BULLETIN DE LA S. M. F.

PETROVITCH

Sur certaines transcendantes entières

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 165-177

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__165_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR CERTAINES TRANSCENDANTES ENTIÈRES;

Par M. Michel Petrovitch.

1. Il y a un nombre illimité de séries

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

dont le coefficient général a_n se laisse mettre sous la forme

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_a^b u(t)[r(t)]^n \, dt, \tag{2}$$

où les limites a et b de l'intégrale sont réelles, les fonctions $u(t)$ et $r(t)$ réelles, limitées et d'un signe invariable lorsque t varie entre a et b.

Nous appellerons les fonctions, définies par de telles séries, *transcendantes* $\Delta(z)$.

Dans le cas le plus simple où $r(t)$ se réduit à une constante, la transcendante $\Delta(z)$ se réduit à une fonction exponentielle

$$\Delta(z) = \mathrm{A} e^{\alpha z}.$$

Lorsque $r(t)$ est une véritable fonction de t, le développement (1) engendre une infinité de transcendantes variées. Ainsi, au cas où

$$r(t) = ht, \qquad h = \text{const.}$$

correspond une fonction de la forme

$$\Delta(z) = \mathrm{A} \frac{e^{\beta z} - e^{\alpha z}}{z},$$

A, α, β étant des constantes réelles ; au coefficient

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t} \right)^n dt$$

correspond la trancendante

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}};$$

au coefficient

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{2 e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{\pi}} e^{n\beta t^2} \, dt$$

($\alpha > 0$, $\beta > 0$) correspond

$$\Delta(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\sqrt{\alpha + n\beta}}.$$

2. De l'expression (2) on tire

$$\Delta(z) = \int_a^b u(t) e^{zr(t)}\, dt, \tag{3}$$

$$\Delta^{(k)}(z) = \int_a^b u(t)[r(t)]^k e^{zr(t)}\, dt, \tag{4}$$

d'où l'on conclut que *la dérivée d'un ordre quelconque d'une transcendante* $\Delta(z)$ *est elle-même une transcendante* $\Delta(z)$.

De même, l'expression

$$\int \Delta(z)\, dz = \int_a^b \frac{u(t)}{r(t)} e^{zr(t)}\, dt + \text{const.} \tag{5}$$

fait voir que : *lorsque la fonction correspondante* $r(t)$ *ne s'annule pas pour les valeurs de* t *comprises entre* a *et* b, *ni pour ces mêmes valeurs, l'intégrale* $\int \Delta(z)\, dz$ *est, à une constante près, également une transcendante* $\Delta(z)$.

De (2) on conclut qu'en valeur absolue

$$a_n \leq a_0 \frac{M^n}{n!},$$

M étant la plus grande valeur absolue de $r(t)$ pour les valeurs de t comprises entre a et b. Par suite : *toute transcendante* $\Delta(z)$ *est une fonction entière de genre inférieur à deux.*

Les expressions (3) et (4) mettent en évidence de nombreuses particularités des transcendantes $\Delta(z)$, dont nous ne citerons ici que les suivantes :

Pour toute valeur réelle ou imaginaire de z le module de $\Delta(z)$ est inférieur à celui de

$$a_0 e^{Mz},$$

et le module de $\Delta^{(k)}(z)$ inférieur à celui de

$$a_k e^{Mz}.$$

L'élément de l'intégrale (3) gardant un signe invariable pour toute valeur réelle de z, et ainsi l'élément de la première intégrale qui figure dans l'expression

$$\Delta(\alpha+\beta i)=\int_a^b ue^{\alpha r}\cos\beta r\,dt+i\int_a^b ue^{\alpha r}\sin\beta r\,dt,$$

gardant un signe invariable pour toute valeur de β comprise entre $-\frac{\pi}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$, on conclut qu'une transcendante $\Delta(z)$ (et par suite sa dérivée d'un ordre quelconque) ne peut avoir aucun zéro réel, ni aucun zéro imaginaire à coefficient de i compris entre $-\frac{\pi}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$.

