BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FONTENÉ

Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre un

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 153-163

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__153_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'EXTENSION A L'ESPACE DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET PAR DES POLYÈDRES DE GENRE *un*;

Par M. G. Fontené.

I.

1. Dans un Mémoire inséré au *Bulletin* (t. XXXII, 1904, p. 284), j'ai d'abord montré que l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace a des chances de réussir en employant des polyèdres homogènes de genre *un*, dont les faces sont des quadrilatères et dont les angles solides sont des angles tétraèdres; j'ai donné à ces polyèdres le nom de *polyèdres réticulés,* qui rappelle la disposition des sommets en q séries de p sommets d'une part, en p séries de q sommets d'autre part, et la disposition analogue des faces.

Un tel polyèdre, avec des sommets en nombre pq, des faces en nombre pq, dépend régulièrement de $2\,pq$ paramètres. S'il doit être circonscrit à une quadrique donnée S, et inscrit à une quadrique donnée S′, ce qui forme en général $2pq$ conditions, il semble que l'on a affaire à un problème déterminé; mais peut-être ce problème est-il en réalité généralement impossible, et ne devient-il possible qu'en devenant indéterminé.

Avec $p=3$, $q=3$, le polyèdre dépend exceptionnellement de $18+1$ paramètres. J'ai montré que la recherche d'un polyèdre de cette nature circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S′, recherche qui est un problème *simplement* indéterminé en apparence, est en réalité un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant *doublement* indéterminé. La condition de fermeture est

$$\sqrt{\lambda_1}\pm\sqrt{\lambda_2}\pm\sqrt{\lambda_3}\pm\sqrt{\lambda_4}=0,$$

les λ étant les racines du discriminant de la forme $\lambda S+S'$.

Je considère ici un nouveau cas pour lequel j'ai pu établir en toute rigueur la condition de fermeture

$$\lambda_1+\lambda_2=\lambda_3+\lambda_4$$

que j'avais indiquée comme probable (*Bulletin,* t. XXXIII, p. 115).

2. Si l'on suppose que, dans un polyèdre réticulé correspondant aux valeurs $p = 4$, $p = 4$, les sommets opposés se confondent deux à deux, on obtient un polyèdre II, présentant 8 faces quadrangulaires, 8 angles solides tétraèdres (*Bulletin*, t. XXXIII, p. 116), ce polyèdre dépend encore exceptionnellement de $16 + 1$ paramètres. Les sommets d'un polyèdre II formant en outre un système de points de Lamé, en même temps que les plans de ses faces forment un système de plans de Lamé, le problème de construire un tel polyèdre, circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S′, est un problème *triplement* indéterminé en apparence; je ferai voir que ce problème est en réalité un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant *quadruplement* indéterminé; la condition de fermeture est écrite ci-dessus.

3. J'ai montré (*Bulletin*, t. XXXIV, p. 7) (¹) que les 8 points et les 8 plans d'un *octuple gauche complet* sont, de trois manières différentes, les sommets et les plans des faces d'un polyèdre II; et le problème qui se pose pour un tel polyèdre est identique à celui-ci : lorsque deux quadriques S et S′ admettent un octuple gauche complet circonscrit à l'une et inscrit à l'autre, satisfont-elles à la condition invariante écrite ci-dessus, de manière à admettre, non une triple, mais une quadruple infinité de semblables octuples?

4. Avant d'aborder cette question, nous devons en étudier une autre.

L'octuple gauche complet peut être regardé, de quatre manières différentes, comme un ensemble de deux tétraèdres dont chacun est inscrit à l'autre; cette configuration s'était offerte sous ce point de vue à M. Humbert (*Bulletin*, t. XXXII, p. 142). Ce géomètre, comme conséquence d'un théorème que j'avais déjà fait connaître, et qu'il a obtenu de son côté, a démontré (en considérant des tétraèdres) un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Lorsque les 8 *points communs à une quadrique réglée* S *et*

(¹) Le polyèdre II est représenté en cet endroit sous son aspect le plus frappant; la figure est empruntée à une Note de M. Bricard, qui a signalé le premier l'existence de ce polyèdre.

