u_{n,p} = u_{n-1,p-1} - u_{n,p-1},$$

et que la fraction irréductible égale à $u_{n,p}$ *a pour dénominateur une puis-*

Je conclus de là

$$R_n < \frac{2n-1}{(2n)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour avoir $R_n < \frac{1}{2q^3}$, il suffit donc de prendre $\frac{(2n-1)^2}{2n^3} \leq \frac{1}{q^6}$. Soit $n = \alpha q^\beta$ (α et β entiers, $\beta \neq 0$), il faut

$$2\alpha^3 q^{3\beta} - q^6(2\alpha q^\beta - 1)^2 \geq 0.$$

Pour que cette inégalité ait lieu pour toute valeur de q, il faut que le terme de plus haut degré en q ait son coefficient positif, ce qui exige d'abord

$$3\beta \geq 2\beta + 6 \qquad \text{ou} \qquad \beta \geq 6,$$

puis, en supposant $\beta = 6$,

$$2\alpha^3 - 4\alpha^2 \geq 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha \geq 2.$$

Comme d'ailleurs $\frac{2h-1}{(2h)^{\frac{2}{3}}}$ peut s'écrire $\frac{1}{(2h)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2h)^{\frac{3}{2}}}$, en faisant $h = 2q^6$, cette expression devient

$$\frac{1}{2q^3} - \frac{1}{8q^3}.$$

On a donc bien une solution de l'inégalité en prenant $n = 2q^6$.

Ainsi, on peut toujours prendre pour $\Pi_k(x)$ *l'expression*

$$1 + \sum_{h=1}^{h=2q^6} (-1)^{h+1} u_h \left[\left(x - \frac{k}{q}\right)^2 - 1\right]^h,$$

de degré $4q^6$ *en* x. Ordonnons-la par rapport à x.

---

sance de 2. On voit aussi que

$$\sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_{n,p} = u_{n,p-1} = u_{n,p} \frac{2n-2p+1}{2p-1}.$$

Pour les grandes valeurs de n, $u_{n,p}$ *est donc de l'ordre de* $\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$.

4. On a, en supposant d'abord $k(k-q)\neq 0$,

$$\left[\left(x-\frac{k}{q}\right)^2-1\right]^h=\left[x^2-2\frac{k}{q}x+\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)\right]^h=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{h!}{\alpha!\beta!\gamma!}x^{2\alpha}\left(-2\frac{k}{q}x\right)^\beta\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)^\gamma,$$

$$(\alpha+\beta+\gamma=h);$$

ce que l'on peut écrire

$$\sum_{\alpha,\beta}\frac{h!(-1)^{h-\alpha}}{\alpha!\beta!(h-\alpha-\beta)!}\left(\frac{2k}{q}\right)^\beta\left(1-\frac{k^2}{q^2}\right)^{h-\alpha-\beta}x^{2\alpha+\beta},\qquad(\alpha+\beta\leqq h).$$

Le coefficient de x^μ dans cette expression s'obtient en réunissant les termes correspondants aux systèmes (α, β) de solutions entières et positives de

$$2\alpha+\beta=\mu,\qquad \alpha+\beta\leqq h.$$

On voit aisément que ces solutions n'existent que pour

$$\mu\leqq\begin{cases}2h & \text{si } \mu \text{ est pair,}\\ 2h-1 & \text{si } \mu \text{ est impair,}\end{cases}\qquad\text{ou}\qquad h\geqq\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}[1-(-1)^\mu]=l_\mu.$$

Je les désignerai par $(\alpha_{h,\mu}, \beta_{h,\mu})$. Le coefficient de x^μ dans $\Pi_k(x)$ est donc, si $\mu>0$,

$$C_{\mu,k}=\sum_{h=l_\mu}^{h=2q^6}h!\,u_h\sum_{\alpha_{h,\mu},\beta_{h,\mu}}(-1)^{\alpha+1}\frac{1}{\alpha_{h,\mu}!\beta_{h,\mu}!(h-\alpha_{h,\mu}-\beta_{h,\mu})!}\left(\frac{2k}{q}\right)^{\beta_{h,\mu}}\left(1-\frac{k^2}{q^2}\right)^{h-\alpha_{h,\mu}-\beta_{h,\mu}},$$

ou bien en désignant simplement par α_μ, β_μ deux entiers positifs, solutions de $2\alpha+\beta=\mu$ $(0\leqq\mu\leqq 4q^6)$

$$C_{\mu,k}=\sum_{\alpha_\mu,\beta_\mu}\frac{(-1)^{\alpha_\mu+1}\left(\frac{2k}{q}\right)^{\beta_\mu}}{\alpha_\mu!\,\beta_\mu!}\sum_{h=\alpha_\mu+\beta_\mu}^{h=2q^6}u_h\frac{h!}{(h-\alpha_\mu-\beta_\mu)!}\left(1-\frac{k^2}{q^2}\right)^{h-\alpha_\mu-\beta_\mu}.$$