Chacune des courbes réelles

$$y=\Delta(x),\qquad y=\Delta'(x),\qquad y=\Delta''(x),\qquad \ldots$$

varie constamment dans un même sens, sans présenter de maxima, de minima ou de points d'inflexion ; de plus, on aura pour les valeurs positives de x et de α

$$\Delta(x+\alpha)\leqq e^{M\alpha}\Delta(x),\qquad \Delta(x+\alpha)\leqq\Delta(\alpha)e^{Mx},$$
$$\Delta^{(k)}(x+\alpha)\leqq M^k e^{M\alpha}\Delta(x),\qquad \Delta(x+\alpha)\leqq M^k\Delta(\alpha)e^{Mx}.$$

Si N est la plus petite valeur de $r(t)$ entre a et b, on aura

$$\Delta(x)\geqq a_0 e^{Nx},$$
$$\Delta(x+\alpha)\geqq e^{N\alpha}\Delta(x),\qquad \Delta(x+\alpha)\geqq\Delta(\alpha)e^{Nx},$$

avec des inégalités analogues pour les dérivées.

Lorsque z augmente indéfiniment dans une direction quelconque à droite de l'axe des imaginaires, la fonction $\Delta(z)$ augmentera indéfiniment ou bien tendra vers zéro suivant que $r(t)$ est positive ou négative dans l'intervalle (a, b).

De même, lorsque z augmente indéfiniment dans une direction quelconque à gauche de l'axe des imaginaires, $\Delta(z)$ augmentera indéfiniment ou bien tendra vers zéro suivant que $r(t)$ est négative ou positive dans (a, b).

En tous cas, donc, la courbe

$$y=\Delta(x)$$

(ainsi que les courbes dérivées) a l'axe des x comme asymptote,

et s'en approche indéfiniment à droite ou à gauche de l'axe des y, suivant le signe de $r(t)$.

Les inégalités précédentes fournissent aussi des limites supérieures ou inférieures pour les valeurs asymptotiques de $\Delta(x)$ dans le cas de x très grand : celles-ci sont fournies par des exponentielles

$$Ae^{hx},$$

où A et h sont des constantes.

Dans le cas plus particulier où la fonction $r(t)$ présente un maximum entre a et b, la formule classique de Laplace fournit comme valeur asymptotique précise de $\Delta(x)$ l'expression

$$C\frac{e^{hx}}{\sqrt{x}},$$

où les constantes C et h ont pour valeurs

$$C = u(\alpha)\sqrt{-\frac{2\pi}{r''(\alpha)}}, \qquad h = r(\alpha),$$

α étant la valeur de t pour laquelle $r(t)$ atteint son maximum.

Pour avoir l'expression analogue correspondant à la dérivée $\Delta^{(k)}(x)$, il suffit de changer dans C $u(\alpha)$ en

$$u(\alpha)[r(\alpha)]^k.$$

Parmi les nombreuses propriétés qu'on peut tirer des expressions précédentes, citons encore la suivante :

Les équations linéaires à coefficients constants et à second membre, celui-ci étant une transcendante $\Delta(z)$, *sont en général intégrables à l'aide des transcendantes* $\Delta(z)$: l'équation

$$A_0\frac{d^p y}{dx^p} + A_1\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \ldots + A_p y = \int_a^b u(t)e^{xr(t)}\,dt$$

admet comme intégrale particulière

$$\Delta(x) = \int_a^b U(t)e^{xr(t)}\,dt,$$

avec

$$U(t) = \frac{u(t)}{A^0[r(t)]^p + A_1[r(t)]^{p-1} + \ldots + A_p},$$

sous la condition que l'équation algébrique caractéristique

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p = 0$$

n'ait aucune racine réelle comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $r(t)$ quand t varie de a à b.

3. *On a ainsi une classe assez étendue de fonctions entières de genre zéro ou un, à nombreuses particularités connues.*

Appliquons ce qui précède à la transcendante

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

laquelle, comme on le verra dans ce qui suit, présente un intérêt tout particulier.