à un biquadratique Ω *sont les sommets de deux quadrilatères de génératrices appartenant à* S, *il existe une double infinité d'octuples gauches complets circonscrits à la quadrique et inscrits à la biquadratique; réciproquement, ...*

L'existence d'*un seul* octuple gauche circonscrit à la quadrique et inscrit à la biquadratique entraîne-t-elle que les 8 points communs soient les sommets de deux quadrilatères de génératrices appartenant à la quadrique, etc.? Un décompte de paramètres en rend l'affirmation vraisemblable (*Bulletin*, t. XXXIV, p. 13); mais ce mode de raisonnement, souvent légitime, est insuffisant en l'espèce. Un Mémoire récent de M. Bricard (*Bulletin*, t. XXXIV, p. 17) donne le moyen de faire la démonstration.

5. L'octuple gauche complet peut être regardé, de quatre manières différentes, comme un hexaèdre dont les plans des faces sont 6 des 8 plans du système, et dont les sommets sont les 8 points du système, les deux tétraèdres bien connus que l'on peut ordinairement inscrire à un hexaèdre se réduisant à des quadrangles plans. Corrélativement, on peut le regarder, de quatre manières différentes, comme un octaèdre dont les sommets sont 6 des 8 points (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') du système, et dont les plans des faces sont les 8 plans du système, avec cette particularité : les faces de l'octaèdre étant réparties en deux groupes de quatre faces, tels que deux faces quelconques d'un même groupe aient en commun un sommet et un seul, les quatre faces d'un même groupe ont un point commun. C'est à ce dernier point de vue que M. Bricard envisage l'octuple gauche.

Étant donnée une biquadratique Ω, on peut lui inscrire ∞^3 octuples gauches, dont les couples de sommets (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') appartiennent à l'une des trois involutions bien connues qui transforment la courbe en elle-même : on peut se donner à volonté l'un des 8 plans de l'octuple, soit le plan *abcd*. Les 8 plans d'un octuple formant un système de Lamé, il existe ∞^2 quadriques inscrites à chacun de ces octuples : il semble donc qu'il existe ∞^5 quadriques, inscrites aux octuples que l'on peut inscrire à une biquadratique; si l'on démontre que ces quadriques sont réellement en nombre ∞^3, il en résultera que chacune d'elles est inscrite à ∞^2 des octuples considérés, et *toute quadrique admettant un octuple*

qui lui est circonscrit, en même temps qu'il est inscrit à la biquadratique, admettra ∞^2 semblables octuples : le fait préalable que nous avons en vue sera établi.

Or, M. Bricard a donné d'une involution I, telle que celles dont on vient de parler, une expression algébrique qui se prête mieux au traitement de certaines questions que l'expression par les fonctions elliptiques : Si

$$l = 0,\ l' = 0,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ p = 0,\ p' = 0$$

sont les équations tangentielles de quatre couples de points faisant partie de l'involution, l'équation

$$(\Sigma) \qquad \lambda ll' + \mu mm' + \nu nn' + \pi pp' = 0,$$

bien qu'elle renferme seulement trois paramètres, se trouve (en raison de la dépendance des 8 points) pouvoir représenter une infinité de quadriques réduites à deux points, et ces couples de points sont les couples involutifs que l'on a en vue. Considérons alors un octuple gauche inscrit à la biquadratique Ω, les couples de sommets étant (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'). Prenons sur Ω des couples involutifs $AA' = 0$, $CC' = 0$; parmi les quadriques du faisceau tangentiel

$$AA' + \rho CC' = 0,$$

il y en a une qui touche le plan *abcd*, et elle est inscrite à l'octuple considéré (Mémoire de M. Bricard, p. 23); en faisant varier indépendamment les deux couples AA' et CC', on aura toutes les quadriques inscrites à cet octuple (*ibid.*, p. 26 et 27). Si maintenant on fait varier l'octuple que l'on considère, on aura des quadriques en nombre ∞^3, puisqu'on les a toutes en faisant varier le couple AA', le couple CC', et le multiplicateur ρ. Le fait annoncé plus haut est donc établi. On remarquera que les quadriques dont il s'agit ici, en nombre infini ∞^3, sont les quadriques représentées par l'équation (Σ), où λ, μ, ν, π varient arbitrairement.

