BULLETIN DE LA S. M. F.

H VON KOCH

Remarques sur quelques séries de polynomes

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 269-274

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__269_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REMARQUES SUR QUELQUES SÉRIES DE POLYNOMES;

Par M. Helge von Koch.

Désignant par x un point du plan de la variable complexe, on sait que l'équation

$$|x^2-1|=1 \tag{1}$$

représente une lemniscate de Bernoulli, ayant pour pôles les points $x=-1$ et $x=+1$ et pour point double le point $x=0$; ce dernier point divise la lemniscate en deux parties que nous désignerons par A et B et qui entourent respectivement les points $x=+1$ et $x=-1$.

Soit $f(x)$ une fonction analytique régulière à l'intérieur du contour A; par la substitution

$$z=1-x^2, \qquad x=\sqrt{1-z}=1-\frac{1}{2}z+\ldots,$$

$f(x)$ deviendra une fonction de z régulière dans un certain voisinage de $z=0$. Soit

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots \tag{2}$$

le développement taylorien de cette fonction. Quant x décrit le contour A, z décrit le cercle

$$|z|=1,$$

ce qui, d'après des principes bien connus, signifie que la fonction est régulière dans ce cercle ou, en d'autres termes, que la

série (2) converge pour $|z|<1$. Il en résulte que la série

$$c_0+c_1(1-x^2)+c_2(1-x^2)^2+\dots \tag{3}$$

converge et représente $f(x)$ à l'intérieur de A.

Or la condition

$$|x^2-1|<1$$

étant remplie aussi par les points intérieurs à B, on voit que la convergence de la série (3) s'étend à cette autre partie de la lemniscate considérée.

Comme la série (3) ne change pas de valeur si l'on change x en $-x$, il est clair que cette série ne peut pas, en général, représenter $f(x)$ à l'intérieur de B; pour cela il faudrait d'abord que $f(x)$ pût se prolonger analytiquement, et puis que la condition $f(x)=f(-x)$ fût vérifiée.

Ces remarques donnent donc un moyen très simple pour former une série de polynomes représentant différentes fonctions dans différentes portions du plan.

Prenant d'abord

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1-z}}=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\lfloor 2\nu}{(\lfloor\nu)^2}\,\frac{z^\nu}{2^{2\nu}},$$

on voit que la série

$$1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\lfloor 2\nu}{(\lfloor\nu)^2}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^\nu \tag{4}$$

converge à l'intérieur de la lemniscate (1), mais a pour valeur $\frac{1}{x}$ à l'intérieur de A, $-\frac{1}{x}$ à l'intérieur de B (1).

Comme autre exemple, considérons la fonction $\log x$; prenons-en la branche qui s'annule pour $x=1$ et rendons-la uniforme par une coupure partant de l'origine et suivant la partie négative de l'axe imaginaire. Par $\log x$ nous désignons donc, quel

---

(1) Je dois à M. Borel la remarque que, dans le *Calcul différentiel* de J. Bertrand, se trouve, à titre d'exercice sur les séries, un développement analogue à (4), qui pourrait être employé pour le même objet; ce développement a ailleurs servi à M. Lebesgue dans l'étude d'une tout autre question (*Voir* Borel, *Leçons sur les variables réelles*, p. 60).

que soit x, la fonction uniforme ainsi définie. Comme on a

$$\log x = \log\sqrt{1-z} = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right),$$

on trouve que la série

$$(5) \qquad 1 - x^2 + \frac{(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{3} + \dots$$

converge dans les deux parties de la lemniscate, mais représente

$$-2\log x \qquad \text{à l'intérieur de A,}$$
$$-2\log x + 2\pi i \qquad \text{» B.}$$

Comme on sait, Weierstrass (1) a le premier signalé le fait important qu'une série peut représenter différentes fonctions dans différentes portions du plan; d'autres géomètres ont ensuite donné des exemples variés du même fait (2). Il nous semble que la série (5) en offre l'exemple le plus intuitif.

J'avais été conduit aux remarques qui précèdent par l'étude des séries de la forme

$$\sum_{\nu} P_\nu(x)\,[\varphi(x)]^\nu,$$

$\varphi(x)$ étant un polynome de degré donné n et P_ν des polynomes en x de degré au plus égal à $n-1$. Ces séries, qui convergent dans des domaines limités par des sortes de lemniscates généralisées, sont intéressantes à plus d'un point de vue et notamment pour la question du prolongement analytique et pour celle de l'interpolation (3). J'avais déjà commencé la rédaction de mon travail sur ce sujet, lorsque j'ai reçu un Mémoire de M. Alfred Kienast (4), où se trouvent la plupart des résultats que j'avais obtenus et que

(1) *Monatsbericht der Ak. der Wiss. zu Berlin*, 1880. Dans le même Recueil pour 1881, Weierstrass a publié un exemple remarquable dû à M. J. TANNERY. *Voir* aussi *Abhandlungen zur Functionenlehre*, p. 69, ou *Œuvres de Weierstrass*.

(2) *Voir* notamment E. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 67. Paris, 1898.

(3) Dans une Conférence faite à Djursholm le 2 mars 1906, j'ai rendu compte de mes recherches sur ce sujet.