On a ici

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t}\right)^n dt,$$

et par suite

$$\Delta(z) = \int_0^1 e^{zt \log \frac{1}{t}} dt,$$

La fonction correspondante,

$$r(t) = t \log \frac{1}{t},$$

part de la valeur o pour $t = 0$, croît jusqu'à son maximum

$$M = \frac{1}{e},$$

à partir duquel elle décroît en atteignant la valeur o pour $t = 1$. Par suite la fonction $\Delta(z)$ présentera les particularités suivantes :

Pour toute valeur réelle ou imaginaire de z le module de $\Delta(z)$ est inférieur à celui de $e^{\frac{z}{e}}$ et le module de $\Delta^{(k)}(z)$ inférieur à celui de

$$\frac{1}{(k+1)^{k+1}} e^{\frac{z}{e}}.$$

Pour les valeurs réelles et positives de z et de α, on a

$$\Delta(z+\alpha) \leqq e^{\frac{\alpha}{e}} \Delta(z), \qquad \Delta(z+\alpha) \leqq \Delta(\alpha) e^{\frac{z}{e}},$$

$$\Delta^{(k)}(z+\alpha) \leqq e^{\frac{\alpha}{e}-k} \Delta(z), \qquad \Delta^{(k)}(z+\alpha) \leqq \Delta(\alpha) e^{\frac{z}{e}-k}.$$

La fonction $\Delta(z)$ et toutes ses dérivées n'ont aucun zéro réel ni aucun zéro imaginaire à coefficient de i compris entre $-\pi e$ et πe. Ces fonctions tendent vers zéro ou augmentent indéfiniment suivant que z augmente indéfiniment dans une direction à gauche ou bien à droite de l'axe des imaginaires.

La valeur asymptotique de $\Delta(z)$, pour z positif et très grand, est donnée par l'expression

$$\sqrt{\frac{2\pi}{e}} \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}};$$

celle de la dérivée $\Delta^{(k)}(z)$ par l'expression

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{k+\frac{1}{2}}} \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}}.$$

On peut avoir une limite inférieure de $\Delta(z)$ pour les valeurs réelles et positives de z en remarquant qu'on a

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{n!},$$

d'où l'on conclut facilement

$$\Delta(z) > \frac{e}{z}\left(e^{\frac{z}{e}} - 1\right), \quad \ldots.$$

4. Voici maintenant un problème d'un ordre plus général où s'introduit d'elle-même la transcendante qui fait l'objet du paragraphe précédent.

Il existe une infinité de séries

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots, \tag{6}$$

à coefficients réels, positifs et tels que l'équation algébrique

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_k z^k = 0, \tag{7}$$

obtenue en égalant à zéro la somme des $k+1$ premiers termes de (6), ait toutes ses racines réelles quel que soit k.

On s'assure bien simplement de l'existence effective de telles séries de la manière suivante. Soit

$$f_k(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_k z^k = 0, \tag{7}$$

une équation algébrique à coefficients réels, positifs et à racines

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_k,$$

toutes réelles et inégales ; il est facile de voir qu'on peut choisir, et cela d'une infinité de manières, un coefficient réel positif A_{k+1}, de sorte que l'équation

$$f_{k+1}(z) = f_k(z) + A_{k+1} z^{k+1} \tag{8}$$

ait également toutes ses racines réelles et inégales. Car, en choisissant k nombres réels

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_k,$$

de sorte qu'on ait

$$\xi_1 < z_1 < \xi_2 < z_2 < \ldots < \zeta_k < z_k,$$

les valeurs

$$f_k(\xi_i) \quad \text{et} \quad f_k(\xi_{i+1}),$$

seront différentes de zéro et de signes contraires, et de plus on aura

$$\begin{array}{ll} \text{pour } k \text{ pair} & f_k(\xi_1) > 0, \quad f_k(\xi_k) < 0, \\ \text{pour } k \text{ impair} & f_k(\zeta_1) < 0, \quad f_k(\xi_k) < 0. \end{array}$$

D'autre part, on peut toujours trouver une quantité réelle positive δ suffisamment petite pour que, quelle que soit la valeur de A_{k+1} comprise entre 0 et δ, la fonction $f_{k+1}(z)$, définie par (8), ait pour $z = \xi_i$ le même signe que $f_k(z)$. Et comme l'on a

$$\begin{array}{ll} \text{pour } k \text{ pair} & f_{k+1}(-\infty) < 0, \quad f_{k+1}(\infty) > 0, \\ \text{pour } k \text{ impair} & f_{k+1}(-\infty) > 0, \quad f_{k+1}(\infty) > 0, \end{array}$$

l'équation $f_{k+1}(z) = 0$ aura une racine dans chacun des $k+1$ intervalles

$$(-\infty, \xi_1), \quad (\xi_1, \xi_2), \quad \ldots, \quad (\xi_{k-1}, \xi_k), \quad (\xi_k, \infty),$$

et par suite elle a toutes ses racines réelles et inégales.