Le fait que toute quadrique Σ admettant un octuple qui lui est circonscrit, en même temps qu'il est inscrit à la biquadratique, admet nécessairement ∞^2 semblables octuples, vient d'être démontré sans faire intervenir explicitement le théorème de M. Humbert. Mais il faut observer que, l'équation de la quadrique Σ pouvant

être mise sous la forme $AA' + \rho CC' = 0$, cette quadrique contient le quadrilatère $AA'CC'$ dont les sommets sont des points de la biquadratique ; si d'ailleurs BB' et DD' sont les deux couples de points qui forment avec les couples AA' et CC' les sommets d'un octuple gauche inscrit à la biquadratique, on a une identité de la forme

$$AA' + \rho CC' \equiv k(BB' + \sigma DD'),$$

puisque la quadrique formée des deux points D et D′ est inscrite à l'octaèdre qui a pour sommets les points A, A′, B, B′, C, C′ ; l'équation de la quadrique Σ peut donc aussi se mettre sous la forme $BB' + \sigma DD' = 0$, de sorte que cette quadrique contient également le quadrilatère $BDB'D'$.

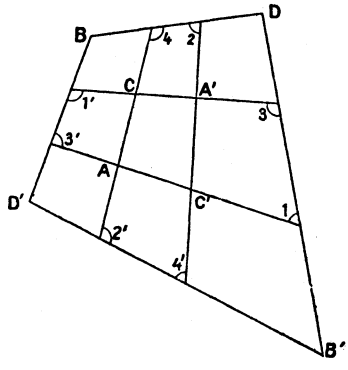
6. La question préalable posée au n° 4 étant ainsi résolue par l'affirmative, arrivons à la question posée au n° 3, et qui est celle que nous avons réellement en vue. Soit un octuple gauche circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S′. Par les sommets aa', bb', cc', dd' de cet octuple, on peut faire passer une infinité de biquadratiques Ω tracées sur S′ : considérons l'une de ces biquadratiques. D'après ce qui précède, les 8 points communs à la biquadratique Ω et à la quadrique S sont les sommets de deux quadrilatères de génératrices $ABA'B'$ et $CDC'D'$ appartenant à S, de sorte qu'il existe deux contours quadrangulaires situés sur S et inscrits à S′, ou encore deux contours quadrangulaires situés sur S et inscrits à la biquadratique C′ qui est la trace de la quadrique S′ sur la quadrique S. Mais on sait qu'un tel contour ne peut exister sans qu'il en existe une infinité, et j'ai montré (*Nouvelles Annales,* 1905, p. 119) que la condition de fermeture est celle-ci : les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S'$ doivent satisfaire à la condition

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4.$$

Ainsi, par le fait qu'un octuple gauche est circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S′, ces deux quadriques ne sont pas quelconques ; elles vérifient la condition précédente, et il existe une infinité de contours quadrangulaires situés sur S et inscrits à S′ (ou à la biquadratique commune C′). Soient $ACA'C'$ et $BDB'D'$ deux de ces contours (*fig.* 1) ; les 8 points (A, A′),

(B, B′), ..., qui sont d'ailleurs les sommets d'un octuple gauche complet, étant communs aux quadriques (1, 1′), (2, 2′), (3, 3′), (4, 4′) dont chacune est un système de deux plans, sont 8 points de Lamé, et l'on peut faire passer par ces points une infinité de biquadratiques Ω tracées sur S′; dans chacune de ces biquadra-

Fig. 1.



tiques Ω on peut inscrire, d'après le théorème de M. Humbert, une double infinité d'octuples gauches complets circonscrits à S.