On peut encore écrire

$$(2)\qquad C_{\mu,k}=\sum_{\alpha_\mu,\beta_\mu}\frac{\left(-\frac{2k}{q}\right)^{\beta_\mu}}{\alpha_\mu!\,\beta_\mu!}\sum_{h=\alpha_\mu+\beta_\mu}^{h=2q^6}(-1)^{h+1}u_h\frac{h!}{(h-\alpha_\mu-\beta_\mu)!}\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)^{h-\alpha_\mu-\beta_\mu}.$$

On a d'ailleurs directement

$$(3)\qquad C_{0,k}=1+\sum_{h=1}^{h=2q^6}(-1)^{h-1}u_h\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)^h.$$

On peut alors écrire, quel que soit μ,

$$C_{\mu,k}=\sum_{\alpha_\mu,\beta_\mu}\frac{\left(-\frac{2k}{q}\right)^{\beta_\mu}}{\alpha_\mu!\,\beta_\mu!}\,\frac{d^{\alpha_\mu+\beta_\mu}C_{0,k}}{d^{\alpha_\mu+\beta_\mu}\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)},$$

et remarquer que $C_{0,k}$ *se compose des* $2q^6+1$ *premiers termes du développement de* $\frac{k}{q}$ *par rapport aux puissances croissantes de* $\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)$.

Si $k=0$, on a

$$(x^2-1)^h=\sum_{\alpha}\frac{h!(-1)^{h-\alpha}}{\alpha!(h-\alpha)!}x^{2\alpha}.$$

Le coefficient de x^μ dans $\Pi_0(x)$ est donc o si μ est impair, et, si μ est pair et $\neq 0$,

$$C_{\mu,0}=\sum_{h=\frac{\mu}{2}}^{h=2q^6}(-1)^{h+1}h!\,u_h\,\frac{(-1)^{h-\frac{\mu}{2}}}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!\left(h-\frac{\mu}{2}\right)!}$$

ou bien

$$(4)\qquad C_{\mu,0}=\frac{1}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!}\sum_{h=\frac{\mu}{2}}^{h=2q^6}(-1)^{h+1}u_h\,\frac{h!}{\left(h-\frac{\mu}{2}\right)!}(-1)^{h-\frac{\mu}{2}}.$$

On a d'ailleurs directement

$$(5)\qquad C_{0,0}=1-\sum_{h=1}^{h=2q^6}u_h\quad(^1).$$

On voit que $C_{0,0}$ *se compose des* $2q^6+1$ *premiers termes du développement de* $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ *où l'on fait* $z=-1$ *et que* $C_{\mu,0}$ *est*

---

(1) On a déjà vu que

$$\sum_{h=1}^{h=\infty}u_h=1.$$

Donc

$$\sum_{h=1}^{h=2q_6}=1-R_{2q_6},\qquad C_{0,0}=R_{2q^6}=(4q_6+1)\,u_{2q^6}.$$

le quotient par $\frac{\mu}{2}!$ *de la* $\left(\frac{\mu}{2}\right)^{ième}$ *dérivée de cette expression, pour* $z=-1$. On peut faire rentrer ce résultat dans les formules (2) et (3) en y faisant $\beta_\mu = 0$ et remplaçant $\frac{(-2k)\beta_\mu}{\beta_\mu!}$ par $\frac{1+(-1)^\mu}{2}$.

Si $k=q$, on a

$$[(x-1)^2-1]^h = x^h(x-2)^h = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=h} \frac{h!}{\alpha!(h-\alpha)!} x^{h+\alpha}(-2)^{h-\alpha}.$$

Pour avoir le coefficient de x^μ dans $\Pi_q(x)$, remarquons qu'un terme de rang h de $\Pi_q(x)$ fournit un terme en x^μ toujours et seulement si

$$h \leqq \mu \leqq \begin{cases} 2h, & \text{si } \mu \text{ est pair,} \\ 2h-1, & \text{si } \mu \text{ est impair,} \end{cases}$$

en sorte que, si $\mu \neq 0$,

$$C_{\mu,q} = \sum_{h=t_\mu}^{h=\mu} (-1)^{h-1} u_h h! \frac{(-2)^{2h-\mu}}{(\mu-h)!(2h-\mu)!} \tag{6}$$

(si $\mu > 2q^6$, la limite supérieure de h sera $2q^6$). On a d'ailleurs directement

$$C_{0,q} = 1. \tag{7}$$

5. Désignons maintenant par $D_{\mu,p,q}$ le coefficient de x^μ dans $P_{p,q}(x)$; les formules (1) donnent

$$\begin{cases} D_{\mu,0,q} = -\frac{q-1}{2} C_{\mu,0} + \frac{q}{2} C_{\mu,1} + \frac{1}{2} C_{\mu,q}, \\ D_{\mu,p,q} = \frac{q}{2}(C_{\mu,p-1} + C_{\mu,p+1}) - q\, C_{\mu,p}, \qquad p = 1, 2, \ldots, q-1. \\ D_{\mu,q,q} = \frac{1}{2} C_{\mu,0} + \frac{q}{2} C_{\mu,q-1} - \frac{q-1}{2} C_{\mu,q}. \end{cases} \tag{8}$$

Ces formules (8), jointes aux formules (2)-(7), déterminent complètement les polynomes $P_{p,q}(x) = \sum_{\mu=0}^{h=4q^6} D_{\mu,p,q} x^\mu$.