On formerait ainsi, de proche en proche, des équations

$f_n(z) = 0$ des degrés de plus en plus élevés, ce qui prouve bien l'existence des séries (6) en question (¹).

Désignons maintenant par $\lambda(n)$ une quelconque des fonctions de n suivantes :

1° Polynomes $P(n)$ quelconques n'ayant que des zéros réels et négatifs ;

2° Fonctions de la forme $e^{hn}P(n)$, où h est un nombre réel quelconque ;

3° Fonctions entières $G(n)$ quelconques de n, de genre zéro ou un, n'ayant que des zéros réels et négatifs ;

4° Fonctions de la forme e^{-hn^2}, h étant un nombre réel et positif quelconque ;

5° Produit d'un nombre quelconque de fonctions 1°, 2°, 3°, 4° ;

6° Fonctions de la forme

$$\frac{\lambda_1(n)}{\lambda_2(0)\lambda_2(1)\ldots\lambda_2(n)},$$

$\lambda_1(n)$ et $\lambda_2(n)$ étant deux quelconques parmi les fonctions 1°, 2°, 3°, 4°, 5°.

Laguerre a montré (²) que, si une équation algébrique

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en sera de même de l'équation

$$a_0\lambda(0) + a_1\lambda(1)x + \ldots + a_n\lambda(n)x^n = 0.$$

On en conclut directement que, connaissant une série (6), on peut en déduire une infinité de la forme

$$A_0\omega_0 + A_1\omega_1 z + A_2\omega_2 z^2 + \ldots,$$

jouissant de la propriété caractéristique des séries (6) : il suffit de prendre pour ω_n une quelconque des fonctions $\lambda(n)$.

C'est l'étude des fonctions définies par les séries (6) *qui se rattache à la transcendante entière*

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

(¹) *Voir* aussi *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. XIII, 1906, p. 135-136.

(²) *Œuvres*, t. I, p. 33-36, 199-206, etc.

considérée au paragraphe précédent, comme on le verra dans ce qui suit.

5. Appelons, pour abréger, *fonctions* $\Omega(z)$ toute fonction de z définie par une série (6).

En désignant par

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_n$$

les valeurs absolues des inverses des racines, manifestement toutes négatives, de l'équation algébrique

$$A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n = 0,$$

on aura

$$\frac{A_n}{A_0} = \zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n,$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n.$$

Les quantités ζ_i étant toutes réelles et positives, on aura, d'après la proposition classique sur la moyenne géométrique,

$$\sqrt[n]{\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n} \leqq \frac{1}{n} (\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n),$$

ou bien

$$A_n \leqq \frac{A_0}{n^n} \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^n. \tag{9}$$

Par suite, en remarquant que

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^n} = 1 + z \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

on conclut que *les coefficients du développement d'une fonction* $\Omega(z)$ *quelconque suivant les puissances de* z *sont au plus égaux à ceux de la fonction*

$$A_0 + A_1 z \Delta\left(\frac{A_1 z}{A^0}\right),$$

où $\Delta(z)$ *désigne la transcendante*

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

C'est cette proposition qui rattache la transcendante $\Delta(z)$ aux

fonctions $\Omega(z)$. Les inégalités relatives à $\Delta(z)$ s'étendent dès lors à toutes ces fonctions ; nous citerons les plus immédiates.

Tout d'abord l'inégalité (9) fait voir que *toute fonction* $\Omega(z)$ *est une fonction entière de genre zéro ou un.*

La même inégalité fait aussi voir que, pour toute valeur réelle ou imaginaire de z, *le module d'une fonction* $\Omega(z)$ *quelconque est inférieur à*

$$A_0 + A_1 r \Delta\left(\frac{A_1 r}{A^0}\right) \qquad r = |z|.$$

En même temps, en s'appuyant sur l'inégalité précédente

$$\Delta(r) < e^{\frac{r}{e}},$$

on voit que *l'expression*

$$A_0 + A_1 r e^{\frac{A_1 r}{A_0 e}}$$

donne aussi une limite supérieure du module de $\Omega(z)$.