Il semble que l'on aurait ainsi ∞^5 octuples gauches complets inscrits à S′ et circonscrits à S. Mais il n'en peut être ainsi, car il existerait par cela même ∞^5 tétraèdres inscrits à S′ et circonscrits à S, et, en vertu d'un théorème auquel il est fait allusion plus haut, les deux quadriques devraient avoir en commun un quadrilatère de génératrices, ce que l'on ne suppose pas (on devrait avoir pour cela $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 = \lambda_4$). Il arrive que chacun des octuples gauches obtenus se présente ∞^1 fois; on les obtient tous, une fois chacun, en laissant fixe le quadrilatère ACA′C′, et en faisant varier seulement le quadrilatère BDB′D′; et l'on se rend compte de ce fait en se rappelant que les sommets (a, a'), (b, b'), ..., d'un octuple gauche sont 8 points de Lamé, de sorte que l'on peut faire passer par ces points, et par le point A donné à l'avance, une biquadratique Ω tracée sur S′ : il se trouve que cette biquadratique passe par les quatre sommets du quadrilatère ACA′C′, et qu'elle rencontre encore la biquadratique C′ en quatre points BDB′D′ qui sont les sommets d'un quadrilatère de génératrices tracé sur S. Le fait annoncé au début est donc établi : l'existence d'un octuple

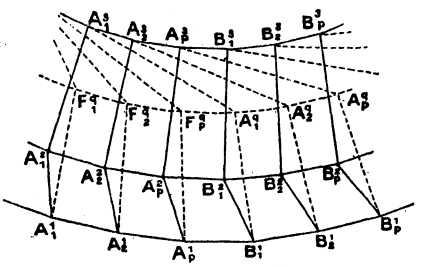
gauche complet circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S′ suppose la condition de fermeture qui a été indiquée, et entraîne l'existence d'une *quadruple* infinité de semblables octuples.

II.

7. Le résultat précédent apportant une confirmation nouvelle aux vues que j'ai exposées précédemment, il n'est pas sans intérêt de compléter sur quelques points l'étude des polyèdres tétragonaux. Je montrerai d'abord qu'un tel polyèdre peut être constitué d'une manière plus générale que celle que j'ai indiquée tout d'abord : aux deux caractéristiques p et q vient s'en adjoindre une troisième r.

La figure ci-dessous représente une partie d'un polyèdre tétra-

Fig. 2.



gonal affectant la forme générale d'un tore. Les arêtes formant des suites ou contours de première espèce

$$A_1^1 A_2^1 \ldots A_p^1, B_1^1 B_2^1 \ldots B_p^1, C_1^1 \ldots, F_S^1,$$

l'indice supérieur étant constant, et des suites ou contours de seconde espèce

$$A_1^1 A_1^2 \ldots A_1^q, B_1^1 B_1^2 \ldots B_1^q, C_1^1 \ldots, F_1^q,$$

l'indice inférieur étant constant; les deux contours considérés ont en commun les sommets

$$A_1^1, B_1^1, C_1^1, \ldots, F_1^1,$$

dont le nombre sera désigné par p, et ce fait est général pour deux contours d'espèces différentes. Si p est le nombre des contours

de seconde espèce, et q celui des contours de première espèce, le nombre des sommets est pqr; chacun des q contours de première espèce contient en effet $pr = \mathrm{P}$ sommets, puisqu'il est rencontré en r points par chacun des p contours de seconde espèce; chacun des p contours de seconde espèce contient de même $qr = \mathrm{Q}$ sommets.

Un polyèdre tétragonal d'indice r peut être déduit d'un polyèdre tétragonal d'indice 1. Soit en effet un polyèdre tétragonal d'indice 1, dont les contours de première espèce renferment P sommets, dont les contours de seconde espèce renferment Q sommets, et soit r un diviseur commun aux nombres P et Q, de sorte que l'on a $\mathrm{P} = pr$, $\mathrm{Q} = qr$; si l'on suppose que les contours de première espèce, dont le nombre est qr, se confondent de r en r, et que les contours de seconde espèce, dont le nombre est pr, se confondent également de r en r, on arrive à un polyèdre tétragonal d'indice r.