(4) *Uber die Darstellung der analytischen Functionen durch Reihen, die nach Potenzen eines Polynomes fortschreiten und Polynome eines niederen Grades zu Koeffizienten haben* (Inaugural-Dissertation, Zurich, 1906).

j'avais l'intention de publier. Dès lors il m'a paru superflu de poursuivre mon travail et je me suis borné, dans ce qui précède, à quelques exemples qui ne se trouvent pas dans le Mémoire de M. Kienast et qui, à cause de leur simplicité, me paraissent dignes d'être signalés.

Pour terminer je formerai, par un passage à la limite, une série de polynomes offrant une singularité de convergence bien plus profonde que les précédentes. Posons

$$P_n(x) = -\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-x^n)^\nu}{\nu},$$

n désignant un entier positif quelconque $\geqq 2$, et remarquons que le domaine de convergence de cette série :

$$|1-x^n|<1$$

est limité par la courbe dont l'équation, en coordonnées polaires, est la suivante :

$$r^n = 2\cos n\varphi;$$

cette courbe est composée de n branches, que nous pouvons désigner par $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, qui se rencontrent à l'origine et qui entourent respectivement les points

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \ldots,\ \omega^{n-1} \qquad \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}\right),$$

ainsi que les segments rectilignes joignant ces points à l'origine.

Pour une valeur réelle de x comprise entre 0 et 1 (0 exclus, 1 inclus), on a visiblement

$$P_n(x) = \log x.$$

Pour

$$x = re^{i\varphi} \qquad (0 < r \leqq 1),$$

l'argument φ étant un multiple quelconque de $\frac{2\pi}{n}$, on a $x^n = r^n$, d'où

$$P_n(x) = r,$$

ce que nous écrirons

$$P_n(x) = \log|x|.$$

Ces conclusions ayant lieu quel que soit n, on est amené, en prenant n successivement égal à

$$\underline{|2},\ \underline{|3},\ \underline{|4},\ \ldots,$$

à la formule suivante :

$$\log|x| = \lim_{n=\infty} \mathrm{P}_{\underline{|n}}(x), \tag{6}$$

qui a lieu pour tout point x remplissant les deux conditions

$$\begin{cases} 0 < |x| \leqq 1, \\ \dfrac{\arg x}{2\pi} = \text{nombre rationnel.} \end{cases} \tag{6'}$$

Posons maintenant

$$\begin{cases} \mathrm{P}_n(x) = p_n(x) + \mathrm{R}_n(x), \\ p_n(x) = -\dfrac{1}{n}\left(1 - x^n + \dfrac{(1-x^n)^2}{2} + \ldots + \dfrac{(1-x^n)^{\nu_n}}{\nu_n}\right) \end{cases} \tag{7}$$

et remarquons qu'on peut choisir ν_n tel que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} p_{\underline{|n}}(x) = \lim_{n=\infty} \mathrm{P}_{\underline{|n}}(x)$$

pour tout point x remplissant les conditions (6'). En effet, soit $x = re^{i\varphi}$ un tel point et choisissons n de la forme $\underline{|\nu}$ et suffisamment grand pour que l'on ait

$$x^n = r^n \qquad \text{et} \qquad |x| > \frac{1}{n};$$

on a alors, en posant pour abréger $\nu_n = m$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{P}_n(x) - p_n(x)| &= |\mathrm{R}_n(x)| \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{(1-x^n)^{m+1}}{m+1} + \frac{(1-x^n)^{m+2}}{m+2} + \ldots\right], \\ &< \frac{1}{n(m+1)} \frac{(1-x^n)^{m+1}}{x^n}, \\ &< \frac{n^n}{n(m+1)} \left(1 - \frac{1}{n^n}\right)^{m+1}, \end{aligned}$$

par où l'on voit qu'il suffit de prendre

$$\nu_n = m = n^n$$

pour avoir

$$|\mathrm{P}_n(x) - p_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Prenant cette valeur de ν_n dans la définition (7) du polynome

$p_n(x)$, on peut donc remplacer la formule (6) par la suivante :

$$\log|x| = \lim_{n=\infty} p|_n(x).$$

$$0 < |x| \leqq 1, \qquad \frac{\arg x}{2\pi} = \text{nombre rationnel.}$$

L'expression précédente pourrait être remplacée par la série de polynomes

$$p|_2(x) + [p|_3(x) - p|_2(x)] + \ldots.$$

On a donc l'exemple d'une série de polynomes offrant les singularités suivantes :

La série converge sur tout rayon de longueur *un* issu de l'origine (o exclus) et formant avec l'axe réel un angle qui est en rapport rationnel avec 2π. Pour un point x d'un tel rayon, la série a la valeur réelle $\log|x|$; cette série représente donc successivement, dans un voisinage arbitrairement petit d'un point quelconque intérieur au cercle

$$|x| = 1,$$

une infinité de fonctions analytiques distinctes, savoir des fonctions de la forme

$$\log x + \varphi i,$$

φ étant en rapport rationnel à 2π.

FIN DU TOME XXXIV.

ERRATA.

Page 8, ligne 13, au lieu de « figure 4, » lire « figure 3 ».
Page 12, ligne 15, au lieu de « figure 3 », lire « figure 2 ».