D'après une proposition de Laguerre (1), les coefficients d'une série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

à coefficients tous positifs, représentant une fonction entière de genre inférieur à deux, ayant toutes ses racines réelles, sont inférieurs aux coefficients correspondants de la série

$$a_0 e^{\frac{a_1 z}{a_0}}.$$

Nous ferons remarquer que la limite supérieure

$$\frac{A_0}{n^n}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^n,$$

que nous avons trouvée pour le coefficient A_n de $\Omega(z)$, est manifestement inférieure à

$$\frac{A_0}{1.2\ldots n}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^n$$

et par suite *plus précise* que la limite fournie par la proposition de Laguerre.

Il en est évidemment de même pour la limite supérieure que nous venons de trouver pour le module de $\Omega(z)$, puisqu'on a

---

(1) Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 34-36.

pour r réel et positif

$$A_0 + A_1 r \Delta\left(\frac{A_1 r}{a_0}\right) < A_0 e^{\frac{A_1 r}{A_0}}.$$

Enfin, la seconde limite supérieure

$$A_0 + A_1 r e^{\frac{A_1 r}{A_0 e}},$$

que nous avons trouvée pour le module de $\Omega(z)$, est aussi *plus précise* que celle de Laguerre: la différence entre celle-ci et la nôtre

$$A_0 \sum_0^\infty \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{e^{n-1}}\right)\left(\frac{A_1 r}{A_0}\right)^n$$

est positive puisque pour $n > 1$ on a

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{e^{n-1}}.$$

La fonction $\Omega(z)$ croît indéfiniment pour les valeurs positives de z indéfiniment croissantes ; l'inégalité

$$\Omega(z) < A_0 + A_1 z \Delta\left(\frac{A_1 z}{A_0}\right)$$

et l'égalité asymptotique

$$\Delta(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}},$$

trouvée précédemment, montrent alors qu'*une fonction quelconque* $\Omega(z)$ *croît moins vite que la fonction*

$$\frac{H e^{hz}}{\sqrt{z}},$$

où H *et* h *sont des constantes ayant pour valeurs*

$$H = A_1 \sqrt{\frac{2\pi A_0}{e A_1}}, \qquad h = \frac{A_1}{e A_0}.$$

L'inégalité (9) conduit aussi à des inégalités relatives aux zéros de $\Omega(z)$, parmi lesquelles nous indiquerons la suivante :

Soient

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3, \quad \ldots$$

les valeurs absolues de ces zéros (tous réels et négatifs), rangées suivant leurs grandeurs croissantes, et formons la fonction

$$\varphi(r) = c_0^2 + c_1^2 r^2 + c_2^2 r^4 + \ldots,$$

avec

$$c_n = \frac{A_0}{n^n}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^n.$$

En vertu d'une proposition que j'ai démontrée antérieurement (1) et d'après l'inégalité (9), on aura

$$\zeta_1 \geq \frac{A_1 r}{\sqrt{\varphi(r)}},$$

quelle que soit la valeur réelle et positive de r. En prenant la valeur particulière

$$r = \frac{A_0}{A_1},$$

on aura

$$\varphi(r) = A_0^2 \sum_0^\infty n^{-2n} = 2,06388\ldots A_0^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(r)}} = \frac{0,6960\ldots}{A_0},$$

d'où la conclusion suivante : *une limite inférieure des valeurs absolues des zéros de toute fonction* $\Omega(z)$ *est donnée par l'expression*

$$0,6961\,\frac{A_0}{A_1}.$$

On arrive même à la proposition plus générale que *le produit des modules des* k *premiers zéros de* $\Omega(z)$ *est égal ou supé-*

---

(1) Si l'on désigne par ρ le plus petit module des zéros d'une série quelconque $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ et si l'on forme la fonction

$$u(r) = \frac{1}{r^2}(a_0^2 + a_1^2 r^2 + a_2^2 r_4^2 + \ldots),$$

on aura

$$\rho \geq \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}},$$

quelle que soit la valeur réelle et positive r, inférieure au rayon de convergence de la série (M. Petrovitch, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXIV, 1901, p. 302-312 ; E. Landau, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXIII, 1905, p. 251-261).

rieur à

$$0{,}6961\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^k.$$

On conçoit, d'ailleurs, facilement que les inégalités précédentes permettent de nombreuses applications des résultats récents sur les séries de Taylor aux fonctions $\Omega(z)$.