Pour former les contours précédents, on a fait suivre une arête MN, au point N par exemple, de l'arête NP qui lui est opposée dans l'angle tétraèdre N du polyèdre; les contours d'arêtes ainsi obtenus ont pour sommets les sommets du polyèdre, et peuvent être appelés *contours ponctuels d'arêtes*. Corrélativement, on peut former d'autres contours en faisant suivre une arête (m, n), dans le plan n par exemple, de l'arête (n, p) qui lui est opposée dans la face quadrangulaire du polyèdre situé dans le plan n; les contours d'arêtes ainsi obtenus ont pour plans de leurs angles les plans des faces du polyèdre, et peuvent être appelés *contours tangentiels d'arêtes*.

Aux valeurs $p = 2$, $q = 2$, $r = 2$ correspond le polyèdre tétragonal à 8 sommets et à 8 faces dont il a été question au paragraphe I; si l'on se reporte aux figures données précédemment (*Bulletin*, t. XXXIII, p. 116 et 117), les deux contours ponctuels de première espèce sont $abcd$, $a'b'c'd'$ et les deux contours ponctuels de seconde espèce sont $ac'ca'$ et $bd'db'$. La première des deux figures en question permet de concevoir un polyèdre tétragonal d'indice 2, avec p et q quelconques.

Si l'on fait $p = 3$, $q = 1$, $r = 3$, on obtient un polyèdre tétragonal à 9 sommets et à 9 faces. Soit $\mathrm{AA'A''BB'B''CC'C''}$ le contour ponctuel d'arêtes de première espèce; les trois contours de

seconde espèce sont ABC, A′B′C, A″B″C″. Chacune des arêtes, AB, A′B′, A″B″, BC, B′C′, ... rencontre la suivante, et ces arêtes forment le contour tangentiel de première espèce, contour dont nous désignerons les sommets par la notation 1, 2, 3, ..., 9; en ce qui concerne les contours tangentiels de seconde espèce, les arêtes AA′, BB′, CC′, par exemple, sont deux à deux coplanaires, et sont ainsi les arêtes d'un trièdre (il en est de même pour les arêtes A′A″, B′B″, C′C″, et pour les arêtes A″B, B″C, C″A). On peut dire que les 18 arêtes du polyèdre sont les 9 côtés du contour ponctuel AA′A″, ..., et les 9 côtés du contour tangentiel formé par les droites successives AB, A′B′, A″B″, BC, ...; les plans des angles de ce dernier contour sont les plans des faces du polyèdre.

Pour construire un tel polyèdre, nous emploierons les trois contours ponctuels de seconde espèce ABC, A′B′C′, A″B″C″. Les plans de ces triangles forment un trièdre Sx, Sy, Sz; donnons-nous ce trièdre, et traçons sur sa surface le contour 1, 2, 3, 4, ..., 9, les sommets étant successivement sur les arêtes Sz, Sx, Sy, Sz, ...; nous obtenons dans les trois faces ySz, zSx, xSy les trois triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″ : les droites 91, 12, 23, 34, 45, 56 devant contenir les arêtes AB, A′B′, A″B″, BC, B′C′, B″C″, on marque B, B′, B″ aux intersections des droites 91 et 34, 12 et 45, 23 et 56, et le reste va de soi. Les 9 dernières arêtes du polyèdre sont les arêtes

$$(AA', BB', CC'), (A'A'' B'B'', C'C''), (A''B, B''C, C''A),$$

concourantes trois à trois.

8. De combien de paramètres dépend un polyèdre tétragonal? Le nombre commun des sommets et des faces étant S, les sommets sont astreints à S conditions par le fait que les faces sont quadrangulaires, et le nombre des paramètres est 2S, sauf réduction possible du nombre des conditions. Une telle réduction ayant lieu, comme on l'a vu, pour $p = 3$, $q = 3$, $r = 1$, et aussi pour $p = 2$, $q = 2$, $r = 2$, on est amené à se demander si le fait n'est pas général; on va voir qu'il n'a pas lieu pour $r = 1$, $p = 3$, $q \neq 3$.

Soit $r = 1$. On peut se donner, avec les notations de mon premier Mémoire, les p plans $A^1B^1A^2B^2$, $B^1C^1B^2C^2$, ..., et les p points A^2, B^2, C^2, ..., sur les droites A^1A^2, B^1B^2, C^1C^2, ...;

puis les p plans $A^2B^2A^3B^3$, $B^2C^2B^3C^3$, ..., et les p points A^3, B^3, C^3, ..., sur les droites A^2A^3, B^2B^3, C^2C^3, ...; et ainsi de suite jusqu'aux points A^q, B^q, C^q, ...; le nombre des paramètres est ainsi

$$4p + 2p(q-2) = 2pq.$$

Si l'on se donne alors le point A^1 quelconque, ce qui détermine de proche en proche les points B^1, C^1, D^1, ..., la question est de savoir si l'on reviendra au point A^1, comme il arrive pour $q=2$, $q=3$.

A supposer que les choses se passent régulièrement, si l'on se donne le point A^1 quelconque sur la droite A^2A^1, on trouvera généralement en revenant sur cette arête un point $\mathfrak{A}^1$ distinct du point A^1; il y aura homographie entre A^1 et $\mathfrak{A}^1$, et les deux points doubles de cette homographie seront les positions que l'on devra donner au point A^1 pour revenir à ce point. Prenons $p=3$. Les deux positions du point A^1 sont, d'une part, le sommet S du trièdre formé par les plans $A^2B^2A^1B^1$, $B^2C^2B^1C^1$, $C^2A^2C^1A^1$, d'autre part, le point où la droite A^2A^1 rencontre le plan $A^qB^qC^q$; et les deux solutions ainsi obtenues doivent être écartées. C'est que, en effet, on ne peut pas se donner arbitrairement les plans $A^2B^2A^1B^1$, ... passant par les côtés du triangle $A^2B^2C^2$, et les points $A^qB^qC^q$ sur les droites qui doivent les contenir. Soient, par exemple, α, β, γ les points où les côtés du triangle $A^qB^qC^q$ rencontrent les plans des faces correspondantes du trièdre S; la droite B^1C^1 devant passer en α, ..., le plan $A^1B^1C^1$ doit contenir les points α, β, γ, qui sont déjà dans le plan $A^qB^qC^q$; si donc on écarte pour le triangle $A^1B^1C^1$ les deux solutions indiquées ci-dessus, les points α, β, γ doivent être en ligne droite, ce qui réduit d'une unité le nombre des paramètres, et le plan $A^1B^1C^1$ est alors un plan quelconque passant par la droite α, β, γ, *ce qui ramène le nombre des paramètres à sa valeur normale.* Il y a toutefois exception pour le cas $p=3$, $q=3$; on se donne alors les plans $A^1A^1A^2B^2$, ... et les points A^2, B^2, C^2, les plans $A^2B^2A^3B^3$, ... et les points A^3, B^3, C^3; par la droite d'intersection des plans $A^2B^2C^2$ et $A^3B^3C^3$, qui est ici la droite $\alpha\beta\gamma$, on mène un plan quelconque qui donne les points A^1, B^1, C^1; on gagne donc un paramètre. (On aurait pu faire un raisonnement corrélatif, les points α, β, γ étant remplacés par des plans.)

En supposant toujours $p = 3$, au lieu de partir de trois plans $A^1B^1A^2B^2$, ..., pour arriver à trois points A^q, B^q, C^q, on peut partir des points A^2, B^2, C^2, et arriver aux points A^q, B^q, C^q, avec des paramètres en nombre $2pq - 3$. Si l'on se donne alors le plan du triangle $A^1B^1C^1$, ce triangle est déterminé, puisque la droite B^1C^1 par exemple doit rencontrer les deux droites B^2C^2 et B^qC^q; il y a toujours exception pour le cas $p = 3$, $q = 3$, le plan $A^1B^1C^1$ devant alors passer par la droite d'intersection des plans $A^2B^2C^2$, $A^3B^3C^3$, et chacun des côtés du triangle $A^1B^1C^1$ dépendant ensuite d'un paramètre. (On peut faire un raisonnement corrélatif.)